Вторая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал

8 класс

8.1.(И.Ященко) Впишите в данный полукруг правильный треугольник наибольшего периметра.

Решение. Очевидно, вписать треугольник в полукруг можно двумя способами: либо две вершины треугольника лежат на дуге, а третья на диаметре полукруга, либо, наоборот, две вершины на диаметре, а третья на дуге. Рассмотрим первый случай. Пусть вершины A, B лежат на дуге. Тогда серединный перпендикуляр к AB проходит через центр полукруга. Следовательно, третья вершина совпадает с центром и сторона треугольника равна радиусу полукруга (рис.8.1.1).

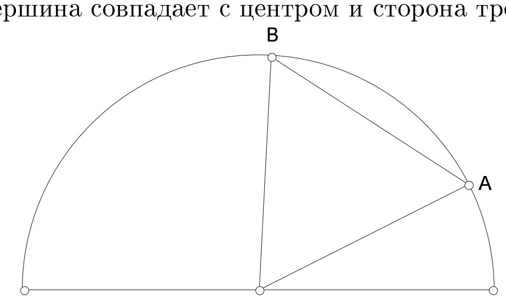

Рис.8.1.1

Во втором случае высота треугольника не превосходит радиуса полукруга, причем в случае, изображенном на рис.8.1.2, равенство достигается. Следовательно, именно этот треугольник и будет искомым.

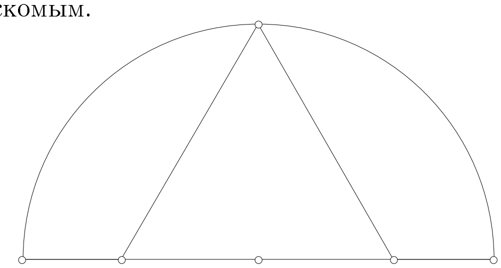

Рис.8.1.2

8.2. (Б.Френкин) При каком наименьшем n существует n-угольник, который можно разрезать на треугольник, четырехугольник,..., 2006-угольник?

Решение. Ответ: $n = 3$. Из рисунка 8.2 видно, что при любом $n \geq 3$ треугольник можно разрезать на n-угольник и $(n+1)$-угольник. Следовательно, можно лучами, выходящими из одной вершины, разрезать треугольник на 1002 треугольника, а затем первый из них разрезать на треугольник и четырехугольник, второй на пятиугольник и шестиугольник, ..., последний — на 2005-угольник и 2006-угольник.

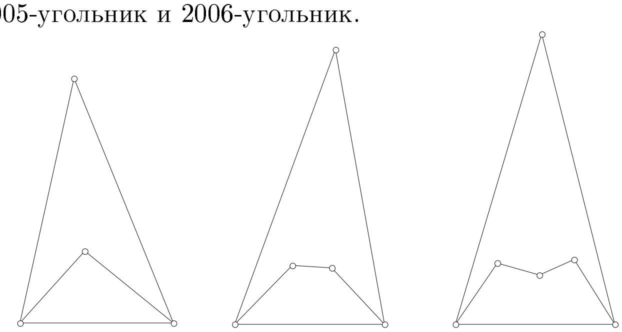

Рис.8.1

8.3. (В.Протасов) Дан параллелограмм $ABCD$. Две окружности с центрами в вершинах A и C проходят через D. Прямая ℓ проходит через D и вторично пересекает окружности в точках X, Y. Докажите, что $BX = BY$.

Решение. Рассмотрим, например, случай, изображенный на рис.8.3. Имеем $AX = AD = BC$ и $CY = CD = AB$. Кроме того, $\angle BCY = \angle C - \angle DCY = \angle C - (\pi - 2\angle CDY) = 2\angle CDY - \angle D = \angle CDY - \angle ADX$, $\angle BAX = \angle DAX - \angle A = \pi - 2\angle ADX - \angle A = \angle D - 2\angle ADX = \angle CDY - \angle ADX$. Значит, треугольники ABX и CYB равны, откуда и следует искомое равенство. Другие случаи расположения точек X, Y рассматриваются аналогично.

