IV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Б.Френкин, 8) Существует ли правильный многоугольник, в котором ровно половина диагоналей параллельна сторонам?

   Ответ. Нет.

   Решение. Если число сторон многоугольника нечетно, то каждая его диагональ параллельна какой-то стороне. Если же число сторон равно $2k$, то из каждой вершины выходит $2k-3$ диагонали, из которых для $k-2$ существуют параллельные им стороны. Поэтому диагоналей, параллельных сторонам, меньше половины.

2. (В.Протасов, 8) Для данной пары окружностей постройте две концентрические окружности, каждая из которых касается двух данных. Сколько решений имеет задача, в зависимости от расположения окружностей ?

   Решение. Пусть радиусы двух окружностей с центром O равны R и r $(R > r)$. Тогда есть два семейства касающихся их окружностей: с радиусами, равными $\frac{R+r}{2}$, и центрами, удаленными от O на $\frac{R-r}{2}$, и с радиусами, равными $\frac{R-r}{2}$, и центрами, удаленными от O на $\frac{R+r}{2}$. При этом любые две окружности из одного семейства симметричны относительно некоторой прямой, проходящей через O, а любые две окружности из разных семейств пересекаются или касаются. Отсюда вытекает следующее построение.

   Если радиусы данных окружностей равны, то центр искомых концентрических окружностей лежит на прямой, относительно которой данные окружности симметричны. При этом любая точка O этой прямой, кроме точек пересечения данных окружностей, может быть таким центром. Действительно, проведем через O и центр одной из данных окружностей прямую и найдем точки A, B ее пересечения с этой окружностью (рис.2.1). Окружности с радиусами OA, OB — искомые.

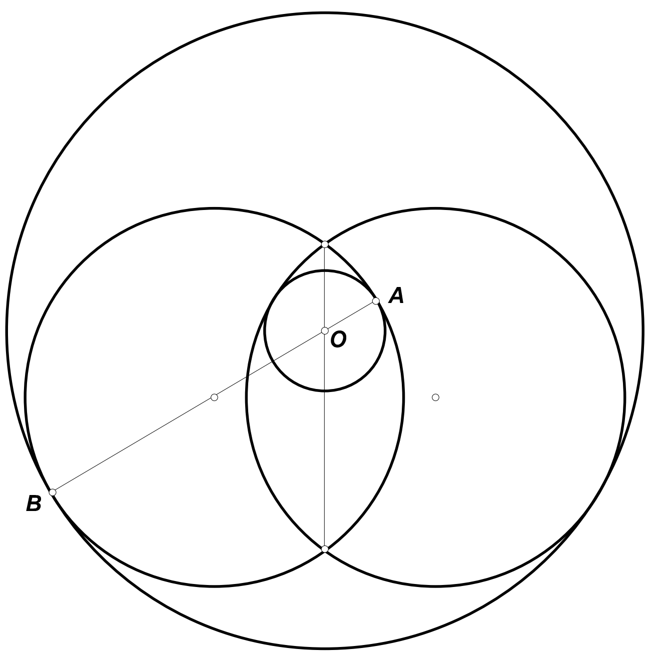

Рис.2.1

Если радиусы данных окружностей различны, то центр искомых окружностей удален от центра каждой из данных на расстояние, равное радиусу другой. Таких точек существует две, если данные окружности пересекаются, и одна, если они касаются. При этом искомые окружности строятся так же, как в предыдущем случае (рис.2.2).

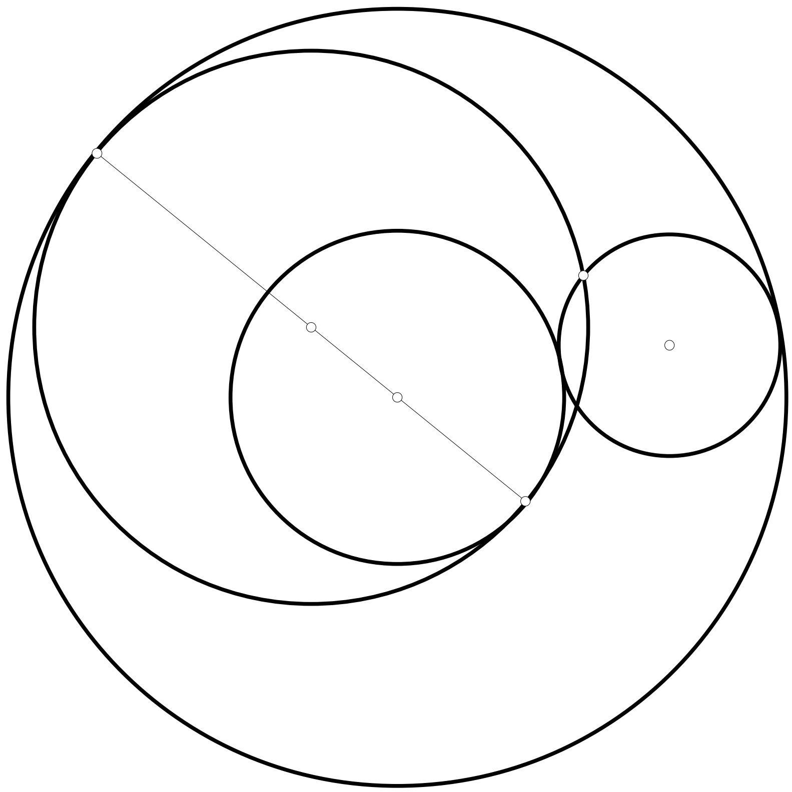

Рис.2.2

Таким образом задача имеет бесконечно много решений, если данные окружности равны, два решения, если радиусы различны и окружности пересекаются, одно, — если радиусы различны и окружности касаются, и ни одного для различных не пересекающихся окружностей.

