Вторая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Заочный тур

1. (В.Смирнов) Две прямые на плоскости, пересекающиеся под углом 46°, являются осями симметрии фигуры F. Какое наименьшее число осей симметрии может иметь эта фигура?

   Решение. Ответ: 90.

   Пусть l_1, l_2 — оси симметрии F. Применив последовательно симметрию относительно l_1, симметрию относительно l_2 и снова симметрию относительно l_1, получим симметрию относительно прямой, симметричной l_2 относительно l_1 (рис.1). Следовательно, осями симметрии F будут все прямые, образующие с l_1 углы $46^\circ, 2 \cdot 46^\circ, \ldots, n \cdot 46^\circ, \ldots$. Так как $46n$ при $n < 90$ не делится на 180, эти прямые для $n = 1, \ldots, 90$ различны, т.е. F имеет по крайней мере 90 осей симметрии. С другой стороны, правильный 90-угольник удовлетворяет условию задачи и имеет ровно 90 осей симметрии.

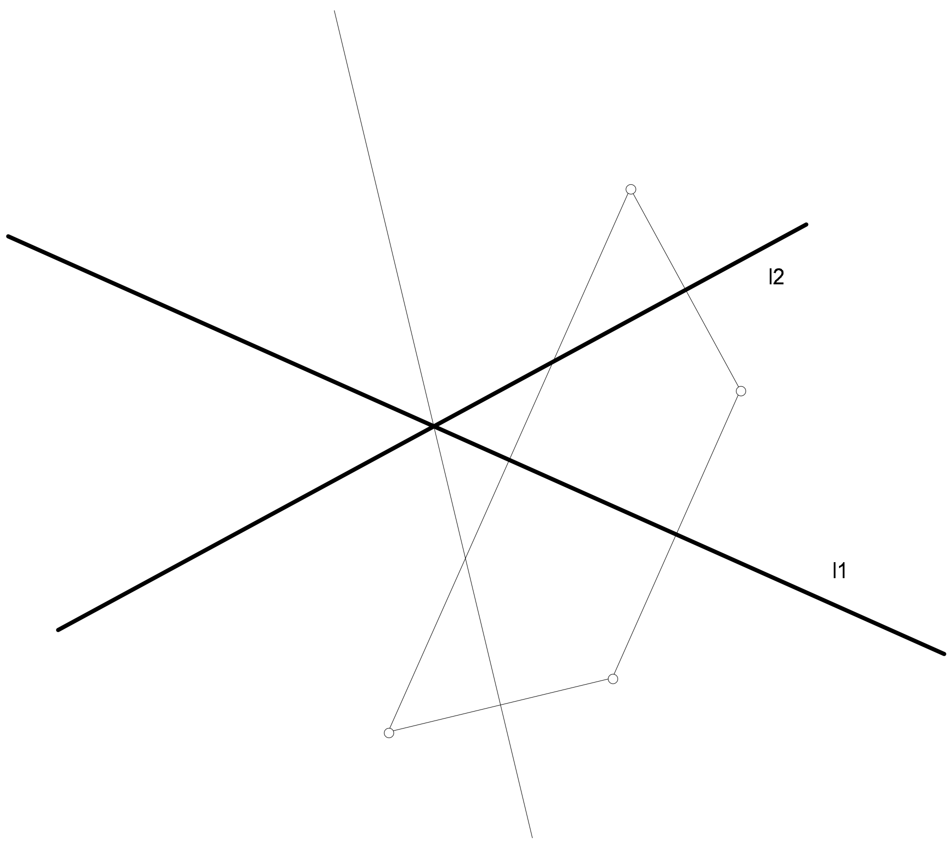

Рис.1

2. (А.Акопян) Точки A, B движутся с равными скоростями по двум равным окружностям. Докажите, что серединные перпендикуляры к AB проходят через фиксированную точку.

   Решение. (Найдено девятиклассником московской гимназии 1543 Никитой Баканчевым) Пусть l — прямая, при симметрии относительно которой окружности переходят друг в друга, A' — точка, симметричная A относительно l. Тогда точки B и A' движутся по одной окружности с противоположными скоростями, и значит, серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ не меняется. Точка его пересечения с l является центром описанной окружности треугольника $AA'B$, следовательно, серединный перпендикуляр к AB все время проходит через эту точку.

3. (Фольклор) На карте указаны отрезки трех прямолинейных дорог, соединяющих три деревни, но сами деревни расположены за пределами карты. Кроме того, на карте не указана пожарная часть, находящаяся на равном расстоянии от трех деревень, хотя место ее расположения

находится в пределах карты. Можно ли найти это место с помощью циркуля и линейки, если проводить построения только в пределах карты?

Решение. Возьмем на карте произвольную точку P. При гомотетии с центром P и достаточно малым коэффициентом k точки пересечения дорог перейдут в некоторые точки A, B, C, лежащие в пределах карты, так что можно найти центр O описанной около треугольника ABC окружности. Гомотетия с центром P и коэффициентом $1/k$ переводит O в искомую точку.

4. (А.Горская, И.Богданов) а) Даны два квадрата $ABCD$ и $DEFG$, причем точка E лежит на отрезке CD, а точки F, G вне квадрата $ABCD$. Найдите угол между прямыми AE и BF.

   б) Даны два правильных пятиугольника $OKLMN$ и $OPRST$, причем точка P лежит на отрезке ON, а точки R, S, T вне пятиугольника $OKLMN$. Найдите угол между прямыми KP и MS.

   Решение. а) Пусть H — вторая точка пересечения описанных около квадратов окружностей (рис.4.1). Т.к $\angle AHD = 45°$, $\angle DHF = 90°$, $\angle EHF = 135°$, точки A, E, H лежат на одной прямой. Аналогично, точки B, H, F лежат на одной прямой. Следовательно, искомый угол равен $\angle BHA = 45°$.