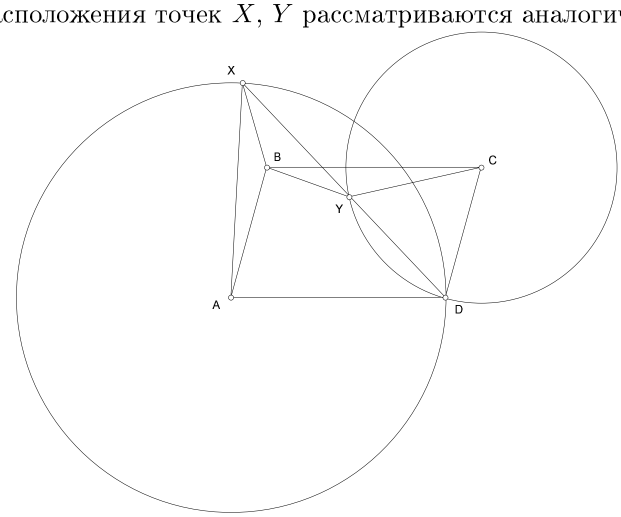

Рис.8.3

8.4. (А.Заславский) Две равные окружности пересекаются в точках A и B. P — отличная от A и B точка одной из окружностей, X, Y — вторые точки пересечения прямых PA, PB с другой окружностью. Докажите, что прямая, проходящая через P и перпендикулярная AB, делит одну из дуг XY пополам.

Решение. Рассмотрим случай, когда P лежит внутри второй окружности (рис.8.4). Пусть Q точка пересечения прямой, проходящей через P и перпендикулярной AB, лежащая вне первой окружности. Тогда $\angle QPX = (\smile QX + \smile AP)/2$, $\angle QPY = (\smile QY + \smile BP)/2$. Но $(\smile AP - \smile BP)/2 = \angle PBA - \angle PAB = \angle QPX - \angle QPY$, следовательно дуги QX и QY равны. Другие случаи рассматриваются аналогично.

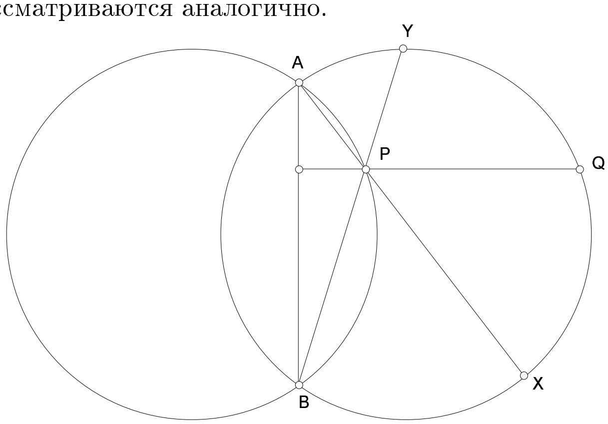

Рис.8.4

8.5. (В.Гуровиц, Б.Френкин) Существует ли выпуклый многоугольник, у которого каждая сторона равна какой-нибудь диагонали, а каждая диагональ — какой-нибудь стороне?

Решение. Ответ: нет. Предположим противное, и пусть AB — наибольшая сторона многоугольника, CD — наименьшая диагональ (AB и CD могут иметь один общий конец), E — вершина, лежащая от CD по другую сторону, чем A и B (рис.8.5). Тогда, так как $AE \leq AB$ и $BE \leq AB$,

$\angle AEB \geq 60°$. С другой стороны, так как $CE \geq CD$ и $DE \geq CD$, $\angle CED \leq 60°$. Но $\angle CED > \angle AEB$ — противоречие.