3. (А.Заславский, 8) Треугольник можно разрезать на три равных треугольника. Докажите, что один из его углов равен 60°.

   Решение. Треугольник можно разрезать на три треугольника либо соединив внутреннюю точку с вершинами, либо сначала разрезав его на два прямой, проходящей через вершину, а затем так же разрезав один из полученных треугольников. Рассмотрим оба случая.

   1) Пусть треугольник ABC разрезан на три треугольника отрезками из точки M. Так как угол AMB больше любого из углов MAC, MBC, MCA, MCB, равенство треугольников возможно только при $\angle AMB = \angle BMC = \angle MCA = 120^\circ$. Но тогда $MA = MB = MC$, и исходный треугольник правильный.

   2) Разрезать на два равных треугольника можно только равнобедренный треугольник. Поэтому один из треугольников, полученных при первом разрезании должен

быть равнобедренным, а второй — прямоугольным, равным "половине"первого. Отрезать же от исходного треугольника прямоугольный можно только одним из следующих трех способов:

- проведя в исходном треугольнике высоту. Но тогда второй треугольник тоже будет прямоугольным и первый не может быть равен его половине;

- проведя в тупоугольном треугольнике ABC через вершину тупого угла C прямую CD, перпендикулярную BC. Тогда, так как площадь треугольника BCD равна половине площади треугольника ACD, должны выполняться равенства $AD = CD = 2BD$, что невозможно, поскольку BD — гипотенуза треугольника BCD;

- проведя в треугольнике с прямым углом C прямую BD. Тогда аналогично предыдущему случаю получаем, что $AD = BD = 2CD$ и, значит, $\angle B = 60°$ (рис.3).

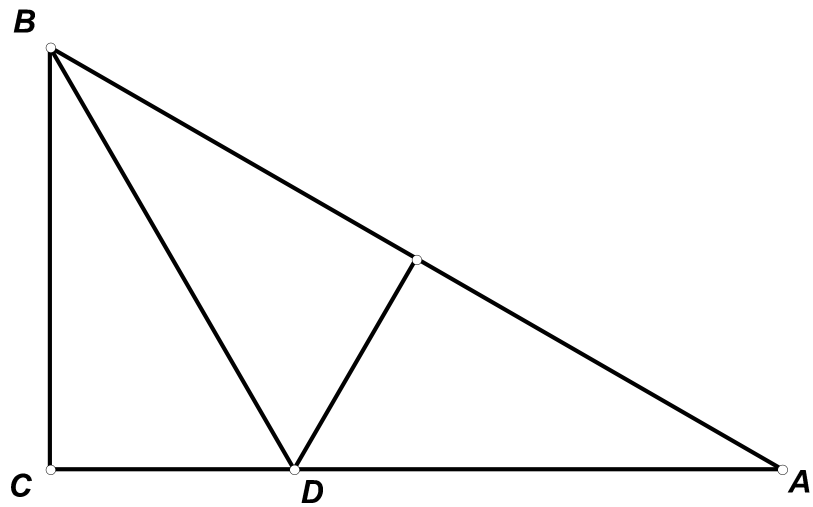

Рис.3

4. (Д.Шноль, 8–9) Биссектрисы двух углов вписанного четырехугольника параллельны. Докажите, что сумма квадратов двух сторон четырехугольника равна сумме квадратов двух других сторон.

   Решение. Прежде всего заметим, что биссектрисы смежных углов четырехугольника не могут быть параллельны, так как сумма этих углов меньше $360°$. Если же параллельны, например, биссектрисы углов A и C четырехугольника $ABCD$, то $\frac{\angle A}{2} + \angle B + \frac{\angle C}{2} = 180°$ и $\angle B = \angle D$. Поскольку четырехугольник вписанный, эти углы — прямые, и $AB^2 + BC^2 = CD^2 + DA^2$.

5. (Из Киевских олимпиад, 8–9) Постройте квадрат $ABCD$, если даны его вершина A и расстояния от вершин B и D до фиксированной точки плоскости O.

   Решение. Пусть O' — такая точка, что $AO = AO'$ и $\angle OAO' = 90°$. Тогда $\angle O'AB = \angle OAD$ и, так как $AB = AD$, треугольники OAD и $O'AB$ равны. Следовательно, $O'B = OD$ и, зная длины отрезков OB, $O'B$, можно построить точку B, а затем и весь квадрат (рис.5). Задача имеет два решения, симметричных относительно прямой OA.

