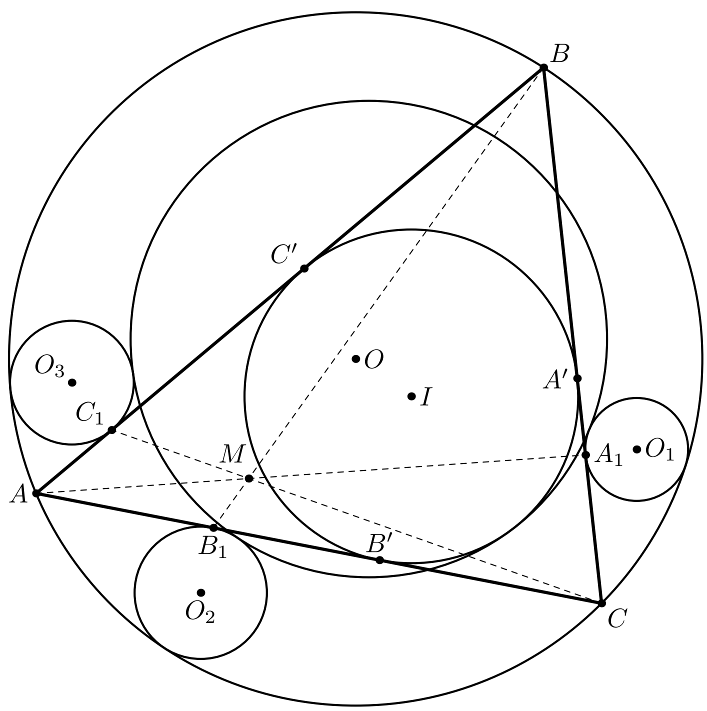
Решения задач из предыдущих выпусков

7.8. Условие. Пусть ABC — произвольный треугольник, а M — точка внутри треугольника. Проведём через точку M три чевианы, основания которых — A_1, B_1, C_1. Построим вне треугольника три окружности, касающиеся сторон треугольника в основаниях чевиан и описанной окружности, и четвёртую, касающуюся этих трёх внешним образом. Тогда эта окружность касается вписанной окружности треугольника внутренним образом.



Решение.

Мы применим теорему Кэзи[1]: четыре окружности s_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ касаются окружности или прямой тогда и только тогда, когда

$$t_{12}t_{34} \pm t_{13}t_{42} \pm t_{14}t_{23} = 0,$$

[1] Доказательство теоремы Кэзи см., например, в книге И. М. Яглома «Геометрические преобразования», М.: ГИТТЛ, 1956.

где t_{ij} — длина общей касательной к окружностям s_i и s_j.

В нашем случае окружности s_1, s_2, s_3 — окружности с центрами O_1, O_2, O_3 (см. рис.), а окружность s_4 — это вписанная в треугольник ABC окружность. Докажем, что

$$t_{12}t_{34} - t_{13}t_{42} - t_{14}t_{23} = 0, \tag{1}$$

где t_{12}, t_{13} и t_{23} — длины общих внешних касательных, а t_{34}, t_{42} и t_{14} — длины общих внутренних касательных.

Будем рассматривать точки A, B, C как вырожденные окружности радиуса 0. Через t_{Ai} (t_{Bi}, t_{Ci}) будем обозначать длины касательных из точки A (B, C) к окружности s_i.

Запишем теорему Кэзи для окружностей A, B, s_1, C (они все касаются описанной вокруг треугольника ABC окружности):

$$t_{A1}t_{BC} = t_{AB}t_{C1} + t_{AC}t_{1B}, \text{ т.е.}$$
$$t_{A1} \cdot BC = AB \cdot CA_1 + AC \cdot A_1B.$$

