III олимпиада по геометрии памяти И.Ф.Шарыгина, 2007 год.
Заочный тур

1. (Б.Френкин) Треугольник разрезан на несколько (не менее двух) треугольников. Один из них равнобедренный (не равносторонний), а остальные — равносторонние. Найдите углы исходного треугольника.

   Ответ. $30°$, $60°$, $90°$.

   Решение. Среди вершин неравностороннего треугольника, по крайней мере, одна не является вершиной исходного треугольника. Сумма углов треугольников разбиения, сходящихся в этой вершине, равна $180°$ или $360°$. Следовательно, угол треугольника кратен $60°$, и так как треугольник не равносторонний, этот угол равен $120°$. Тогда два других угла этого треугольника равны $30°$ и соответствующие вершины находятся в вершинах исходного треугольника. Углы треугольника в этих вершинах могут равняться только $30°$, $90°$ или $150°$, при этом хотя бы один из двух углов не равен $30°$, а их сумма меньше $180°$. Единственный возможный вариант — $30°$ и $90°$. Такой треугольник требуемым образом разрезать можно, например, проведя медиану из прямого угла (рис.1).

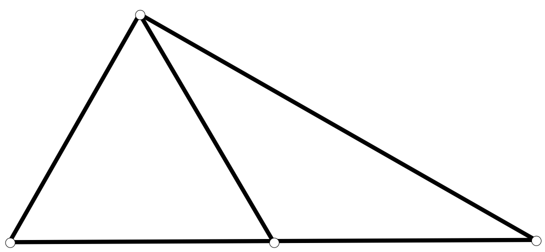

Рис.1

2. (А.Блинков) Каждая диагональ четырехугольника разбивает его на два равнобедренных треугольника. Верно ли, что четырехугольник — ромб?

   Решение. Неверно. Например, пусть ABC — равнобедренный треугольник, в котором угол B тупой и не равен $120°$, D — центр окружности, описанной около ABC. Тогда четырехугольник $ABCD$ удовлетворяет условиям задачи и не является ромбом.

3. (Б.Френкин) Отрезки, соединяющие внутреннюю точку выпуклого неравностороннего n-угольника с его вершинами, делят n-угольник на n равных треугольников. При каком наименьшем n это возможно?

   Ответ. $n = 5$.

   Решение. Докажем, что при $n = 3, 4$ указанная ситуация невозможна. При $n = 3$ углы треугольников разбиения, сходящиеся во внутренней точке, равны, так как сумма любых двух разных углов меньше $180°$. Но тогда равны и противолежащие им стороны, являющиеся сторонами многоугольника.

   Можно рассуждать и по-другому. Так как треугольники, на которые разрезается данный треугольник равны, то равны радиусы описанных около них окружностей и площади. Из первого условия следует, что точка, определяющая разрезание, является ортоцентром треугольника, а из второго, что она является его центром тяжести. Но ортоцентр и центр тяжести совпадают только в правильном треугольнике.

   Пусть четырехугольник $ABCD$ разрезан на равные треугольники отрезками из точки O. Тогда $\angle OAB = \angle OCB$, как углы, противоположные одной и той же стороне равных треугольников. Аналогично $\angle OAD = \angle OCD$, $\angle OBC = \angle ODC$, $\angle OBA = \angle ODA$. Следовательно, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, и $ABCD$ — параллелограмм. Так как отрезки из O делят его на равновеликие треугольники, O — точка пересечения его диагоналей, а тогда из равенства треугольников следует, что $ABCD$ — ромб.

   При $n = 5$ указанная ситуация возможна (рис.2).

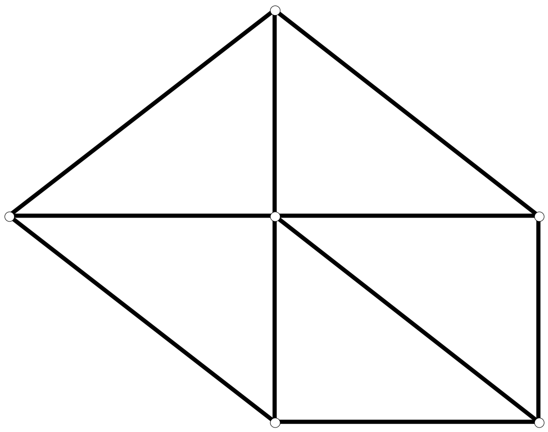

Рис.2

4. (А.Блинков) Существует ли такой параллелограмм, что все точки попарных пересечений биссектрис его углов лежат вне параллелограмма?

   Решение. Нет. Так как точки пересечения биссектрис являются центрами окружностей, касающихся трех сторон параллелограмма, центры меньших из этих окружностей всегда лежат внутри параллелограмма.

5. (Д.Шноль) Невыпуклый n-угольник разрезали прямолинейным разрезом на три части, после чего из двух частей сложили многоугольник, равный третьей части. Может ли n равняться

   а) пяти?

   б) четырем?

   Ответ. а) да (рис.3).