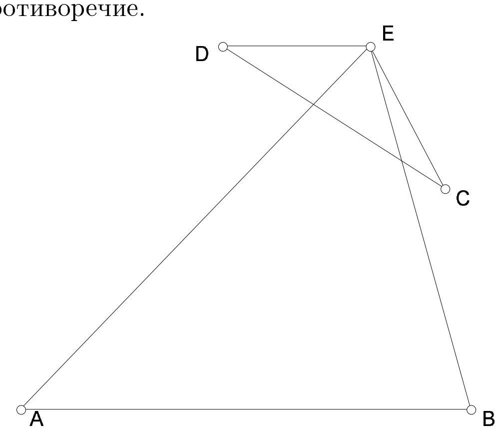

Рис.8.5

8.6. (М.Волчкевич) Дан треугольник ABC и точка P внутри него. A', B', C' — проекции P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, лежит внутри треугольника ABC.

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные P относительно BC, CA, AB. Так как $CA_1 = CP = CB_1$, серединный перпендикуляр к отрезку A_1B_1 совпадает с биссектрисой угла A_1CB_1. Так как $\angle A_1CB_1 = 2\angle ACB$, эта биссектриса проходит внутри угла ACB (рис.8.6). Аналогично, серединные перпендикуляры к отрезкам A_1C_1 и B_1C_1 проходят внутри соответствующих углов треугольника ABC. Следовательно, центр Q окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, лежит внутри треугольника ABC. Так как треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром P и коэффициентом $\frac{1}{2}$, центр окружности, описанной около $A'B'C'$, совпадает с серединой отрезка PQ и, значит, лежит внутри ABC.

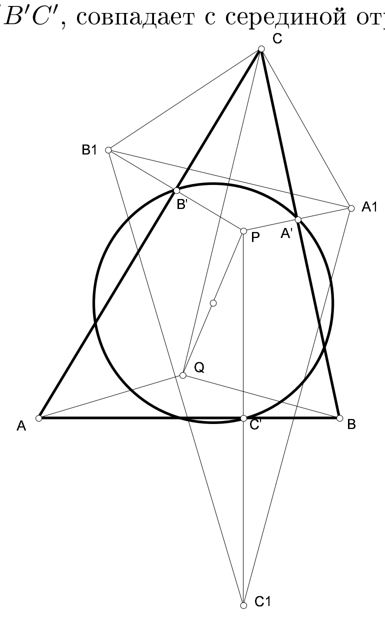

Рис.8.6

9 класс

9.1. (В.Протасов) Дана окружность радиуса R. Две другие окружности, сумма радиусов которых также равна R, касаются ее изнутри. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через одну из общих точек этих окружностей.

Решение. Пусть O — центр внешней окружности, O_1, O_2 — центры внутренних, A, B — точки касания. Проведем через O_1 прямую, параллельную OB, а через O_2 прямую, параллельную OA. По теореме Фалеса эти прямые пересекутся в точке C, лежащей на отрезке AB. При этом $O_1C = O_1A$ и $O_2C = O_2B$, так что точка C принадлежит обеим внутренним окружностям (рис.9.1).

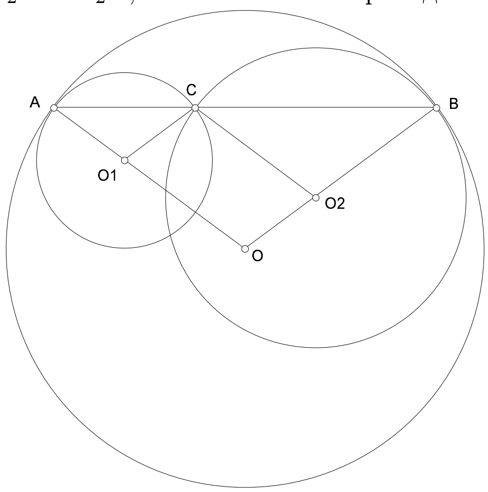

Рис.9.1

9.2. (В.Протасов) Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC, проходящие через M. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех треугольников ABC, касаются некоторой фиксированной окружности.