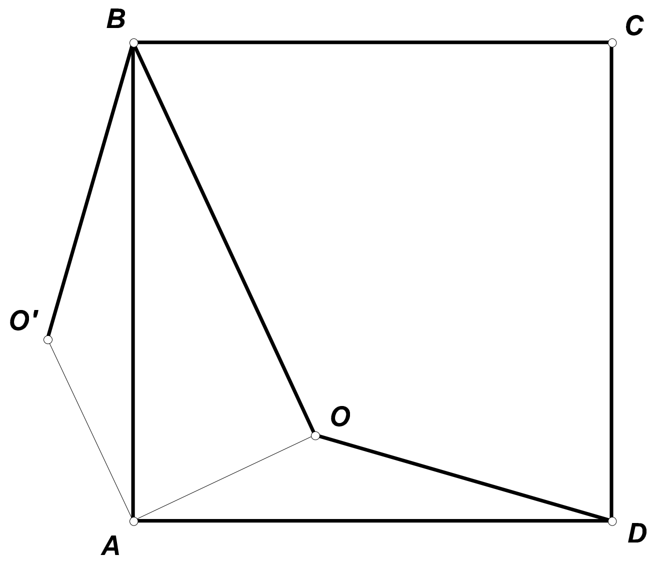

Рис.5

6. (А. Мякишев, 8–9) На плоскости даны две концентрические окружности с центром в точке A. Пусть B — произвольная точка одной из этих окружностей, C — другой. Для каждого треугольника ABC рассмотрим две окружности одинакового радиуса, касающиеся друг друга в точке K, причем одна окружность касается прямой AB в точке B, а другая — прямой AC в точке C. Найдите ГМТ K.

   Решение. Пусть M, N — центры касающихся окружностей. Тогда K — середина отрезка MN, $\angle ABM = \angle ACN = 90°$, и $BM = MK = KN = NC$ (рис.6). Так как AK — медиана треугольника AMN, $AK^2 = \frac{2AM^2+2AN^2-MN^2}{4} = \frac{AB^2+AC^2}{2}$ — не зависит от выбора точек B, C. Следовательно, K лежит на окружности с центром A. Вращая треугольник ABC вокруг A, можно получить любую точку этой окружности.

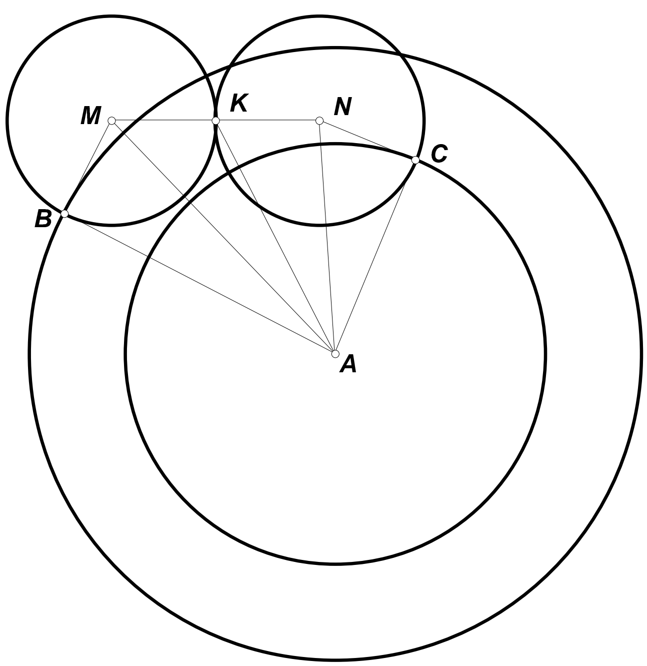

Рис.6

7. (А.Заславский, 8–9) Дана окружность и точка O на ней. Вторая окружность с центром O пересекает первую в точках P и Q. Точка C лежит на первой окружности, а прямые CP, CQ вторично пересекают вторую окружность в точках A и B. Докажите, что $AB = PQ$.

Решение. Если C совпадает с O, утверждение задачи очевидно, а если C — точка, диаметрально противоположная O, то $\angle CPO = \angle CQO = 90°$, т.е. прямые CP, CQ касаются второй окружности и точки A, B совпадают с P, Q. В остальных случаях, так как $OP = OQ$, то CO — биссектриса угла ACB. При симметрии относительно CO прямые CP и CQ переходят друг в друга, а вторая окружность в себя, следовательно, точка P переходит либо в Q, либо в B. Но $CP \neq CQ$, так что первый случай невозможен. Значит, $CP = CB$. Аналогично $CQ = CA$. Отсюда вытекает равенство треугольников CAB и CQP, а значит, и утверждение задачи (рис.7).

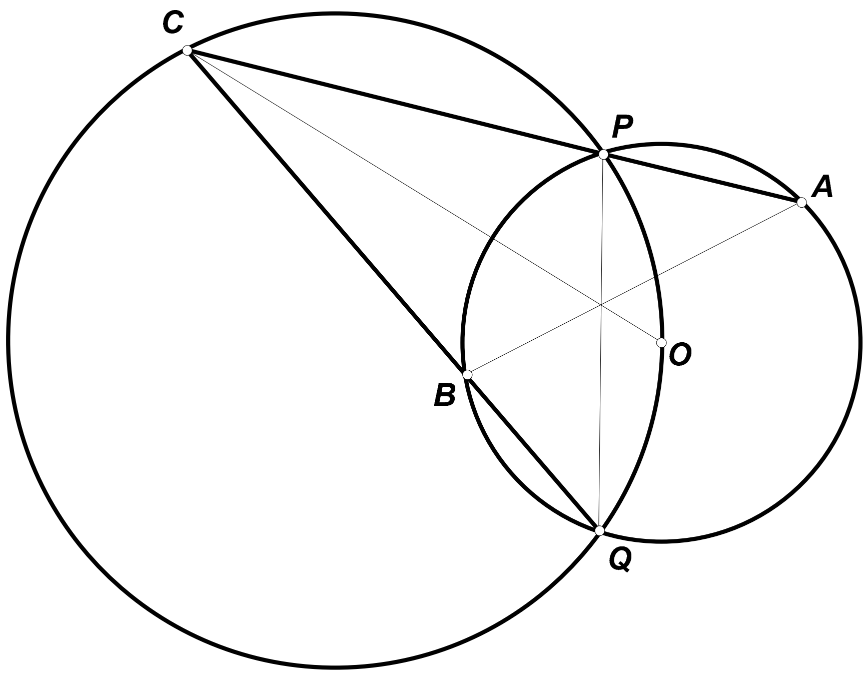

Рис.7

8. (Т.Голенищева-Кутузова, Б.Френкин, 8–11) а) Докажите, что при $n > 4$ любой выпуклый n-угольник можно разрезать на n тупоугольных треугольников.