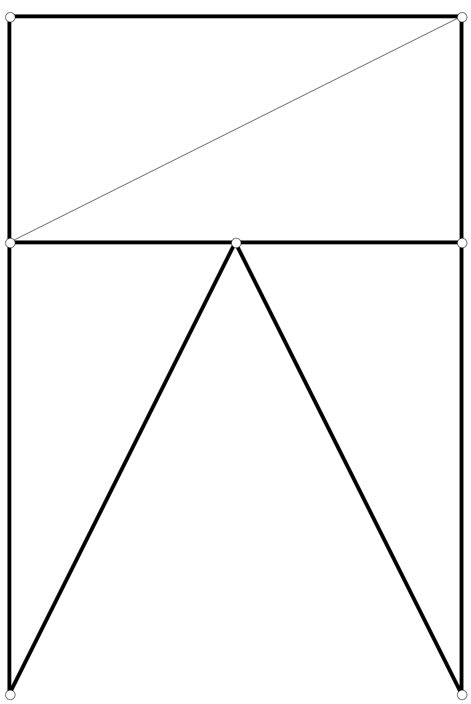

Рис.3

б) да (рис.4).

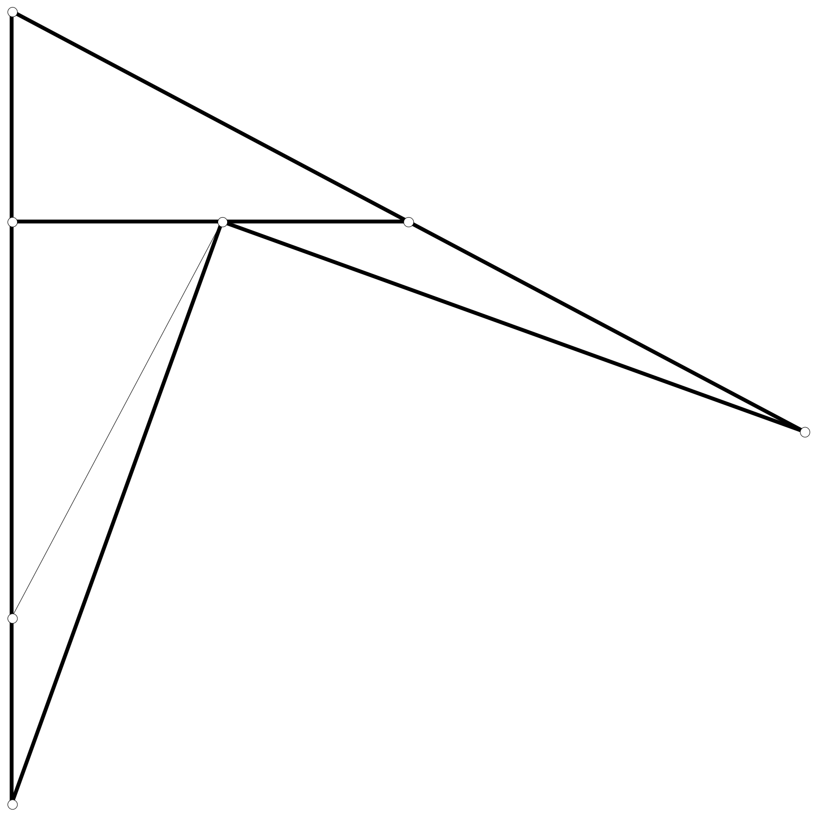

Рис.4

6. (Б.Френкин) а) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многоугольник, т.е. многоугольник, стороны которого лежат на линиях листа бумаги в клетку? (укажите все возможные значения)

   б) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многогранник, т.е. многогранник, составленный из одинаковых кубиков, примыкающих друг к другу гранями?

   Ответ. а) 0, 1, 2 или 4. б) 0, 1, 3, 5 или 9.

   Решение. а) Все оси симметрии ограниченной фигуры имеют общую точку, так как композиция симметрий относительно двух параллельных прямых и двукратная композиция симметрий относительно трех не проходящих через одну точку прямых являются переносами. Кроме того, ось симметрии клетчатого многоугольника параллельна стороне или диагонали клетки, так что осей симметрии не больше 4. При этом, если три из таких прямых являются осями симметрии многоугольника, то их композиция является симметрией относительно четвертой прямой. Примеры многоугольников, имеющих 0, 1, 2 и 4 оси симметрии, приведены на рис.5.