Решение. Пусть O — центр данной окружности, O' — центр окружности, проходящей через середины сторон ABC, P — центр тяжести ABC. Поскольку вершины треугольника ABC переходят в середины его сторон при гомотетии с центром P и коэффициентом $-\frac{1}{2}$, P лежит на отрезке OO' и делит его в отношении $2:1$. Кроме того, так как множество середин хорд, проходящих через M, — это окружность с диаметром OM, множество центров тяжести треугольников ABC — тоже окружность, получающаяся из нее гомотетией с центром A и коэффициентом $\frac{2}{3}$. Значит, множество точек O' — тоже окружность (рис.9.2).

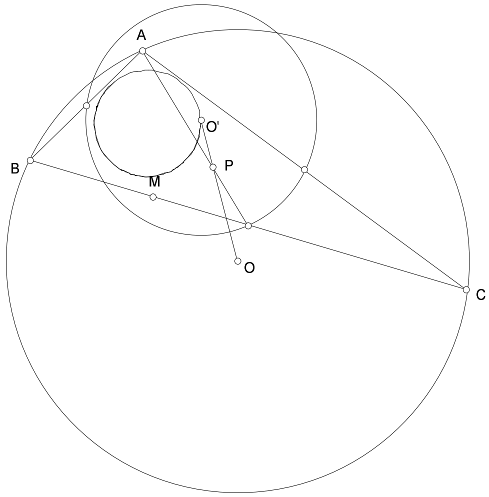

Рис.9.2

Поскольку радиусы всех окружностей, проходящих через середины сторон ABC, равны половине радиуса данной окружности, все эти окружности касаются двух окружностей, концентричных с окружностью, на которой лежат точки O' (если точка M совпадает с O, одна из этих окружностей вырождается в точку).

9.3. (А.Акопян) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и по-разному ориентированы. На отрезке AA_1 взята точка A', такая что $AA'/A_1A' = BC/B_1C_1$. Аналогично строим B' и C'. Докажите, что A', B' и C' лежат на одной прямой.

Решение. Подобие, переводящее ABC в $A_1B_1C_1$, можно представить как композицию симметрии относительно прямой l и гомотетии с центром в некоторой точке, лежащей на l, и коэффициентом k, равным отношению соответствующих сторон треугольников. Очевидно, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 делятся l в отношении, равном k, т.е. точки A', B', C' лежат на l.

9.4. (С.Маркелов) В невыпуклом шестиугольнике каждый угол равен либо 90, либо 270 градусов. Верно ли, что при некоторых длинах сторон его можно разрезать на два подобных ему и неравных между собой шестиугольника?

Решение. Пусть t — корень уравнения $t^4+t^2=1$. Возьмем шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB : BC = BC : CD = CD : AF = AF : FE = FE : ED = \frac{1}{t}$, и разрежем его, как на рис.9.4. Тогда получившиеся шестиугольники подобны $ABCDEF$ с коэффициентами t и t^2.

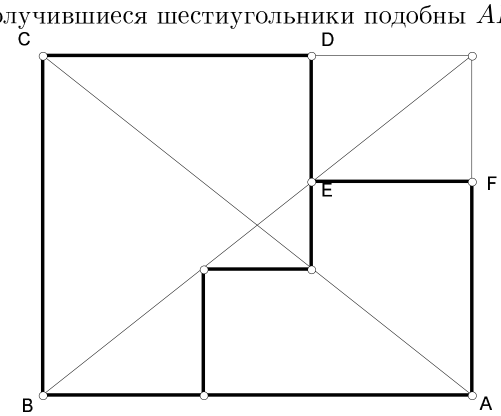

Рис.9.4

9.5. (А.Заславский) Прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения высот неравностороннего треугольника ABC, делит его периметр и площадь в одном и том же отношении. Найдите это отношение.

Решение. Ответ: $1:1$.

Прежде всего докажем, что прямая делит периметр и площадь треугольника в одном отношении тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной окружности. Действительно, пусть прямая пересекает стороны AC, BC в точках X, Y, а биссектрису угла C в точке J; d_1 — расстояние от J до стороны AB, d_2 — расстояние от J до двух других сторон. Тогда $2S_{CXY} = (CX+CY)d_2$, $2S_{AXYB} = (AX+BY)d_2 + AB\cdot d_1$, и отношения равны тогда и только тогда, когда $d_2 = d_1$, т.е. J — центр вписанной окружности.