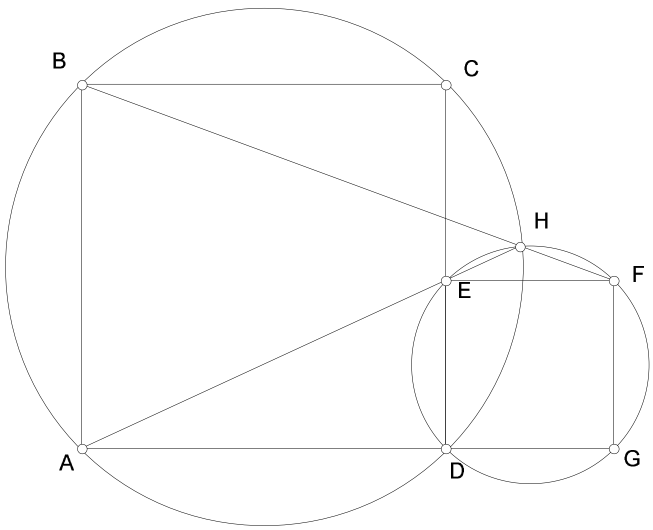

Рис.4.1

б) Ответ: $72°$. Решение аналогично п. а) (рис.4.2).

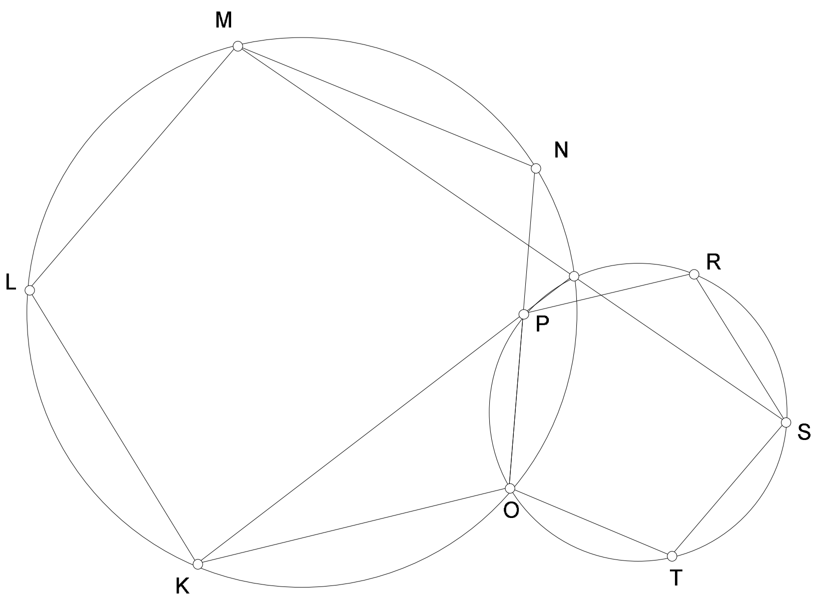

Рис.4.2

5. (А.Тарасов) а) Сложите квадрат 10×10 из прямоугольной полоски 1×118.

   б) Сложите квадрат 10×10 из прямоугольной полоски $1 \times (100 + 9\sqrt{3})$ (примерно 1x115.58).

   В обоих пунктах полоску можно сгибать, но не разрывать.

   Решение. а) Пусть точки A, B расположены на противоположных сторонах полоски на расстоянии 10 от края, C, D на растоянии 12. Согнув полоску по сгибам, показанным на рис.5.1, расположим ее часть, лежащую правее CD рядом с частью, лежащей левее AB. Повторив эту операцию 9 раз и загнув образовавшиеся прямоугольные треугольники, получим искомый квадрат.

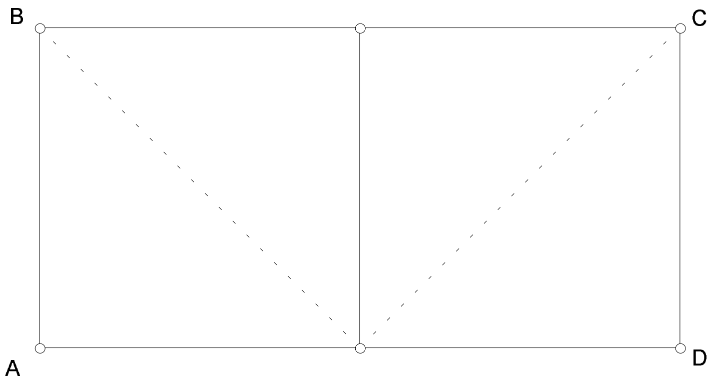

Рис.5.1

   б) Пусть точки A, B расположены на противоположных сторонах полоски на расстоянии 10 от края, C, D на растоянии $10 + \sqrt{3}$. Согнув полоску по сгибам, показанным на рис.5.2, расположим ее часть, лежащую правее CD рядом с частью, лежащей левее AB. Повторив эту операцию 9 раз и загнув образовавшиеся треугольники, получим искомый квадрат.

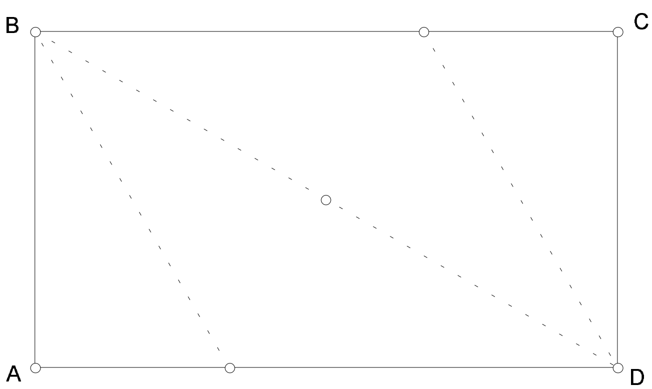

Рис.5.2

6. (А.Афанасьев) а) (8-9) Дан отрезок AB с точкой C внутри него, являющийся хордой окружности радиуса R. Впишите в образовавшийся сегмент окружность, которая проходит через точку C и касается исходной окружности.

   б) (9-10) Дан отрезок AB с точкой C внутри него, являющейся точкой касания окружности радиуса r. Проведите через A и B окружность, касающуюся исходной окружности.

   Решение. Докажем сначала следующий факт.

Лемма. Пусть окружность, вписанная в сегмент, ограниченный дугой и хордой AB, касается дуги в точке C, а хорды в точке D. Тогда CD — биссектриса угла ACB.

Доказательство. Пусть O — центр большой окружности, O' — центр малой, L — середина дуги AB, не содержащей точки C (рис.6). Так как O' лежит на отрезке OC, а $O'D \parallel OL$, равнобедренные треугольники $O'DC$ и OLC подобны. Следовательно, D лежит на отрезке CL и прямая CD делит угол ACB пополам.