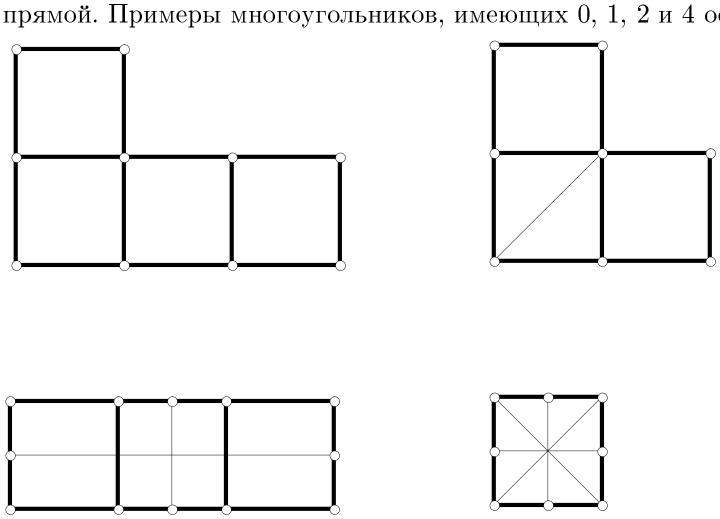

Рис.5

б) Аналогично п.а) получаем, что все оси симметрии проходят через одну точку и параллельны либо ребрам составляющих многогранник кубиков, либо диагоналям его граней. Следовательно, осей симметрии не более 9. Пусть прямые l, l_1 являются осями симметрии. Если угол между ними не прямой, то прямая l_2, симметричная l_1 относительно l, тоже будет осью симметрии. Если же $l \perp l_1$, то осью симметрии будет также прямая, перпендикулярная им обеим. Поэтому все оси симметрии, кроме l, можно разбить на пары, т.е их общее количество нечетно. Нетрудно убедиться, что возможными являются все нечетные значения, кроме 7.

7. (Б.Френкин) Выпуклый многоугольник описан около окружности. Точки касания его сторон с окружностью образуют многоугольник с таким же набором углов (порядок углов может быть другим). Верно ли, что многоугольник правильный?

   Ответ. Да.

   Решение. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — данный многоугольник, B_1, B_2,…,B_n — точки касания вписанной окружности со сторонами A_1A_2, A_2A_3,…,A_nA_1. Обзначим значения углов первого могоугольника через $a_1,\dots,a_n$, а второго — через $b_1,\dots,b_n$. Тогда $b_i = (a_i + a_{i+1})/2$. Перемножая n таких равенств, получаем $2^n a_1a_2\cdots a_n = (a_1 + a_2)\cdots(a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1)$. Но по неравенству о средних $a_i + a_{i+1} \geq 2\sqrt{a_ia_{i+1}}$. Поэтому из полученного равенства следует, что все углы многоугольников равны, а так как многоугольник $B_1\dots B_n$ — вписанный, то многоугольники правильные.

8. (А.Заславский) Три окружности проходят через точку P, а вторые точки их пересечения A, B, C лежат на одной прямой. A_1, B_1, C_1 — вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с соответствующими окружностями. C_2 — точка пересечения прямых AB_1 и BA_1. A_2, B_2 определяются аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

   Решение. Так как четырехугольники PAB_1C и $PBAC_1$ вписанные, $\angle CAC_2 = \angle CAB_1 = \angle CPB_1 = \angle BAC_1$ (рис.6). Аналогично $\angle ABC_2 = \angle ABC_1$, т.е точки C_1, C_2 симметричны относительно прямой AB. Повторив это рассуждение для двух других пар точек, получим, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно этой прямой и, следовательно, равны.

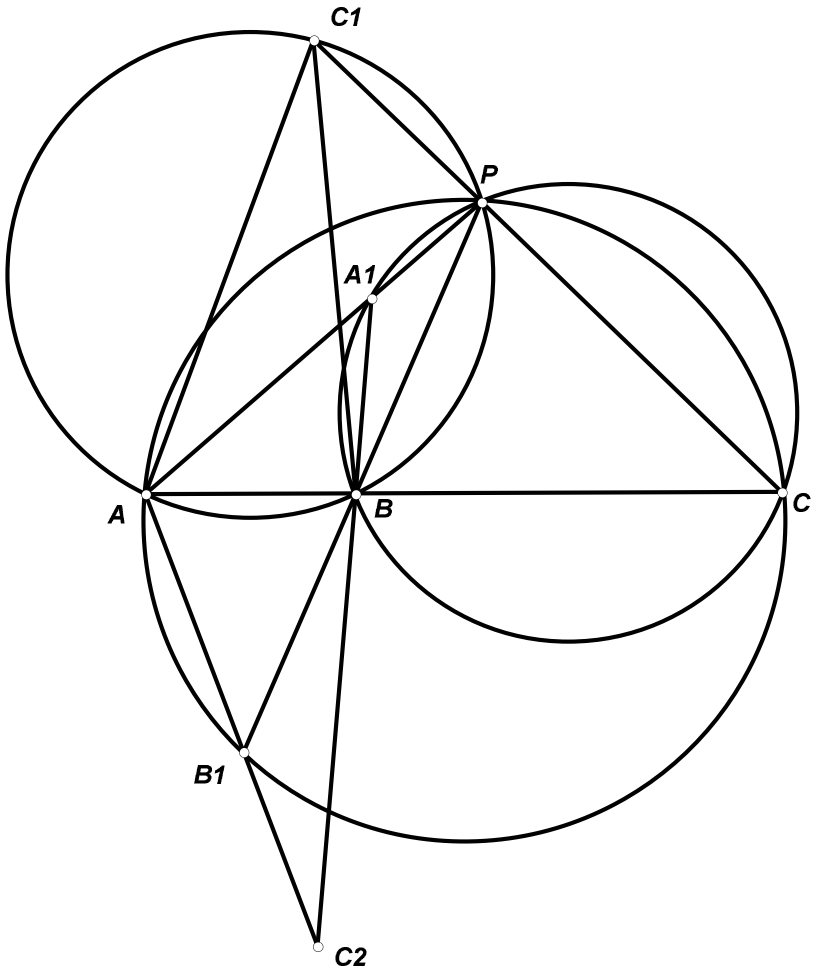

Рис.6

9. (А.Заславский) Два выпуклых четырехугольника таковы, что стороны каждого лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого. Найдите их углы.