Пусть теперь центр описанной окружности O, центр вписанной окружности I и ортоцентр H лежат на одной прямой. Эта прямая содержит не более одной вершины треугольника. Пусть она не проходит через вершины A и B. Так как AI, BI — биссектрисы углов HAO, HBO, получаем, что $AH/AO = HI/IO = BH/BO$. Так как $AO = BO$, то $AH = BH$, т.е. треугольник ABC равнобедренный и искомое отношение равно $1:1$.

9.6. (Я.Ганин, F.Rideau) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. A', B', C', D' — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что в четырехугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответствующие диагонали делятся точками пересечения в одном и том же отношении.

Решение. Используем следующее утверждение.

Пусть $KLMN$ — выпуклый четырехугольник; точки X, Y делят отрезки KL и NM в отношении α; точки U, V делят в отрезки LM и KN в отношении β. Тогда точка пересечения отрезков XY и UV делит первый из них в отношении β, а второй в отношении α (рис.9.6)

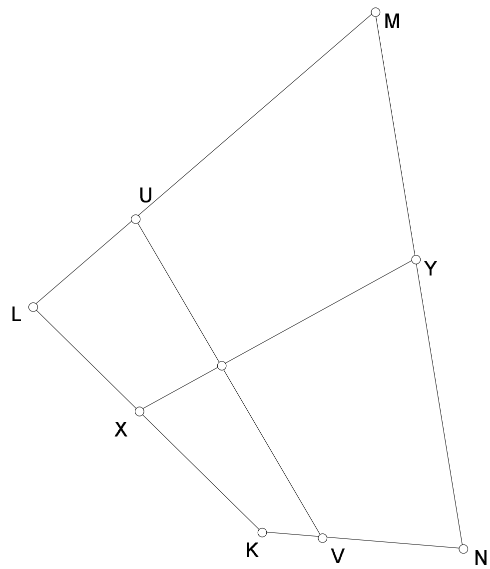

Рис.9.6

Доказательство этого утверждения легко получить методом масс.

Пусть теперь A_1, B_1, C_1, D_1 — центры тяжести треугольников BCD, CDA, DAB, ABC; A_2, B_2, C_2, D_2 — центры описанных около них окружностей. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$ относительно его центра тяжести с коэффициентом $-\frac{1}{3}$. Следовательно, соответствующие диагонали этих четырехугольников делятся точками пересечения в одинаковых отношениях. Докажем, что в тех же отношениях делят друг друга диагонали четырехугольника $A_2B_2C_2D_2$.

Пусть P — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Тогда

$$\frac{AP}{CP} = \frac{AP}{BP}\frac{BP}{CP} = \frac{\sin\angle ABD \sin\angle ACB}{\sin\angle BAC \sin\angle CBD}.$$

Поскольку стороны и диагонали четырехугольника $A_2B_2C_2D_2$ перпендикулярны сторонам и диагоналям четырехугольника $ABCD$ (например, точки A_2, B_2 лежат на серединном перпендикуляре к CD), в таком же отношении делится и диагональ A_2C_2.

Пусть теперь P_1, P_2 — точки пересечения диагоналей четырехугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$; P' — точка на отрезке $A'C'$, делящая его в отношении A_2P_2/P_2C_2. Так как точки A_1, C_1 лежат на отрезках $A'A_2$, $C'C_2$ и делят их в отношении $2:1$, из сформулированного утверждения вытекает, что точка P_1 также делит отрезок $P'P_2$ в отношении $2:1$. Рассмотрев аналогичную точку на отрезке $B'D'$, получим тот же результат. Отсюда следует, что P' — точка пересечения диагоналей четырехугольника $A'B'C'D'$, причем диагонали делятся этой точкой в том же отношении, что и в четырехугольниках $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $ABCD$.