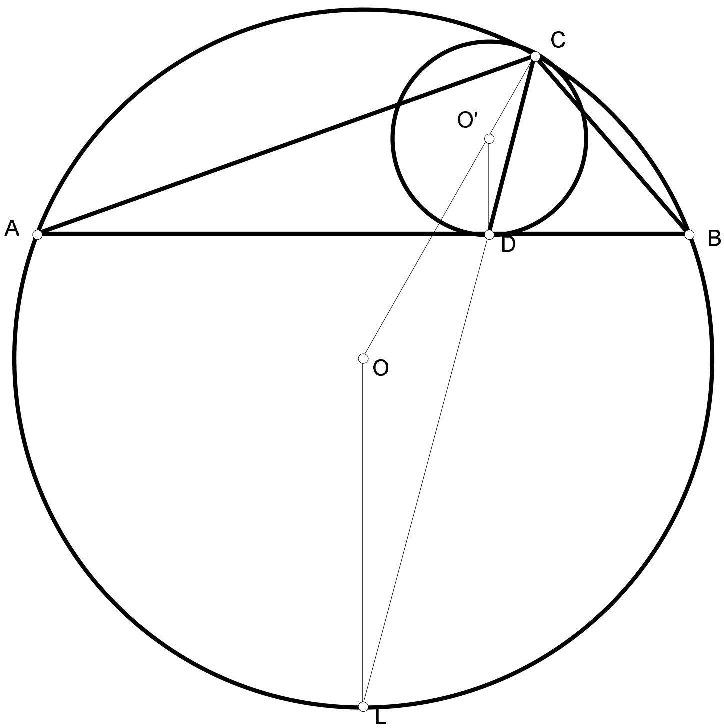

Рис.6

Теперь приведем решение задачи.

а) Пусть искомая окружность касается данной в точке X. Из леммы следует, что $AX/XB = AC/CB$. Множество точек, удовлетворяющих этому условию, — это окружность с центром на прямой AB (она называется *окружностью Аполлония* точек A и B). Возьмем любую из точек пересечения окружности Аполлония с данной, соединим ее с центром данной окружности и найдем точку пересечения этой прямой с перпендикуляром, восставленным из C к AB. Получим центр искомой окружности. Задача имеет два решения, так как окружность можно вписать в любой из двух сегментов, на которые хорда AB делит данный круг.

б) Аналогично п.а) построим окружность Аполлония и найдем отличную от C точку ее пересечения с данной окружностью. Искомая окружность проходит через эту точку и точки A, B. Задача имеет единственное решение.

7. (Д.Калинин) Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E, а вне — точка F, так что треугольники ABE и BCF равны. Найдите углы треугольника ABE, если известно, что отрезок EF равен стороне квадрата, а угол BFD — прямой.

   Решение. Так как угол BFD прямой, точка F лежит на описанной около квадрата окружности, т.е. $\angle BFC = 135^\circ = \angle AEB$ (так как два других угла треугольника AEB, очевидно, острые). Так как $\angle ABE = \angle CBF$[1], $\angle EBF = 90^\circ$ и $BE/EF = \frac{1}{\sqrt{2}} = BE/AB$. Применяя к треугольнику ABE теорему синусов, получаем, что $\sin\angle EAB = BE\sin\angle AEB/AB = 1/2$. Следовательно, $\angle EAB = 30^\circ$, $\angle EBA = 15^\circ$ (рис.7).

[1]нетрудно убедиться, что случай $\angle ABE = \angle BCF$ невозможен.

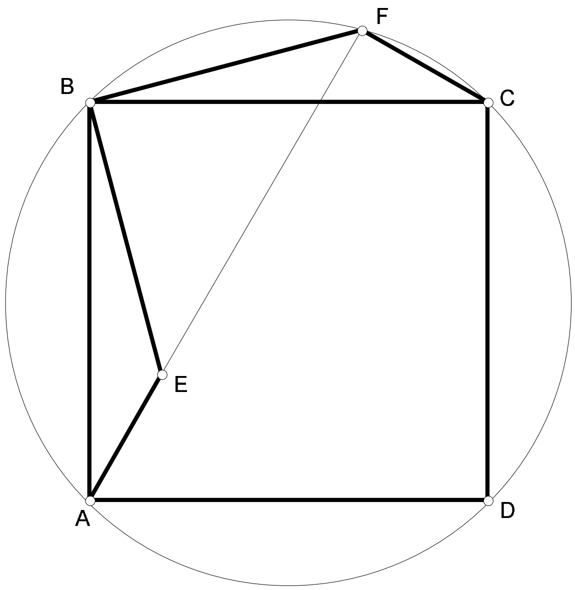

Рис.7

8. (А.Блинков) Отрезок AB делит квадрат на две части, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиусы этих окружностей равны r_1 и r_2, причем $r_1 > r_2$. Найдите длину AB.

   Решение. Если отрезок AB является диагональю квадрата, то он делит квадрат на два равных треугольника, и $r_1 = r_2$, что противоречит условию задачи. Если же одна из частей является четырехугольником, то сумма его стороны AB с противоположной больше суммы двух других сторон (рис.8.1), и вписать в него окружность нельзя. Следовательно, AB делит квадрат на треугольник и пятиугольник (рис.8.2).

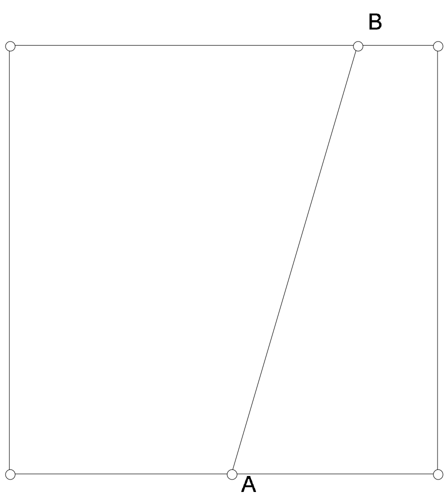

Рис.8.1

Окружности с радиусами r_1, r_2 являются вневписанной и вписанной окружностями прямоугольного треугольника ABC. Значит, $r_1 = (AB + BC + CA)/2$, $r_2 = (BC + CA - AB)/2$, и $AB = r_1 - r_2$.