б) Докажите, что при любом n существует выпуклый n-угольник, который нельзя разрезать меньше, чем на n тупоугольных треугольников.

в) На какое наименьшее число тупоугольных треугольников можно разрезать прямоугольник?

Решение. а) При $n > 4$ у выпуклого n-угольника обязательно есть тупой угол. Диагональ, соединяющая две вершины, соседние с вершиной этого угла, разрезает n-угольник на тупоугольный треугольник и $(n-1)$-угольник. Поэтому, если доказать утвердение задачи для $n = 5$, то для остальных значений n оно выводится по индукции.

Заметим, что любой треугольник можно разрезать на три тупоугольных треугольника. Действительно, высота, проведенная из наибольшего угла, лежит внутри треугольника. Взяв на этой высоте точку, достаточно близкую к основанию, и соединив ее с вершинами, получим требуемое разрезание. Отсюда следует, что четырехугольник, отличный от прямоугольника, можно разрезать на четыре тупоугольных треугольника.

Рассмотрим теперь пятиугольник $ABCDE$. Пусть его угол A — тупой. Если $BCDE$ — не прямоугольник, то проведя диагональ BE и разрезав $BCDE$ на четыре тупоугольных треугольника, получим требуемое разрезание. Если же $BCDE$ — прямоугольник, то углы B и E пятиугольника тупые, т.е $ACDE$ не может быть прямоугольником. Поэтому, проведя диагональ AC и разрезав на четыре треугольника $ACDE$, опять получим требуемое разрезание.

б) Пусть выпуклый n-угольник разрезан на $n-1$ тупоугольных треугольников. Сумма их углов равна $(n-1)\pi$, а сумма углов n-угольника составляет $(n-2)\pi$. Поэтому сумма углов треугольников, которые не примыкают к вершинам n-угольника, равна π. Значит, среди них не более одного тупого. Поэтому к вершинам n-угольника примыкает не менее $n-2$ тупых углов треугольников. К одной вершине выпуклого n-угольника не может примыкать изнутри более одного тупого угла. Значит, n-угольник имеет не менее $n-2$ тупых углов. Но это верно не для всякого выпуклого n-угольника при любом $n \geq 3$.

в) Очевидно, что, проведя диагональ и разрезав каждый из образовавшихся треугольников на три тупоугольных, получим разрезание прямоугольника на шесть тупоугольных треугольников. Докажем, что разрезать прямоугольник на меньшее число треугольников нельзя. Предположим, что прямоугольник разрезан на пять тупоугольных треугольников. Тогда, рассуждая, как в п.б), получаем, что сумма углов этих треугольников, не примыкающих к вершинам прямоугольника, равна 3π. Если все такие углы расположены в точках на сторонах прямоугольника, то таких точек три и в каждой из них находится не более одной вершины тупого угла. Поскольку в вершинах прямоугольника тупых углов нет, получаем противоречие. Если же некоторые вершины треугольников лежат внутри прямоугольника, то получаем одну внутреннюю точку, в которой сходится не более трех тупых углов, и одну точку на стороне, т.е. общее количество тупых углов не превышает четырех, и опять получаем противоречие. Аналогично доказывается, что прямоугольник нельзя разрезать на четыре тупоугольных треугольника.

9. (А.Заславский, 9–10) Прямые, симметричные диагонали BD четырехугольника $ABCD$ относительно биссектрис углов B и D, проходят через середину диагонали AC. Докажите, что прямые, симметричные диагонали AC относительно биссектрис углов A и C, проходят через середину диагонали BD.

Решение. Пусть P — середина AC, L — точка пересечения диагоналей. Применив теорему синусов к треугольникам ABP, ABL, CBP, CBL, получаем, что $AL/CL = (AB/CB)^2$. Аналогично, $AL/CL = (AD/CD)^2$, т.е. $BC/CD = AB/AD = \frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle DBA} = \frac{\sin\angle CDP}{\sin\angle CBP}$. Следовательно, прямые BP и DP симметричны относительно AC. Пусть X — вторая точка пересечения прямой BP с описанной окружностью треугольника ABC. Точка, симметричная X относительно серединного перпендикуляра к AC лежит как на PD, так и на BD, и, значит, совпадает с D. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — вписанный, и $AB \cdot CD = AD \cdot BC = (AC \cdot BD)/2$. Пусть прямая, симметричная AC относительно биссектрисы угла A, пересекает BD в точке Q. Тогда треугольники ABQ и ACD подобны, следовательно, $AB/AC = BQ/BD$ и $BQ = BD/2$ (рис.9).