10 класс

10.1. (Hiacinthos) Пять прямых проходят через одну точку. Докажите, что существует замкнутая пятизвенная ломаная, вершины и середины звеньев которой лежат на этих прямых, причем на каждой прямой лежит ровно по одной вершине.

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых. Возьмем на прямой l_1 точку A_1 и найдем на l_3 такую точку A_2, что середина B отрезка A_1A_2 лежит на прямой l_2 (рис.10.1). Применяя теорему синусов к треугольникам OA_1B и OA_2B, получаем, что $\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{\sin \angle A_1OB}{\sin \angle A_2OB}$.

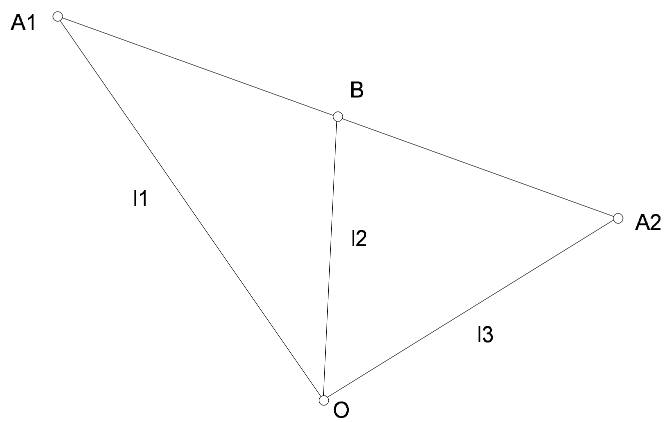

Рис.10.1

Аналогично по точке A_2 построим на прямой l_5 такую точку A_3, что середина A_2A_3 лежит на l_4 и т.д. Перемножив полученные соотношения, получим, что A_6 совпадает с A_1.

10.2. (А.Заславский) Проекции точки X на стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на одной окружности. Y — точка, симметричная X относительно центра этой окружности. Докажите, что проекции точки B на прямые AX, XC, CY, YA также лежат на одной окружности.

Решение. Рассмотрим случай, когда X лежит внутри $ABCD$, остальные разбираются аналогично. Пусть K, L, M, N — проекции X на AB, BC, CD, DA; K', L', M', N' — точки, симметричные X относительно этих прямых. Так как K, L, M, N лежат на окружности, K', L', M', N' также лежат на окружности. Так как $BK' = BX = BL'$, серединный перпендикуляр к отрезку $K'L'$ проходит через B и является биссектрисой угла $K'BL'$, т.е. симметричен BX относительно биссектрисы угла B. Следовательно, четыре прямые, симметричные прямым, соединяющим X с вершинами $ABCD$, относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке X', являющейся центром описанной окружности четырехугольника $K'L'M'N'$. При этом центром окружности $KLMN$ будет середина XX', и значит, X' совпадает с Y. Далее, так как четырехугольники $XKBL$, $XLCM$, $XMDN$, $XNAK$ вписанные, $\angle AXB + \angle CXD = \angle KXA + \angle KXB + \angle CXM + \angle DXM = \angle KNA + \angle BLK + \angle CLM + \angle MND = (\pi - \angle KLM) + (\pi - \angle MNK) = \pi$. Отсюда следует, что прямые XB и DX симметричны относительно биссектрисы угла AXC. Аналогично, прямые YB и DY симметричны относительно биссектрисы угла AYC. Кроме того, как уже было показано, совпадают биссектрисы углов BAD и XAY, BCD и XCY. Таким образом, прямые, симметричные BA, BX, BC, BY, относительно биссектрис соответствующих углов $AXCY$, пересекаются в точке D. Отсюда, рассуждая аналогично началу решения, получаем утверждение задачи (рис.10.2).