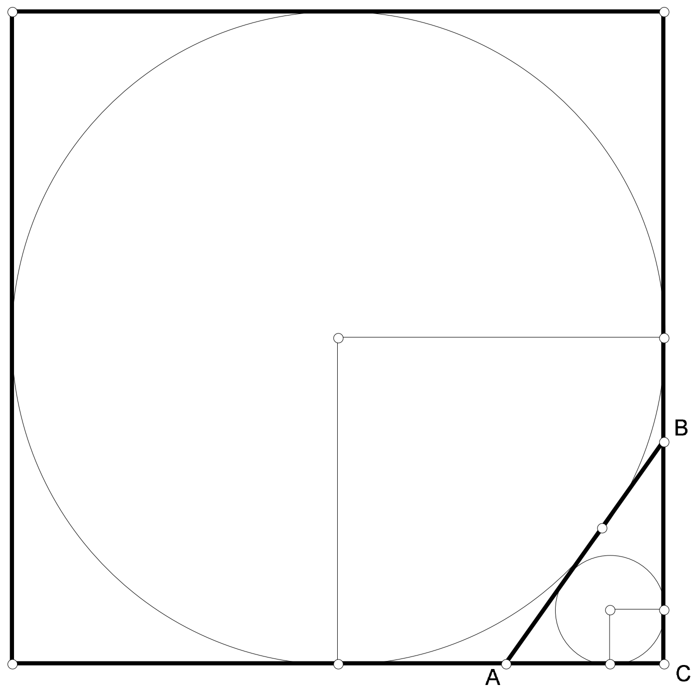

Рис.8.2

9. (А.Канель) Пусть прямая $L(\alpha)$ соединяет точки единичной окружности, отвечающие углам α и $\pi - 2\alpha$. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то прямые $L(\alpha)$, $L(\beta)$ и $L(\gamma)$ пересекаются в одной точке[2].

   Решение. Пусть A, B, C — точки окружности, соответствующие углам α, β, γ. Перпендикуляр из центра окружности к прямой AB пересекает окружность в точке, соответствующей углу $(\alpha + \beta)/2 = \pi - \gamma/2$, а перпендикуляр к прямой $L(\gamma)$ — в точке, соответствующей углу $(\gamma + \pi - 2\gamma)/2 = \pi/2 - \gamma/2$. Следовательно, $L(\gamma)$ — высота треугольника ABC. Аналогично, $L(\alpha)$, $L(\beta)$ — высоты ABC, и значит все три прямые пересекаются в его ортоцентре.

10. (Б.Френкин) При каких n правильный n-угольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на $n - 2$ равнобедренных (и, возможно, равносторонних) треугольников?

    Решение. Ответ: n должно быть суммой двух степеней двойки, может быть равных (в этом случае само n – степень двойки).

    Рассмотрим треугольник разбиения ABC, содержащий центр (рис.10.1). Если сторона AB не является стороной исходного многоугольника, то отрезает от него многоугольник, в котором является наибольшим расстоянием между вершинами. Следовательно, AB должна быть основанием треугольника разбиения, и число отрезаемых ею сторон четно. Для боковых сторон указанного треугольника можно провести аналогичные рассуждения, следовательно, число сторон, которые отрезает AB, есть степень двойки. (Если AB – сторона исходного многоугольника, то она отрезает 2^0 сторон.) Это верно и для сторон BC и AC. Так как в треугольнике ABC хотя бы две стороны равны, то $n = 2^k + 2^k + 2^l = 2^{k+1} + 2^l$.

[2] Условие задачи было опубликовано с опечаткой

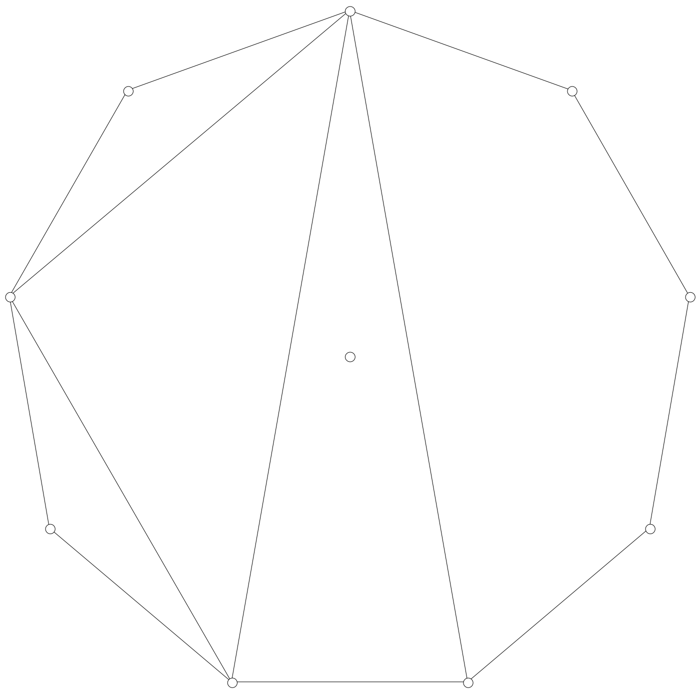

Рис.10.1

Обратно, пусть $n = 2^k + 2^l$, приччм $k > 0$. Пусть A – одна из вершин правильного n-угольника, а вершины B и C отстоят от неч на 2^{k-1} сторон в двух направлениях. Тогда $AB = AC$, и существует разрезание нужного вида, содержащее $\triangle ABC$ (см. рис. 10.2).

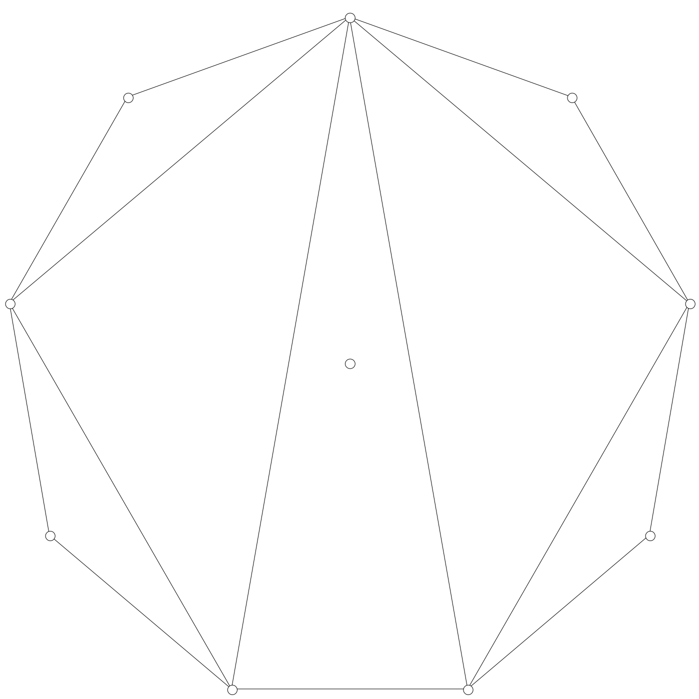

Рис.10.2

11. (А.Заславский) В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности; A', B', C' — точки, симметричные A, B, C относительно противоположных сторон; A_1, B_1, C_1 — точки

пересечения прямых OA' и BC, OB' и AC, OC' и AB. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть O_a, O_b, O_c — точки, симметричные O относительно BC, CA, AB. Очевидно, что прямые CO_c OC' и AB пересекаются в одной точке, так что для решения задачи достаточно доказать, что прямые AO_a, BO_b и CO_c пересекаются в одной точке.