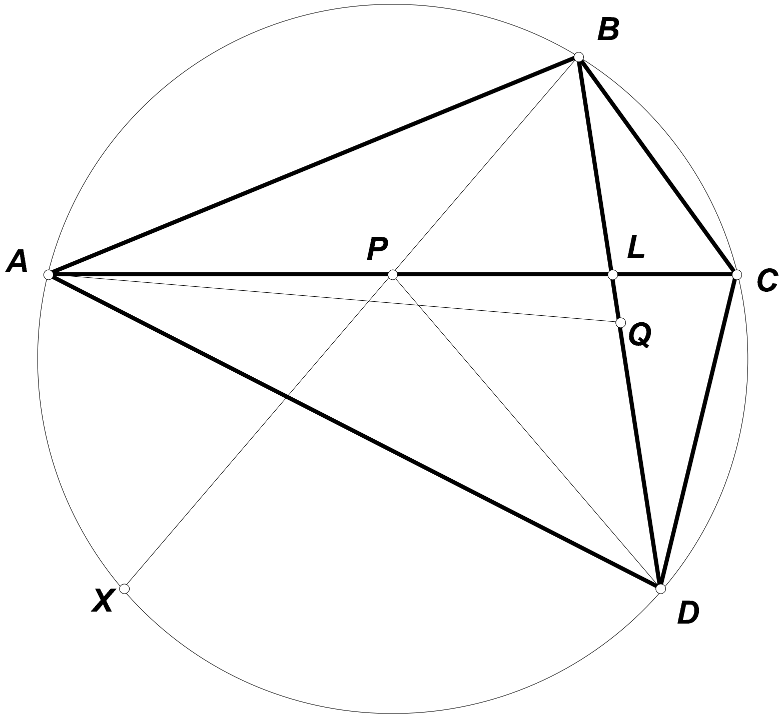

Рис.9

10. (А.Заславский, 9–10) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Докажите, что проекции точек B и D на прямые IA и IC лежат на одной окружности.

Решение. Очевидно, что середина отрезка BD равноудалена от проекций точек B и D на любую прямую. Докажем, что она равноудалена и от проекций X, Y точки B на IA и IC.

Так как $\angle BXI = \angle BYI = 90^\circ$, точки X, Y лежат на окружности с диаметром BI, т.е. серединный перпендикуляр к отрезку XY проходит через середину BI. Таким образом достаточно доказать, что $XY \perp ID$. Действительно, в этом случае серединный перпендикуляр к XY будет совпадать со средней линией треугольника BDI и, значит, пройдет через середину BD.

Так как точки B, I, X, Y лежат на одной окружности, угол между XY и XA равен углу иежду BY и BI, т.е. $\angle BIC - 90^\circ$. Следовательно, угол между XY и ID равен $\angle AID + \angle BIC - 90^\circ = 90^\circ$ (рис.10).

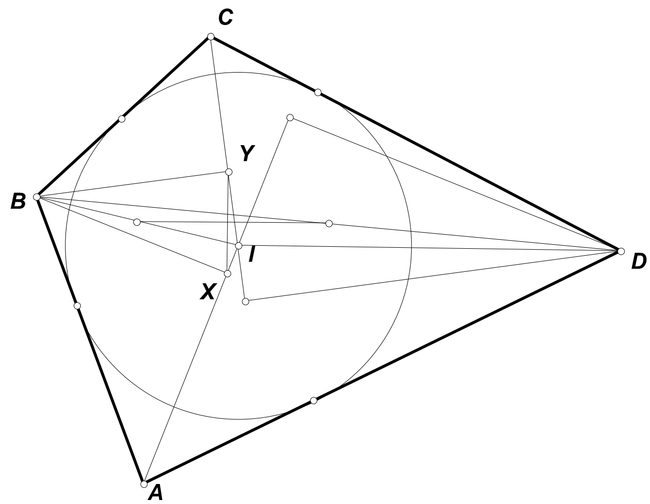

Рис.10

11. (А.Заславский, 9–10) Даны четыре точки A, B, C, D. Известно, что любые две окружности, одна из которых проходит через A и B, а другая — через C и D, пересекаются. Докажите, что общие хорды всех таких пар окружностей проходят через одну точку.

    Решение. Рассмотрим сначала случай, когда точки не лежат на одной прямой. Если, например, C и D лежат по одну сторону от прямой AB, то существует окружность ω, проходящая через C и D и касающаяся AB. Тогда через A и B можно провести окружность достаточно большого радиуса, не пересекающую ω. Следовательно, отрезки AB и CD должны пересекаться. Пусть O — точка пересечения серединных перпендикуляров к этим отрезкам. Две окружности с центром O и радиусами OA и OC либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, точки A, B, C, D лежат на одной окружности. По теореме о радикальных осях трех окружностей общая хорда любых двух окружностей, проходящих через A, B и C, D соответственно, проходит через точку пересечения AB и CD.

    Если же все точки лежат на одной прямой, то, очевидно, что отрезки AB и CD пересекаются, а общая хорда окружностей пересекает прямую, на которой лежат точки, в точке P, принадлежащей обоим отрезкам и удовлетворяющей равенству $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Эти условия определяют точку P однозначно.

12. (А.Мякишев, 9–10) Имеется треугольник ABC. На луче BA отложим точку A_1, так что отрезок BA_1 равен BC. На луче CA отложим точку A_2, так что отрезок CA_2 равен BC. Аналогично построим точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 параллельны.

    Решение. Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника. Так как BI — биссектриса угла B равнобедренного треугольника A_1BC, $A_1I = IC$. Аналогично $A_2I = IB$. Следовательно

$$A_1I^2 - A_2I^2 = IC^2 - IB^2 = (p-c)^2 - (p-b)^2 = a(b-c).$$

    С другой стороны, если B_0, C_0 — середины AC и AB, то

$$OA_1^2 - OA_2^2 = OC_0^2 - OB_0^2 + A_1C_0^2 - A_2B_0^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{c}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = a(b-c).$$

Следовательно, прямые A_1A_2 и OI перпендикулярны (рис.12). Аналогично получаем, что OI перпендикулярна двум другим прямым.