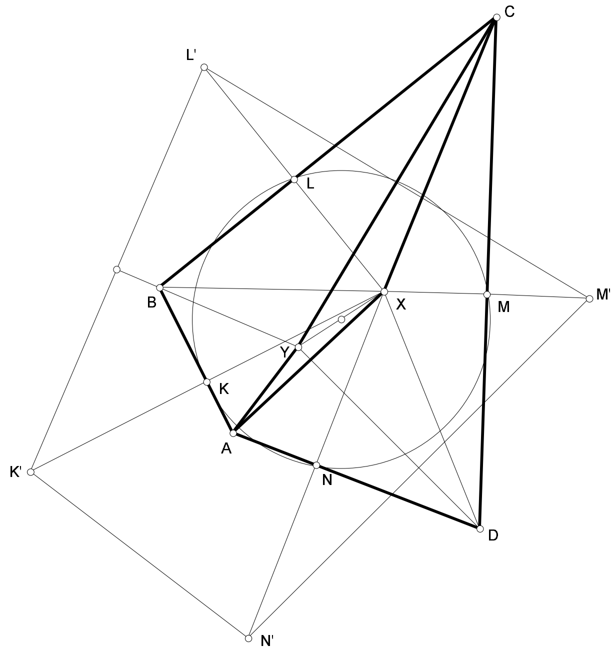

Рис.10.2

10.3. (П.Кожевников) Дана окружность и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

Решение. Пусть X — точка пересечения касательных. Проведем окружность с центром X и радиусом XP и рассмотрим инверсию относительно нее. При этой инверсии окружности, касающиеся в точке P, перейдут друг в друга, так как они касаются окружности инверсии и двух прямых, переходящих в себя. Следовательно, исходная окружность перейдет в себя. Значит, окружность инверсии ортогональна исходной, т.е. касательная из X к исходной окружности равна XP и X лежит на радикальной оси точки P и исходной окружности. Очевидно, что любая точка радикальной оси может быть получена таким образом, т.е искомое ГМТ совпадает с радикальной осью точки P и исходной окружности.

10.4. (А.Заславский) Прямые, содержащие медианы треугольника ABC, вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Прямые, проходящие через A, B, C и параллельные противоположным сторонам, пересекают ее же в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Решение (М.Илюхина). Пусть A' — точка пересечения касательных к описанной окружности ω в точках B и C (аналогично построим точки B' и C'). Тогда, как известно, прямая AA' является симедианой треугольника ABC (то есть прямой, симметричной AA_1 относительно биссектрисы угла A). Пусть прямая AA' вторично пересекает ω в точке A_0. Тогда $\angle A_1AB = \angle A_0AC$, откуда дуги BA_1 и CA_0 равны.

Так как треугольник $A'BC$ равнобедренный, а ω — его вневписанная окружность, то они симметричны относительно биссектрисы ℓ угла $BA'C$. Из равенства дуг следует, что при этой симметрии точки A_1 и A_0 переходят друг в друга. Заметим, что ℓ — серединный перпендикуляр к BC, поэтому A при этой симметрии переходит в A_2 (рис.10.4), а, следовательно, прямая A_1A_2 переходит в прямую AA'. Поэтому, так как прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке L как симедианы треугольника ABC, то прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 также пересекаются в точке, изогонально сопряженной L относительно треугольника $A'B'C'$.

Случай, когда одной из точек A', B', C' не существует, аналогичен.

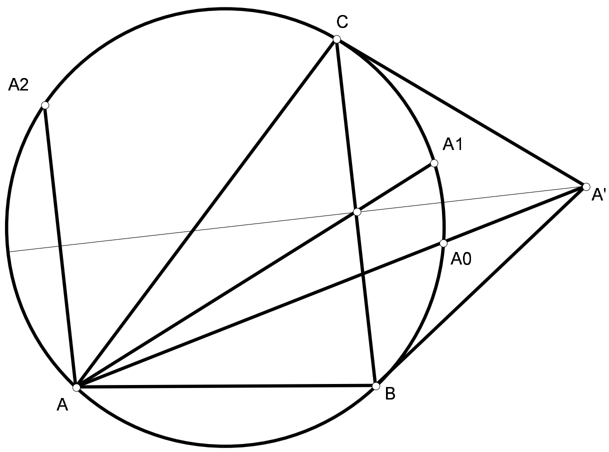

Рис.10.4

10.5. (С.Маркелов) Может ли развертка тетраэдра оказаться треугольником со сторонами 3, 4 и 5 (тетраэдр можно резать только по ребрам)?