   Решение. Пусть сторона $C'D'$ четырехугольника $A'B'C'D'$ лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB четырехугольника $ABCD$, а сторона $D'A'$ на серединном перпендикуляре к BC. Тогда D' — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Аналогично A', B', C' — центры описанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB. Следовательно, $B'D'$ — серединный перпендикуляр к AC. В свою очередь AC является серединным перпендикуляром к одной из диагоналей $A'B'C'D'$, а так как $AC \perp B'D'$ и $B'D' \not\parallel A'C'$, AC — серединный перпендикуляр к $B'D'$, т.е. $AB'CD'$ — ромб. Композиция симметрий относительно прямых $C'D'$, $D'A'$, $A'B'$ и $B'C'$ оставляет точку A на месте и, значит, является поворотом с центром A. С другой стороны, она является композицией поворотов с центром D' на удвоенный угол $C'D'A'$ и с центром B' на удвоенный угол $A'B'C'$, следовательно $\angle C'B'A' = \angle AB'D' = \angle B'D'A = \angle A'B'C'$. Аналогично $\angle B'C'D' = \angle D'A'B'$, т.е. $A'B'C'D'$ — параллелограмм. Так как стороны $ABCD$ перпендикулярны сторонам $A'B'C'D'$, $ABCD$ — параллелограмм с такими же углами.

   Так как C — центр описанной окружности треугольника $B'C'D'$, $\angle D'CB' = 2\angle C'D'A' = \angle B'D'C + \angle CB'D' = 90^\circ$. Соответственно, острые углы параллелограммов $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны 45°. Нетрудно видеть, что два таких параллелограмма, получающихся друг из друга поворотом на 90° вокруг общего центра удовлетворяют условию задачи (рис.7).

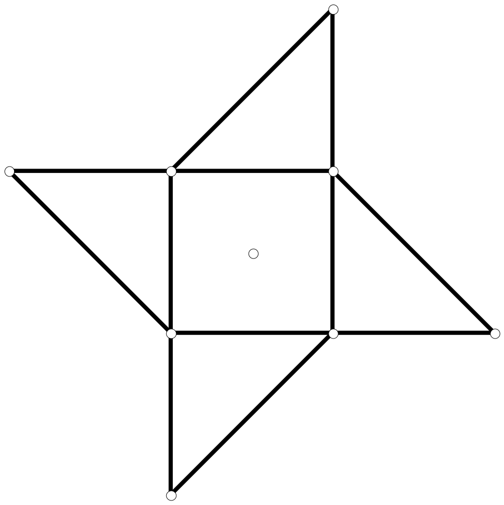

Рис.7

10. (А.Заславский) Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через 3 заданные точки A, B, C (т.е. на каждой стороне или ее продолжении лежит ровно одна из заданных точек).

    Решение.Пусть A, B, C — данные точки. Построим на сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону дуги, вмещающие угол 60° и найдем середины A', B', C' дополнительных дуг. Прямые, соединяющие центр треугольника с его вершинами, проходят через A', B', C', а поскольку вершины двигаются по построенным окружностям с равными угловыми скоростями, углы, под которыми из центра видны отрезки $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ остаются постоянными. Следовательно, искомое ГМТ — окружность $A'B'C'$ (рис.8).