Отсюда получаем

$$t_{A1} = AB \cdot \frac{CA_1}{BC} + AC \cdot \frac{A_1B}{BC}\,. \tag{2}$$

Аналогично

$$t_{B2} = BA \cdot \frac{CB_1}{AC} + BC \cdot \frac{B_1A}{AC}\,, \tag{3}$$

$$t_{C3} = CB \cdot \frac{AC_1}{AB} + CA \cdot \frac{C_1B}{AB}\,. \tag{4}$$

Запишем теорему Кэзи для окружностей B, C, s_2 и s_3:

$$t_{C_3}t_{B_2} = t_{CB}t_{23} + t_{C2}t_{3B}, \text{ т.е.}$$
$$t_{C_3}t_{B_2} = CB \cdot t_{23} + CB_1 \cdot C_1B,$$

откуда, используя (3) и (4) получаем

$$t_{23} = \frac{AB \cdot B_1C \cdot C_1A + BC \cdot C_1A \cdot AB_1 + CA \cdot AB_1 \cdot BC_1}{AB \cdot CA}\,. \tag{5}$$

Аналогично

$$t_{12} = \frac{AB \cdot B_1C \cdot CA_1 + BC \cdot CA_1 \cdot AB_1 + CA \cdot AB_1 \cdot BC_1}{BC \cdot CA}\,, \tag{6}$$

$$t_{13} = \frac{AB \cdot BC_1 \cdot CA_1 + BC \cdot C_1A \cdot A_1B + CA \cdot A_1B \cdot BC_1}{BC \cdot AB}\,. \tag{7}$$

Теперь найдем t_{34}, t_{42}, t_{14}:

$$t_{34} = C_1C' = BC_1 - BC' = BC_1 - \frac{AB + BC - CA}{2}\,, \tag{8}$$

$$t_{42} = B'B_1 = AB' - AB_1 = \frac{CA + AB - BC}{2} - AB_1\,, \tag{9}$$

$$t_{14} = A_1A' = CA' - CA_1 = \frac{BC + CA - AB}{2} - CA_1\,, \tag{10}$$

здесь A', B', C' — точки касания сторон треугольника со вписанной окружностью.

Подставив (5)–(10) в (1) после упрощения получим

$$t_{12}t_{34} - t_{13}t_{42} - t_{14}t_{23} = \frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 - A_1 \cdot B_1C \cdot C_1A}{2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA} (2 \cdot AB \cdot BC + \\ + 2 \cdot BC \cdot CA + 2 \cdot CA \cdot AB - AB^2 - BC^2 - CA^2).$$

Это выражение равно 0, если

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 - A_1 \cdot B_1C \cdot C_1A = 0, \qquad (11)$$

так как

$$2 \cdot AB \cdot BC + +2 \cdot BC \cdot CA + 2 \cdot CA \cdot AB - AB^2 - BC^2 - CA^2 = \\ = 4\big(AB' \cdot CA' + BC' \cdot AB' + CA' \cdot BC'\big) \neq 0.$$

Условие (11) равносильно условию конкурентности прямых AA_1, BB_1, CC_1, т. е.

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

(*Л. А. Емельянов*)

8.1. Условие. Можно ли получить все возможные состояния кубика Рубика, последовательно выполняя некоторую комбинацию поворотов? (Учитываются только конечные, а не промежуточные состояния.)

Решение.

Предположим, что это возможно. Тогда существует такая комбинация поворотов K, что каждое состояние представимо степенью K. Но тогда и каждый поворот каждой грани кубика представим степенью K. Следовательно, повороты граней кубика должны быть перестановочны (коммутировать), но это неверно: повороты двух соседних граней неперестановочны. Полученное противоречие доказывает, что такой комбинации не существует. (*А. К. Ковальджи*)

9.2. Условие. Дано n магнитофонных катушек, на которые намотаны ленты красными концами наружу, и 1 пустая катушка. Можно ли перемотать все ленты так, чтобы каждая оказалась на своей катушке, но красным концом внутрь? (Перематывать можно с любой катушки на пустую в данный момент катушку, при этом наружный конец становится внутренним, и наоборот.)

Решение. 1. Будем считать, что на пустой катушке тоже намотана виртуальная лента, а после перемотки две катушки обмениваются лентами, причем обе ленты меняют свои концы. Тогда ленты меняют концы парами.