Решение. Ответ: да. Например, можно склеить тетраэдр из развертки, показанной на рис.10.5 (меньший катет разделен на три равные части, а гипотенуза в отношении 4 : 1). Нетрудно убедиться, что каждый из трех углов, на которые делится меньший угол треугольника, меньше суммы двух других; следовательно, из такой развертки, действительно, можно склеить тетраэдр.

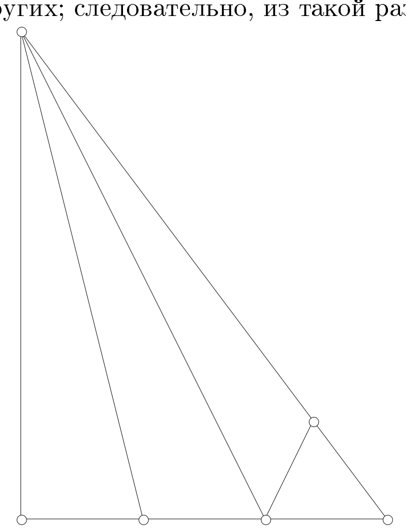

Рис.10.5

10.6. (А.Заславский) На доске был нарисован четырехугольник, в который можно вписать и около которого можно описать окружность. В нем отметили центры этих окружностей и точку пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, после чего сам четырехугольник стерли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

Решение. Построение основано на двух леммах.

1. Диагонали всех четырехугольников, вписанных в данную окружность с центром O и описанных около данной окружности с центром I, пересекаются в одной и той же точке L, лежащей на продолжении отрезка OI за точку I.

2. Центр вписанной в четырехугольник окружности лежит на прямой, соединяющей середины его диагоналей (Теорема Монжа).

Отметим также, что в любом четырехугольнике точка M пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, делит пополам отрезок между серединами диагоналей.

Из леммы 1 следует, что середины диагоналей искомого четырехугольника лежат на окружности с диаметром OL. Отсюда и из леммы 2 получаем, что точка M лежит на окружности, диаметрально противоположными точками которой являются I и середина OL. Поэтому, проведя через M прямую, перпендикулярную IM, и найдя точку ее пересечения с OI, мы получим середину OL, а значит, и саму точку L. Далее, построив окружность с диаметром OL и найдя ее точки пересечения с прямой MI, получим середины диагоналей четырехугольника. Кроме того, рассмотрев четырехугольник, две вершины которого лежат на прямой OI, нетрудно убедиться, что для третьей вершины X XI — биссектриса угла OXL (рис.10.6). Это дает возможность восстановить описанную окружность четырехугольника и найти его вершины, как точки пересечения этой окружности с диагоналями.

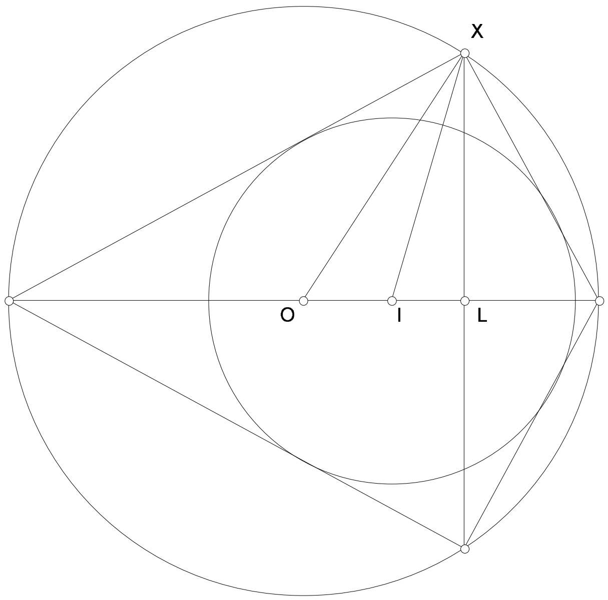

Рис.10.6