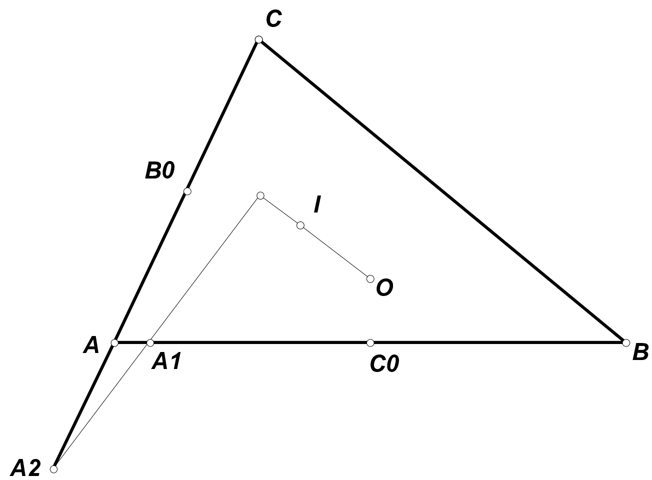

Рис.12

13. (А.Мякишев, 9–10) Дан треугольник ABC. Вневписанная окружность касается его стороны BC в точке A_1 и продолжений двух других сторон. Другая вневписанная окружность касается стороны AC в точке B_1. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке N. На луче AA_1 отметили точку P, такую что $AP = NA_1$. Докажите, что точка P лежит на вписанной в треугольник окружности.

Решение. Так как точки касания сторон треугольника с вневписанными окружностями симметричны их точкам касания с вписанной окружностью относительно середин сторон, $CA_1 = p - b$, $CB_1 = p - a$, $AB_1 = BA_1 = p - c$. Применив теорему Менелая к треугольнику ACA_1 и прямой BB_1, получаем, что $A_1N/AA_1 = (p-a)/p$. Гомотетия с этим коэффициентом и центром A переведет точку A_1 в точку P. Но отношение радиусов вписанной и вневписанной окружностей треугольника тоже равно $(p-a)/p$, значит образ A_1 при этой гомотетии лежит на вписанной окружности (рис.13).

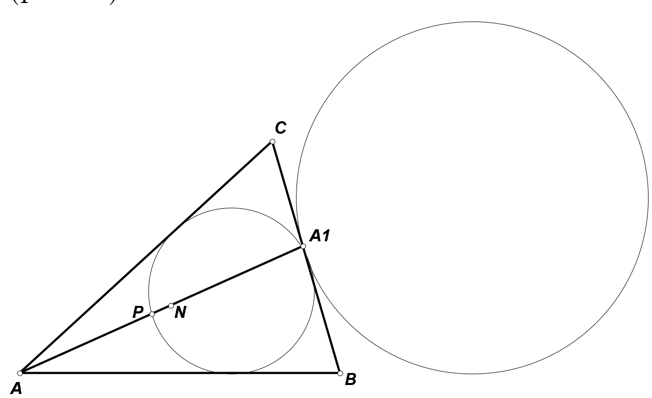

Рис.13

14. (В.Протасов, 9–10) Прямая, соединяющая центр описанной окружности и точку пересечения высот неравнобедренного треугольника, параллельна биссектрисе одного из его углов. Чему равен этот угол?

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — его ортоцентр, и прямая OH параллельна биссектрисе угла C. Так как эта биссектриса пересекает описанную окружность в середине C' дуги AB, $OC' \perp AB$, т.е. четырехугольник $OC'CH$ — параллелограмм и $CH = OC' = R$. С другой стороны, $CH = 2R|\cos C|$, значит угол C равен 60° или 120°. Но в первом случае лучи CO и CH симметричны относительно биссектрисы угла C, так что прямая OH не может быть параллельна этой биссектрисе. Следовательно, $C = 120^\circ$ (рис.14).