Так как треугольник $O_aO_bO_c$ гомотетичен серединному трегольнику ABC с центром O и коэффициентом 2, он центрально симметричен треугольнику ABC и прямые, соединяющие соответствующие вершины этих треугольников, проходят через центр симметрии. Нетрудно также убедиться, что эта точка является для каждого из треугольников центром окружности 9 точек.

12. (Б.Френкин) В треугольнике ABC биссектриса угла A равна полусумме высоты и медианы, проведħнных из вершины A. Докажите, что если $\angle A$ тупой, то $AB = AC$.

Решение. Предположим, что утверждение задачи неверно. Пусть H, L, M — основания высоты, биссектрисы и медианы, P — середина дуги BC описанной окружности треугольника, не содержащей точки A (рис.12).

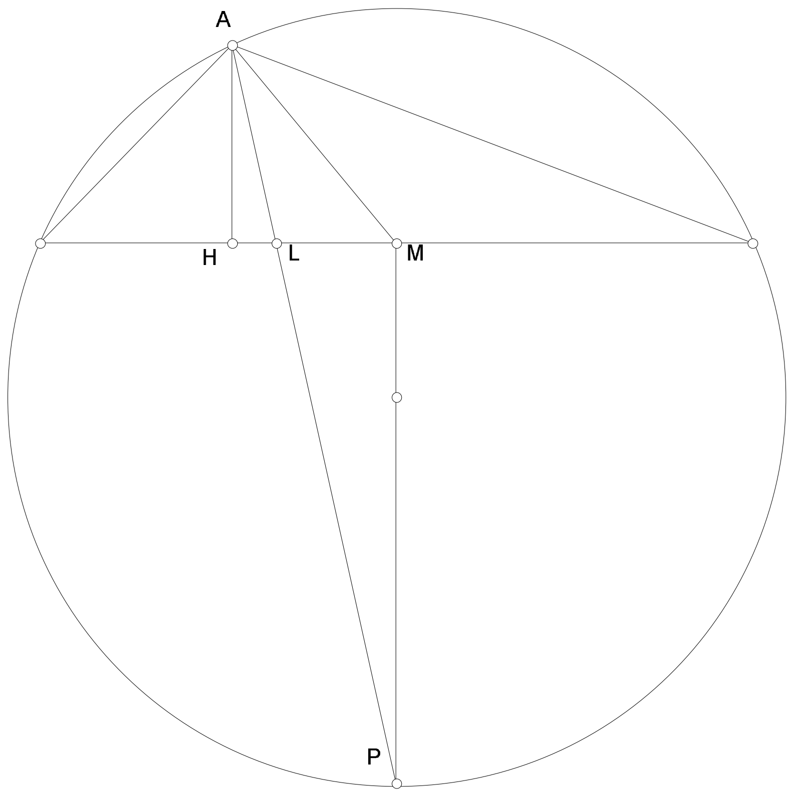

Рис.12

Если угол A тупой, $PM > AH$. Поскольку L лежит на отрезке AP, отсюда следует, что $HL < LM$, и значит, отрезок AL меньше медианы треугольника AHM, которая, в свою очередь, меньше полусуммы сторон AH и AM — противоречие.

13. (А.Акопян) Даны две прямые a и b, а также точки A и B. Точка X скользит по прямой a, а точка Y по прямой b, так что $AX \parallel BY$. Найдите ГМТ пересечения AY с XB.

Решение. Проведем через A прямую, параллельную b и пересекающую a в точке U. Аналогично, проведем через B прямую, параллельную a и пересекающую b в точке V. Для любых удовлетворяющих условию точек X, Y соответствующие стороны треугольников AUX и YUB параллельны. Следовательно, эти треугольники гомотетичны, т.е. прямые AY, BX и UV пересекаются в центре гомотетии. Очевидно, что так можно получить любую точку прямой UV.

14. (А.Заславский) Дана окружность и не лежащая на ней фиксированная точка P. Найдите геометрическое место ортоцентров треугольников ABP, где AB — диаметр окружности.

Решение. Пусть C — ортоцентр; A', B', C' — основания высот ABP, проведенных из A, B, P; P' — проекция C на прямую OP (рис.14). Так как $\angle CC'O = \angle CP'O = 90^\circ$, точки O, C, C', P' лежат на окружности, и $CP \cdot PC' = OP \cdot PP'$. Аналогично, $CP \cdot PC' = BP \cdot PA'$. Но A' лежит на исходной окружности, следовательно, $BP \cdot A'P = |R^2 - OP^2|$. Таким образом, произведение $OP \cdot PP'$, а значит, и точка P' не зависят от выбора диаметра AB, т.е. искомым геометрическим местом будет прямая, проходящая через P' и перпендикулярная OP.

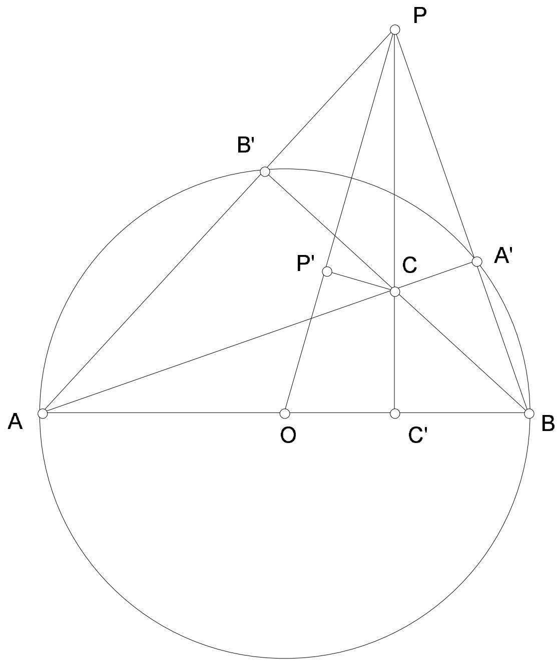

Рис.14

15. (В.Протасов) Около треугольника ABC описана окружность и в него же вписана окружность, которая касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямая B_1C_1 пересекает прямую BC в точке P, а точка M — середина отрезка PA_1. Докажите, что отрезки касательных, проведенных из точки M к вписанной и описанной окружности, равны.