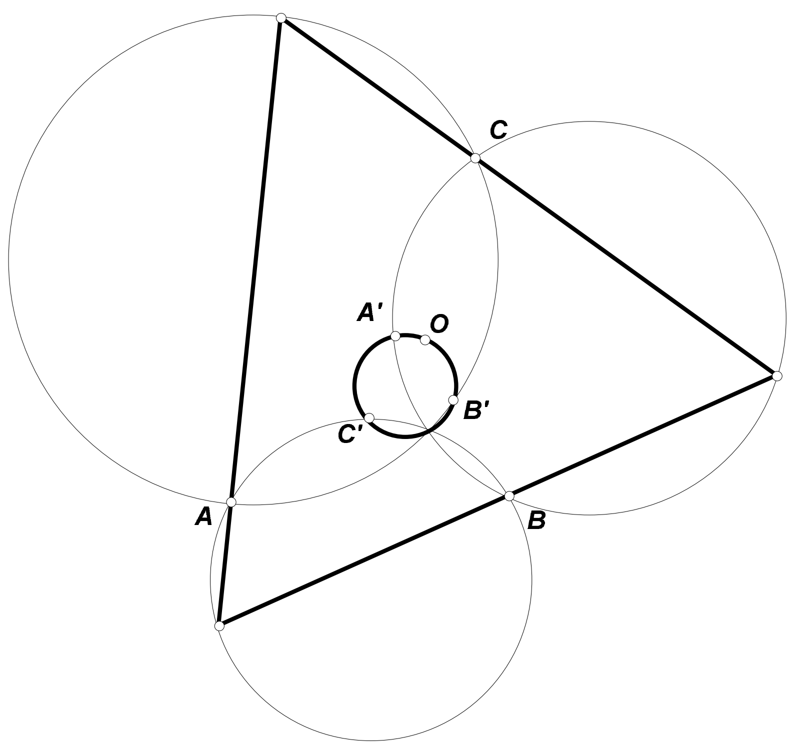

Рис.8

11. (Д.Шноль) Мальчик с папой стоят на берегу моря. Если мальчик встанет на цыпочки, его глаза будут на высоте 1 м от поверхности моря, а если сядет папе на плечи, то на высоте 2 м.

Во сколько раз дальше он будет видеть во втором случае. (Найдите ответ с точностью до 0.1, радиус Земли считайте равным 6000 км)

Решение. Из точки, находящейся на высоте h над уровнем моря видно на расстояние $d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$, где R — радиус Земли (рис.9). Если $h << R$, то с достаточно большой точностью $d = \sqrt{2Rh}$. Поэтому искомое отношение можно считать равным $\sqrt{2}$ или $1,4$.

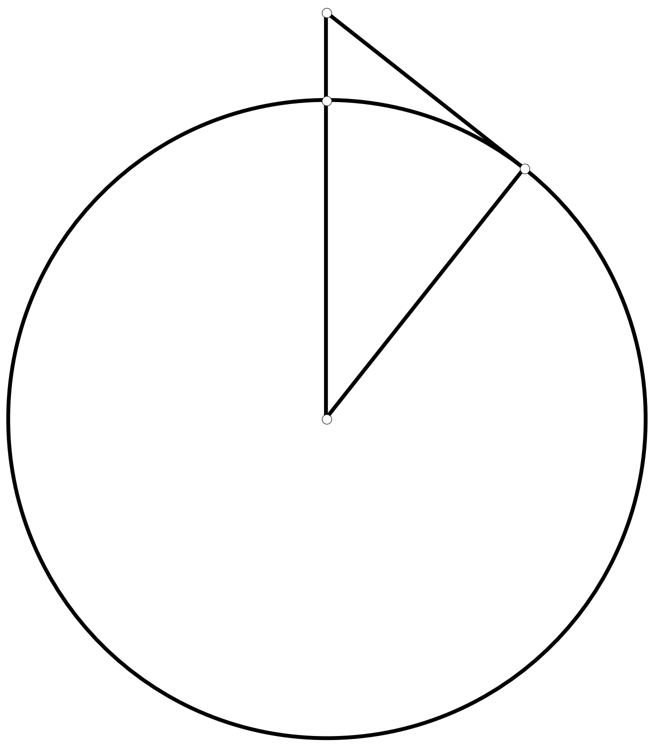

Рис.9

12. (А.Заславский) Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

Первое решение. Пусть U, V — проекции A и B на PC и PD, соответственно. Тогда U и V лежат на описанной окружности $ABCD$, и, применив к ломаной $AUCBVD$ теорему Паскаля, получим утверждение задачи (рис.10).

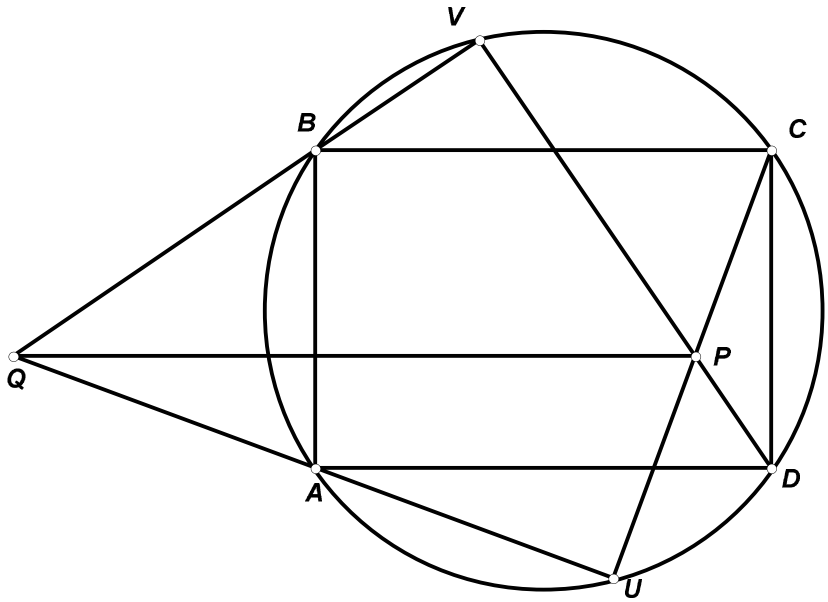

Рис.10

Второе решение. Так как $ABCD$ — прямоугольник, скалярные произведения (PA, PC) и (PB, PD) равны. Но $(PA, PC) = (PC, PA) + (PC, AQ) = (PC, PQ)$. Аналогично, $(PB, PD) = (PD, PQ)$. Следовательно, $(PQ, CD) = 0$.