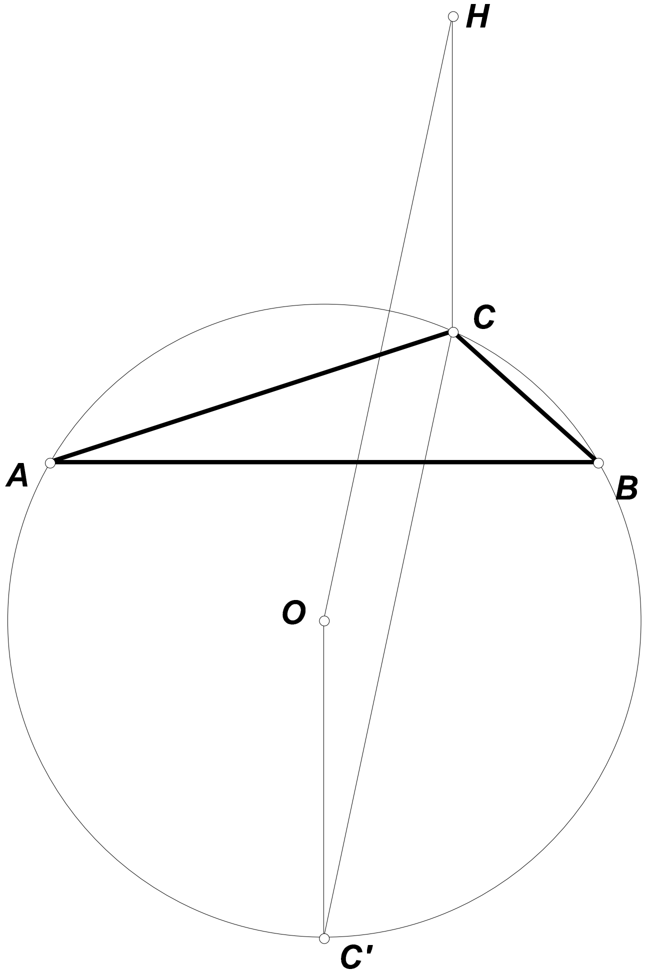

Рис.14

15. (М.Волчкевич, 9–11) Даны две окружности и не лежащая на них точка P. Проведите через P прямую, высекающую на данных окружностях хорды равной длины.

    Решение. Пусть A, B — точки пересечения искомой прямой с одной окружностью, C, D — с другой, M — середина отрезков AD и BC. Тогда степени точки M относительно окружностей равны, т.е M лежит на их радикальной оси. Пусть L — середина отрезка между центрами окружностей. Так как проекциями центров на искомую прямую являются середины отрезков AB и CD, проекцией L на эту прямую будет точка M. Следовательно, $\angle LMP = 90^\circ$ и M лежит на окружности с диаметром LP. Таким образом, чтобы построить искомую прямую, надо найти точки пересечения этой окружности с радикальной осью. Задача может иметь два, одно или ни одного решения.

16. (А.Заславский, 9–11) Даны две окружности. Общая внешняя касательная касается их в точках A и B. Точки X, Y на окружностях таковы, что существует окружность, касающаяся данных в этих точках, причем одинаковым образом (внешним или внутренним). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AX и BY.

Решение. Точки X, Y являются центрами гомотетии каждой из данных окружностей с касающейся. Следовательно, прямая XY проходит через центр гомотетии данных окружностей, т.е. точку пересечения AB с линией центров. Пусть Y' — отличная от Y точка пересечения этой прямой с второй окружностью. Тогда $BY' \parallel AX$ и $\angle XYB = \angle Y'BA = \pi - \angle BAX$. Поэтому четырехугольник $AXYB$ — вписанный и точка P пересечения прямых AX и BY является радикальным центром данных окружностей и окружности, описанной около этого четырехугольника, т.е. лежит на радикальной оси данных окружностей (рис.16).

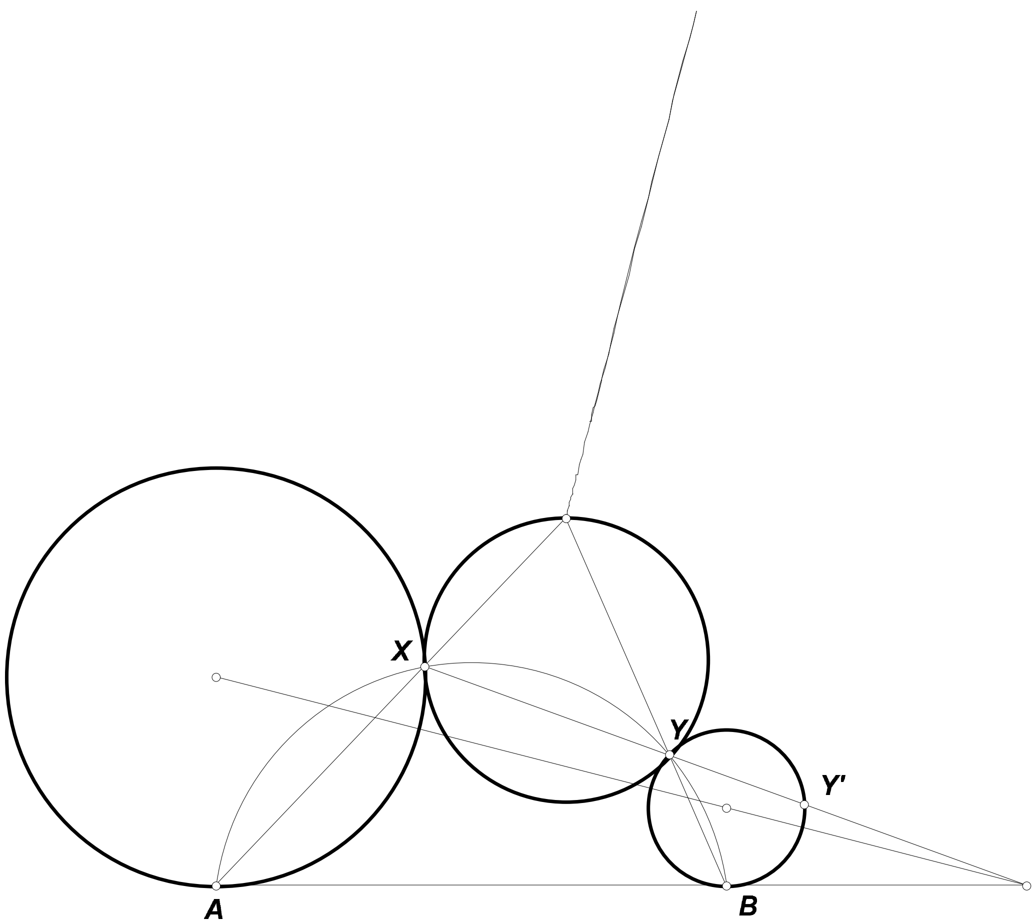

Рис.16

17. (А.Мякишев, 9–11) Дан треугольник ABC и линейка, на которой отмечены два отрезка, равные AC и BC. Пользуясь только этой линейкой, найдите центр вписанной окружности треугольника, образованного средними линиями ABC.