Решение. Пусть $AB < AC$. Так как прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, из теорем Чевы и Менелая получаем, что $PB/PC = A_1B/AC$. Кроме того, $MB = (PB - A_1B)/2$, $MC = (PC + A_1C)/2$, $MA_1 = (PB + A_1B)/2 = (PC - A_1C)/2$. Следовательно, $MB/MA_1 = MA_1/MC = A_1B/A_1C$, что равносильно утверждению задачи.

16. (П.Пушкарь) На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Оказалось, что их вершины образуют правильный треугольник. Верно ли, что исходный треугольник — правильный?

Решение. Ответ: верно. Предположим противное. Тогда один из углов треугольника ABC, например, угол $A > 60^\circ$. Тогда луч $B'C'$ лежит вне угла $AB'C$, а, так как $\angle A'B'C' = \angle AB'C = 60^\circ$, луч $B'A'$ лежит внутри этого угла, и значит, луч $A'B'$ лежит внутри угла $B'AC'$ (рис.16). Аналогично, луч $A'C'$ лежит внутри этого угла, что противоречит равенству $\angle B'A'C' = \angle BA'C = 60^\circ$.

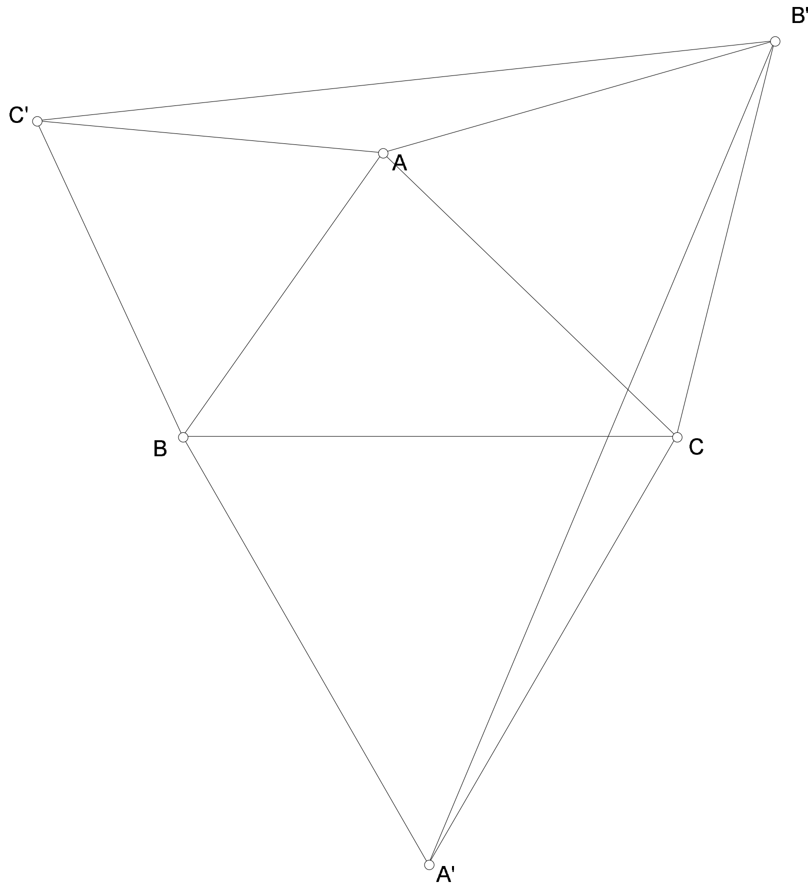

Рис.16

17. (А.Заславский) В двух окружностях, пересекающихся в точках A и B, проведены параллельные хорды A_1B_1 и A_2B_2. Прямые AA_1 и BB_2 пересекаются в точке X, а прямые AA_2 и BB_1 — в точке Y. Докажите, что $XY \parallel A_1B_1$.

    Решение. Утверждение задачи равносильно тому, что точки A, B, X, Y лежат на одной окружности, т.е. $\angle XAY = \angle XBY$. Но $\angle XAY = \angle BAA_2 - \angle BAX = \angle BAA_2 - \angle BB_1A_1$, $\angle XBY = \angle B_2BA - \angle AA_1B_1$. При этом из параллельности A_1B_1 и A_2B_2 следует, что $\angle ABB_1 + \angle A_1B_1B = \angle BAA_2 + \angle B_2A_2A$, откуда, очевидно, и вытекает искомое утверждение.

18. (А.Акопян) Через ортоцентр H треугольника ABC проведены две перпендикулярные прямые, одна из которых пересекает BC в точке X, а другая пересекает AC в точке Y. Прямые AZ, BZ параллельны соответственно прямым HX и HY. Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

    Решение. Рассмотрим для определенности случай, изображенный на рис.18. Пусть U — точка пересечения HX и BZ, V — точка пересечения HY и AZ. Тогда утверждение задачи равносильно равенству $HU/UX = YV/HV$ или $HU/YV = HV/XU$. В прямоугольных треугольниках AYV и BUH углы AYV и BUH равны, так как их стороны перпендикулярны. Следовательно, треугольники подобны и $HU/YV = BU/AV$. Аналогично, $HV/XU = BU/AV$. Другие случаи рассматриваются аналогично.