Третье решение. Пусть Q' образ Q при переносе на вектор BC. Тогда $CQ' \parallel BQ \perp DP$, $DQ' \perp CP$. Следовательно, P — ортоцентр треугольника CDQ', и $PQ' \perp CD$.

13. (А.Заславский) На стороне AB треугольника ABC взяты точки X, Y, такие что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V. Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку.

Решение. Пусть Z — точка пересечения AB и UV. Применяя теорему синусов к треугольникам ZAU и ZBV, получаем (рис.11)

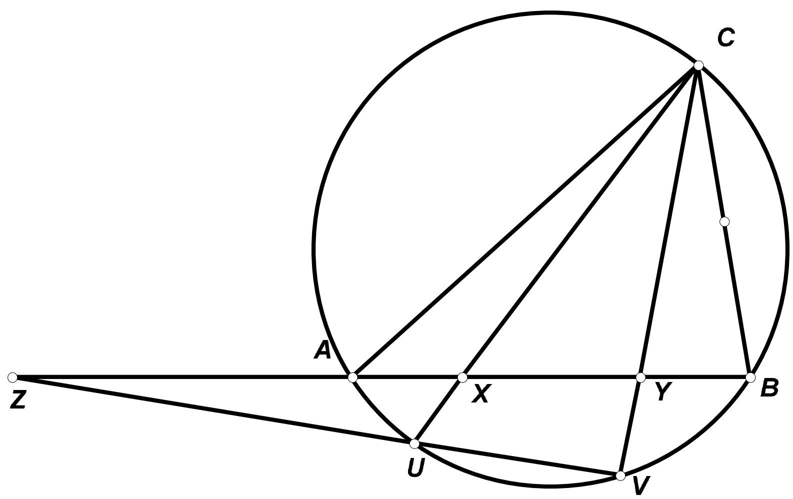

Рис.11

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{AU \sin \angle AUZ}{BV \sin \angle BVZ} = \frac{AU \sin \angle ACY}{BV \sin \angle BCX} = \frac{\sin \angle ACX \sin \angle ACY}{\sin \angle BCX \sin \angle BCY}.$$

Из треугольника ACX $\sin \angle ACX = \frac{AX}{AC} \sin \angle AXC$. Из этого и трех аналогичных соотношений получаем, что $\frac{ZA}{ZB} = \frac{BC^2}{AC^2}$, т.е. не зависит от выбора точек X, Y.

14. (А.Заславский) В трапеции с основаниями AD и BC P и Q — середины диагоналей AC и BD, соответственно. Докажите, что, если $\angle DAQ = \angle CAB$, то $\angle PBA = \angle DBC$.

Первое решение. Пусть L — точка пересечения диагоналей трапеции. Применяя теорему синусов к треугольникам AQD, AQB, ALD, ALB, получим, что $BL/DL = (AB/AD)^2$. Следовательно, $BC/AB = AB/AD$ и $CL/AL = (BC/AB)^2$, что равносильно утверждению задачи.

Второе решение. Пусть L и M — середины соответственно AB и AD. Тогда, так как $PL \parallel AD$, $QM \parallel AB$, $\angle AQM = \angle QAB = \angle CAD = \angle APL$, и значит треугольники APL и AMQ подобны (рис.12). Следовательно, $AP/AQ = AL/AM = AB/AD$. Поэтому треугольники ABP и ADQ подобны, т.е. $\angle ABP = \angle ADQ = \angle CBQ$.

15. (М.Волчкевич) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB' и CC'. Пусть $A'B' \cap CC' = P$ и $A'C' \cap BB' = Q$. Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$.

Решение. Применяя теорему синусов к треугольникам $AC'Q$ и $AA'Q$, получаем (рис.13)

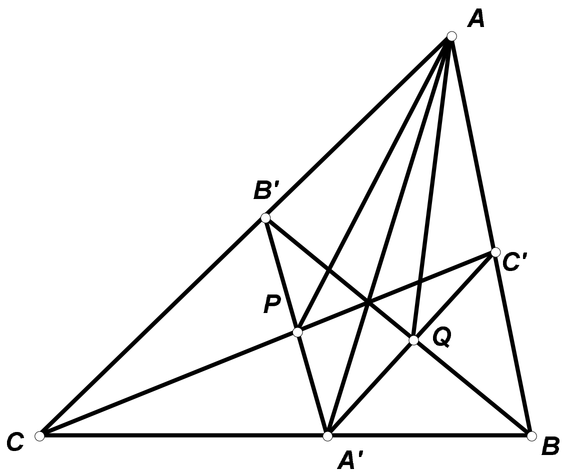

Рис.13

$$\frac{\sin \angle C'AQ}{\sin \angle A'AQ} = \frac{C'Q}{A'Q}\frac{AA'}{AC'} = \frac{BA'}{BC'}\frac{AA'}{AC'}.$$

Аналогично
$$\frac{\sin \angle B'AP}{\sin \angle A'AP} = \frac{CA'}{CB'}\frac{AA'}{AB'}.$$

По теореме Чевы эти отношения равны, что равносильно утверждению задачи.