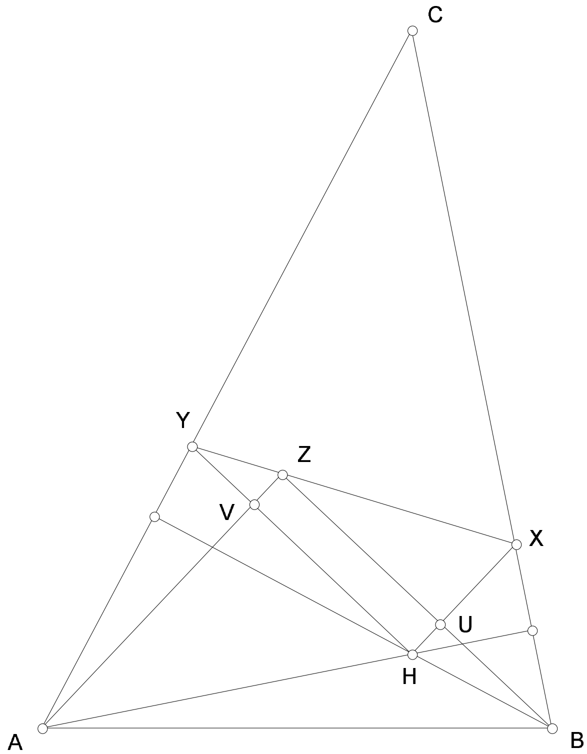

Рис.18

19. (Л.Емельянов) Через середины сторон треугольника T проведены прямые, перпендикулярные биссектрисам противолежащих углов треугольника. Эти прямые образовали треугольник T_1. Докажите, что центр описанной около T_1 окружности находится в середине отрезка, образованного центром вписанной окружности и точкой пересечения высот треугольника T.

    Решение. Стороны треугольника T_1 являются внешними биссектрисами углов треугольника T_0, образованного средними линиями T, и значит, пересекаются в центрах его вневписанных окружностей. При этом биссектрисы внутренних углов T_0 являются высотами T_1, т.е. его центр вписанной окружности I_0 совпадает с ортоцентром T_1, а центр описанной O_0 является центром окружности, проходящей через середины T_1 и, значит, серединой отрезка I_0O_1, где O_1 — центр описанной окружности T_1. Кроме того, O_0 — середина отрезка OH, где O, H — центр описанной окружности и ортоцентр T, а центр тяжести T M делит отрезок HO в отношении $2 : 1$ (рис.19). Гомотетия с центром I_0 и коэффициентом $\frac{1}{3}$ переводит центр I вписанной окружности T в M, а гомотетия с центром O_0 и коэффициентом -3 переводит M в H. Так как композиция этих гомотетий есть центральная симметрия с центром O_1, O_1 — середина IH.

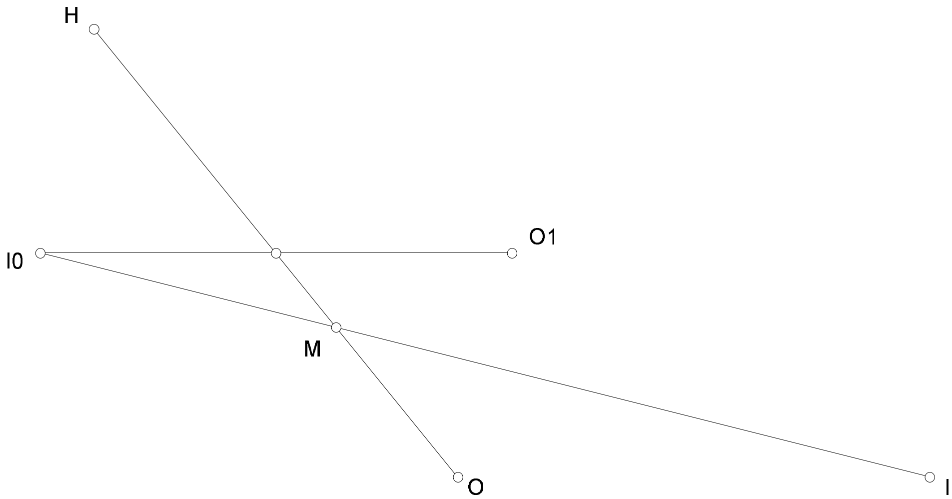

Рис.19

20. (А.Заславский) Даны четыре точки A, B, C, D. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Точки A_2, B_2, C_2, D_2 — ортоцентры треугольников $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ и т.д. Докажите, что все окружности, проходящие через середины сторон таких треугольников, пересекаются в одной точке.

    Решение. Докажем сначала, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников ABC, BCD, CDA и DAB, пересекаются в одной точке. Пусть X — точка пересечения окружностей 9 точек треугольников ACD и BCD, отличная от середины AB, Y, Z, U — середины AC, BC, CD. Тогда $\angle YXZ = \angle YXU + \angle XUZ = \angle DCA + \angle BDC = \angle BCD$, т.е. X лежит на окружности 9 точек треугольника ABC. Аналогично, X лежит и на окружности 9 точек треугольника ABD. Далее, так как окружности 9 точек треугольников DA и ACB_1 совпадают, точка X лежит также на окружностях 9 точек треугольников ABB_1 и CBB_1. Аналогично она лежит на окружностях 9 точек треугольников ABA_1 и BCC_1, а, значит, и на окружностях 9 точек треугольников A_1B_1B, BB_1C_1 и $A_1B_1C_1$, откуда и следует утверждение задачи.

    Более короткое решение можно получить, используя следующий факт.

    Пусть точки U, V, W лежат на равносторонней гиперболе. Тогда ортоцентр треугольника UVW также лежит на этой гиперболе, а его окружность 9 точек проходит через ее центр.

    Действительно, проведя равностороннюю гиперболу через точки A, B, C, D, получим, что все окружности проходят через ее центр.

21. (А.Заславский) На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A', B'. Докажите, что для площадей соответствующих треугольников выполняется неравенство:

    $$S_{ABC}S^2_{A'B'C'} \geq 4S_{AB'C'}S_{BC'A'}S_{CA'B'},$$

    причем равенство достигается тогда и только тогда, когда прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

    Решение. Обозначим $P_1 = AB' \cdot BC' \cdot CA'$, $P_2 = BA' \cdot AC' \cdot CB'$. Нетрудно убедиться, что $S_{A'B'C'} = (P_1 + P_2)/4R$, где R — радиус описанной окружности ABC, и, следовательно

    $$\frac{S_{AB'C'}S_{BC'A'}S_{CA'B'}}{S_{ABC}S^2_{A'B'C'}} = \frac{P_1P_2}{(P_1+P_2)^2} \leq \frac{1}{4},$$

    причем равенство возможно лишь при $P_1 = P_2$, что равносильно пересечению прямых AA', BB' и CC' в одной точке.

22. (А.Заславский) Дана окружность, точки A, B на ней и точка P. Пусть X — произвольная точка окружности, Y — точка пересечения прямых AX и BP. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников PXY.

Решение. Пусть Q — отличная от X точка пересечения окружностей ABX и PXY. Тогда $\angle ABQ = \angle AXQ = \angle YXQ = \angle YPQ = \angle BPQ$. Значит $\angle BQP = \pi - (\angle BPQ + \angle QBP) = \pi - \angle ABP$ не зависит от выбора точки X. Следовательно, все окружности PXY проходят через Q и их центры лежат на серединном перпендикуляре к PQ.