16. (В.Протасов) На сторонах угла взяты точки A, B. Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1, другая — в точках A_2, B_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q. Докажите, что M — середина PQ.

Решение. Пусть C — вершина данного угла. Рассматривая центральные проекции прямой AB на прямую AC из точек B_1, B_2, получаем равенство двойных отношений (рис.14)

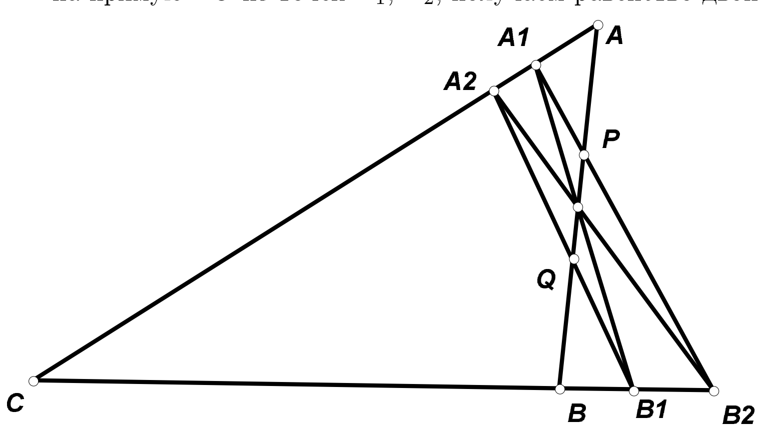

Рис.14

$$(AP; MB) = (AA_1; A_2C) = (CA_2; A_1A) = (BQ; MA),$$

что равносильно утверждению задачи.

17. (Л.Емельянов) Какие треугольники можно разрезать на три треугольника с равными радиусами описанных окружностей?

Ответ. Все, кроме равнобедренных неостроугольных.

Решение. Если треугольник ABC остроугольный, то радиусы описанных окружностей треугольников ABH, BCH и CAH, где H — ортоцентр, равны.

Пусть $\angle C \geq 90^\circ$ и $AC > BC$. Возьмем на стороне AC такую точку D, что $AD = BD$, а на стороне AB такую точку E, что $\angle AED = \angle C$ (это возможно, т.к. $\angle A + \angle C < 180^\circ$). По теореме синусов радиусы описанных окружностей треугольников ADE, BDE и BDC равны (рис.15).

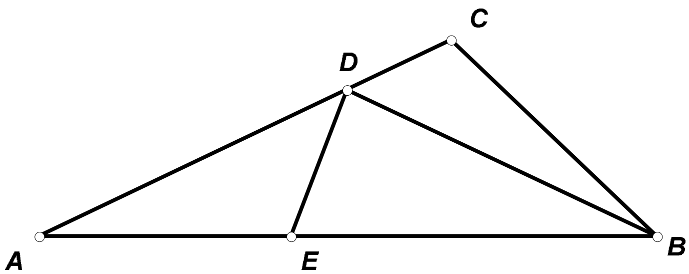

Рис.15

Пусть $\angle C \geq 90^\circ$ и $AC = BC$. Покажем, что треугольник ABC нельзя разрезать требуемым образом. Если разрезание осуществляется из внутренней точки, то радиусы получившихся треугольников могут быть равны только, если точка является ортоцентром, что невозможно. Если же треугольник разрезается чевианой на два, а затем один из этих двух еще раз на два, то треугольник, который разрезается второй чевианой, должен быть равнобедренным, следовательно первый разрез нужно производить отрезком CD, где $AD = AC$. Но тогда при любом разрезании треугольника ACD из вершины A радиусы окружностей, описанных около полученных треугольников будут меньше радиуса описанной окружности треугольника BCD (рис.16).

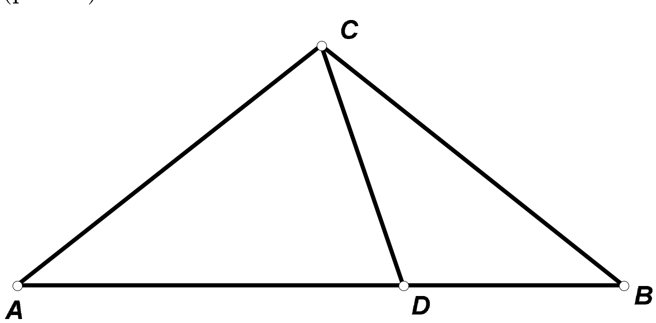

Рис.16

18. (Б.Френкин) Найдите геометрическое место вершин треугольников с заданными ортоцентром и центром описанной окружности.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — ортоцентр, C_0 — середина стороны AB. Тогда $\vec{C}H = 2\vec{O}C_0$, и так как C_0 лежит внутри описанной окружности $CH < 2OC$. Точки, удовлетворяющие этому условию, лежат вне окружности, диаметрально противоположными точками которой являются точка M, делящая отрезок OH в отношении $1:2$ (центр тяжести треугольника), и точка M', симметричная H относительно O. Для таких точек C искомый треугольник строится следующим образом: построим точку C_0, как образ C при гомотетии с центром M и коэффициентом $-1/2$, проведем через нее прямую, перпендикулярную CH и найдем точки A, B пересечения этой прямой и окружности с центром O и радиусом OC. Однако, это построение может привести к вырожденному треугольнику, у которого точки A, B, C лежат на одной прямой. Это происходит когда $\angle OC_0C = \angle MCH = 90°$, т.е. точка C лежит на окружности с диаметром MH. Исключением является сама точка H, для которой искомый треугольник существует — это может быть любой прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является диаметр окружности с центром O и радиусом OH. Таким образом, искомое ГМТ — это внешность окружности с диаметром MM', исключая окружность с диаметром MH, но включая точку H (рис.17).