23. (А.Мякишев) Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, G — центр тяжести его как однородной пластины (т.е. точка пересечения двух прямых, каждая из которых соединяет центроиды треугольников, имеющих общую диагональ).

а) (9-10) Пусть около $ABCD$ можно описать окружность с центром в O. Точку H определим аналогично G, взяв вместо центроидов ортоцентры. Докажите, что точки H, G, O лежат на одной прямой и $HG : GO = 2 : 1$.

б) (10-11) Пусть в $ABCD$ можно вписать окружность с центром в I. Точкой Нагеля N описанного четырехугольника назовем точку пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырехугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности относительно середин сторон. (Эти прямые делят периметр четырехугольника пополам). Докажите, что N, G, I лежат на одной прямой, причем $NG : GI = 2 : 1$.

Решение. а) Пусть M_a и H_a — соответственно центроид и ортоцентр треугольника BCD. Центроиды и ортоцентры остальных трех треугольников обозначим аналогично. Все треугольники имеют общую описанную окружность с центром в O. Рассмотрев прямые Эйлера этих треугольников, заметим, что четырехугольник $M_aM_bM_cM_d$ переходит в четырехугольник $H_aH_bH_cH_d$ при гомотетии с центром в O и коэффициентом 3. Соответственно, точки пересечения диагоналей этих четырехугольников переходят друг в друга.

б) Обозначим через M_1 центр тяжести периметра четырехугольника. Точка G лежит на отрезке IM_1 и делит его в отношении $2 : 1$. Действительно, M_1 — это центр тяжести четырех точек, помещенных в середины сторон четырехугольника с массами, пропорциональными их длинам, а G — центр тяжести четырех точек, помещенных в центрах тяжести треугольников IAB, IBC, ICD, IDA с массами, пропорциональными площадям этих треугольников. Очевидно, две этих системы точек гомотетичны с центром I и коэффициентом $\frac{2}{3}$.

Пусть a, b, c, d — длины касательных к вписанной окружности из вершин A, B, C, D. Очевидно, что, если поместить в A, B, C, D массы a, b, c, d, то центром тяжести полученной системы будет точка N, а, если поместить в вершины массы $2a+b+d$, $2b+a+c$, $2c+b+d$, $2d+c+a$, то — точка M_1. Осталось показать, что I — центр тяжести масс $b+d$, $a+c$, $b+d$, $a+c$.

Точка I удовлетворяет соотношению $S_{IAB} - S_{IBC} + S_{ICD} - S_{IDA} = 0$. Этому же соотношению удовлетворяют середины U и V диагоналей четырехугольника. Следовательно, эти три точки лежат на одной прямой (это утверждение называется *теоремой Монжа*). Пусть теперь X, Y — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AD. Тогда прямая XY образует равные углы с этими сторонами и по теореме Брианшона проходит через точку L пересечения диагоналей. Применив теорему синусов к треугольникам LXB и LYD, получим, что $BL/DL = b/d$. Аналогично, $AL/CL = a/c$. Отсюда и из соотношений $S_{UBC}/S_{UAD} = BL/DL$, $S_{VBC}/S_{VAD} = CL/AL$, $S_{IBC}/S_{IAD} = (b+c)/(a+d)$ вытекает, что I делит отрезок AC в отношении $(a+c)/(b+d)$, что и требуется.

24. (Фольклор) а) Через фиксированную точку P внутри данной окружности проводятся два перпендикулярных луча, пересекающие окружность в точках A и B. Найдите геометрическое место проекций P на прямые AB.

б) Через фиксированную точку P внутри данной сферы проводятся три попарно перпендикулярных луча, пересекающие сферу в точках A, B, C. Найдите геометрическое место проекций точки P на плоскости ABC.

Решение. а) Пусть P_1 — точка, симметричная P относительно прямой AB, P_2 — точка, симметричная P относительно середины отрезка AB. Тогда треугольники ABP_1 и ABP_2 симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB, следовательно, $OP_1 = OP_2$. Так как $APBP_2$ — прямоугольник, $OA^2 + OB^2 = OP^2 + OP_2^2$, т.е. расстояние OP_2 не зависит от выбора лучей PA, PB. Следовательно, точки P_1, P_2 лежат на окружности с центром O, а проекция P на AB на окружности вдвое меньшего радиуса с центром в середине отрезка OP.

б) Достроим пирамиду $PABC$ до прямоугольного параллелепипеда $PAC'BCB'P'A'$. Аналогично п.а) получаем, что $OP'^2 = 3R^2 - 2OP^2$, т.е. точка P' лежит на сфере с центром O. Так как центр тяжести M треугольника ABC лежит на отрезке PP' и делит его в отношении $1 : 2$, M лежит на сфере, центром которой является точка, лежащая на отрезке OP и делящая его в отношении $2 : 1$. Далее, проекцией O на плоскость ABC является центр O' описанной около треугольника ABC окружности, а проекцией P — его ортоцентр H. Так как M лежит на отрезке $O'H$ и $MH = 2MO'$, $MK = KH$, т.е. искомым ГМТ будет сфера с центром K и радиусом равным $\sqrt{3R^2 - 2OP^2}/3$.

25. (А.Заславский) В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах BC, CD и DA равны α, а при остальных ребрах — β. Найдите отношение AB/CD.

Решение. Из условия следует равенство трехгранных углов в вершинах A и B, C и D. Следовательно, $\angle CBD = \angle CBA = \angle DAC = \angle DAB$, $\angle ADB = \angle CDB = \angle DCA = \angle BCA$, и все грани тетраэдра подобны. При этом $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BAD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Значит, $\frac{AB}{CD} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^3$.

26. (Д.Терешин) Даны четыре конуса с общей вершиной и образующей одинаковой длины (но, возможно, с разными радиусами оснований). Каждый из них касается двух других. Докажите, что четыре точки касания окружностей оснований конусов лежат на одной окружности.

Решение. Окружности оснований конусов лежат на сфере с центром в вершине конусов и радиусом, равным их образующей. Инверсия с центром в любой точке этой сферы переводит ее в плоскость, а окружности в окружности на этой плоскости, каждая из которых касается двух других. Из теоремы об угле между касательной и хордой сразу следует, что четыре точки касания лежат на одной окружности, которой соответствует окружность на сфере.