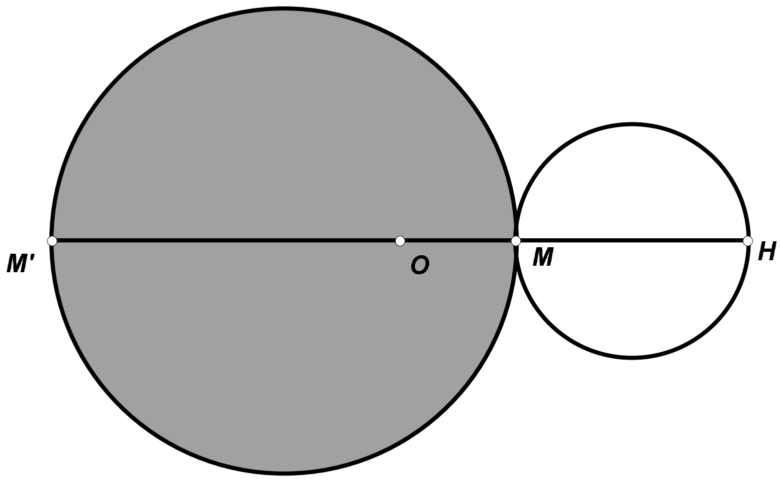

Рис.17

19. (В.Протасов) В угол A, равный α, вписана окружность, касающаяся его сторон в точках B и C. Прямая, касающаяся окружности в некоторой точке M, пересекает отрезки AB и AC в точках и Q, соответственно. При каком наименьшем α возможно неравенство $S_{PAQ} < S_{BMC}$?

    Решение. Отношение S_{PAQ}/S_{BMC} принимает наименьшее значение, когда эти треугольники равнобедренные. Условие равенства площадей имеет вид $\sin\frac{\alpha}{2}(1+\sin\frac{\alpha}{2}) = 1$. Следовательно, искомое неравенство возможно при $\alpha > 2\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

20. (Д.Шноль) Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 1. Из трех углов при вершине пирамиды два — прямые. Найдите наибольший объем пирамиды.

    Решение. Пусть ABC — основание пирамиды, стороны AC, BC видны из ее вершины S под прямыми углами. Тогда S лежит на линии пересечения сфер с диаметрами AC и BC, т.е на окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной основанию с диаметром CD, где D — середина AB. Максимум объема достигается, когда S — наиболее удаленная от плоскости ABC точка этой окружности. При этом высота пирамиды равна $CD/2$, а ее объем $1/16$.

21. (Н.Долбилин) На плоскости лежат три трубы (круговые цилиндры одного размера в обхвате 4 м). Две из них лежат параллельно и, касаясь друг друга по общей образующей, образуют над плоскостью тоннель. Третья, перпендикулярная к первым двум, вырезает в тоннеле камеру. Найдите площадь границы этой камеры.

    Ответ. $\pi/8$.

    Первое решение. Горизонтальные сечения камеры являются прямоугольниками с периметрами, равными удвоенному диаметру трубы. Для каждого такого прямоугольника угол между его плоскостью и касательной к поверхности камеры один и тот же во всех точках. Середины сторон этих прямоугольников при перемещении сечения описывают четверти окружности трубы. Поэтому площадь поверхности камеры равна площади поверхности тетраэдра, грани которого — равные равнобедренные треугольники с основанием, равным диаметру трубы, и высотой, равной четверти ее окружности.

Второе решение. Будем называть касающиеся друг друга цилиндры продольными, а перпендикулярный им — поперечным. Очевидно, что плоскость, касающаяся продольных цилиндров по общей образующей, и вертикальная плоскость, проходящая через ось поперечного цилиндра, являются плоскостями симметрии камеры и разрезают ее на четыре равные части. Рассмотрим одну из таких четвертей. Ее граница состоит из двух кусков: части поверхности продольного цилиндра, лежащей внутри половины поперечного, и части поверхности поперечного цилиндра, лежащей между продольным и касательной к нему вертикальной плоскостью. Линия пересечения цилиндров является эллипсом и лежит в вертикальной плоскости, при симметрии относительно которой цилиндры переходят друг в друга. Образ при этой симметрии части поверхности камеры, лежащей на продольном цилиндре, дополняет часть, лежащую на поперечном до криволинейного прямоугольника со сторонами, равными половине диаметра и четверти окружности цилиндра. Соответственно, площадь поверхности камеры равна учетверенной площади такого прямоугольника.