Решение. Отложим на продолжении стороны AB за точку B и на продолжении стороны AC за точку C отрезки $BC_1 = CB_1 = BC$. Пусть A' — точка пересечения BB_1 и CC_1. Тогда прямая AA' проходит через искомую точку (рис.17).

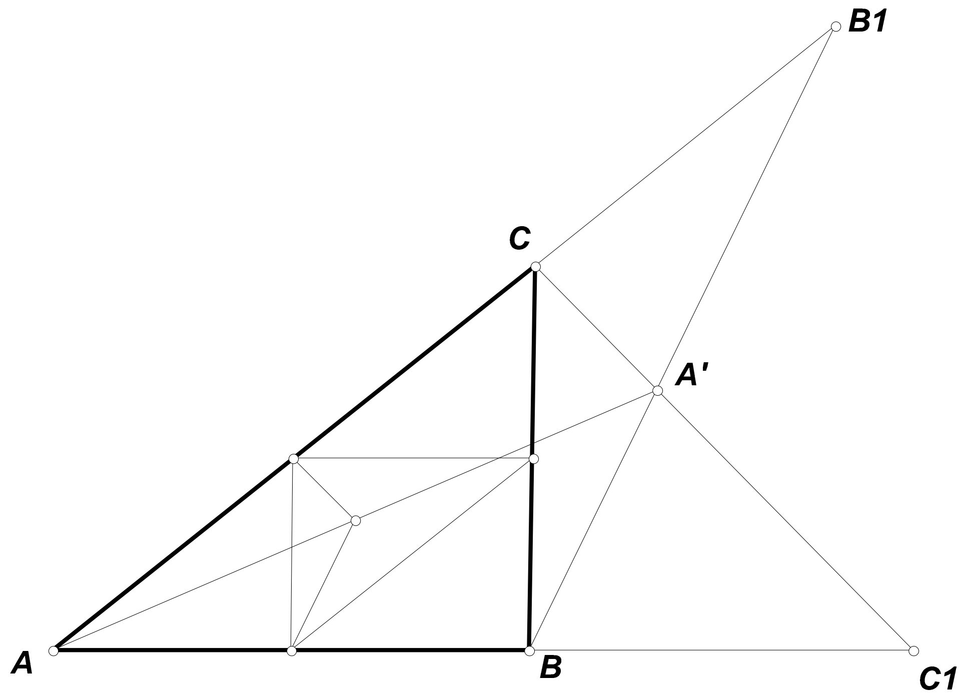

Рис.17

Действительно, так как треугольники BCB_1 и CBC_1 равнобедренные, прямые BB_1 и CC_1 параллельны биссектрисам углов C и B. Поэтому при гомотетии с центром A и коэффициентом $1/2$ эти прямые перейдут в биссектрисы углов серединного треугольника, а точка A' — в искомый центр.

Аналогично, используя второй отмеченный на линейке отрезок, построим прямую, проходящую через B и исходную точку.

18. (А.Абдуллаев, Азербайджан, 9–11) Докажите, что для треугольника со сторонами a, b, c и площадью S выполнено неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{2}(|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Первое решение. Пусть C — средний угол треугольника. Тогда $|b-c|+|c-a| = |a-b|$ и левая часть неравенства равна

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2(a-b)^2 = 4ab - (a^2 + b^2 - c^2) = 2ab(2 - \cos C).$$

Поскольку правая часть равна $2\sqrt{3}ab\sin C$, данное неравенство равносильно следующему

$$2 - \cos C \geq \sqrt{3}\sin C.$$

Но $\cos C + \sqrt{3}\sin C = 2\cos(C - \frac{\pi}{3})$, следовательно, данное неравенство всегда справедливо и обращается в равенство только при $C = 60^\circ$.

Второе решение. Вновь полагая, что c — средняя сторона треугольника, обозначим $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$, где p — полупериметр, и запишем левую часть в виде

$$a^2 + b^2 - (a-b)^2 + c^2 - (a-b)^2 = 2ab + 4xy = 2(x+z)(y+z) + 4xy = 2pz + 6xy.$$

И поскольку правая часть равна $4\sqrt{3pxyz}$, неравенство принимает вид

$$pz + 3xy - 2\sqrt{3pxyz} = (\sqrt{px} - \sqrt{3xy})^2 \geq 0.$$

19. (В.Протасов, 10-11) Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = b$. Первая окружность имеет центр в вершине A и проходит через D, вторая имеет центр в C и проходит через D. Произвольная окружность с центром B пересекает первую окружность в точках M_1, N_1, а вторую — в точках M_2, N_2. Чему равно отношение M_1N_1/M_2N_2?

    Решение. Точки M_1, N_1 симметричны относительно прямой AB, так что M_1N_1 равно удвоенному расстоянию от M_1 до AB. Аналогично M_2N_2 равно удвоенному расстоянию от M_2 до BC. Кроме того, $CM_2 = CD = AB$, $AM_1 = AD = BC$, $BM_1 = BM_2$, и значит, треугольники ABM_1 и CM_2B равны. Поэтому искомое отношение, равное отношению высот этих треугольников обратно отношению соответствующих сторон, т.е. равно b/a (рис.19).

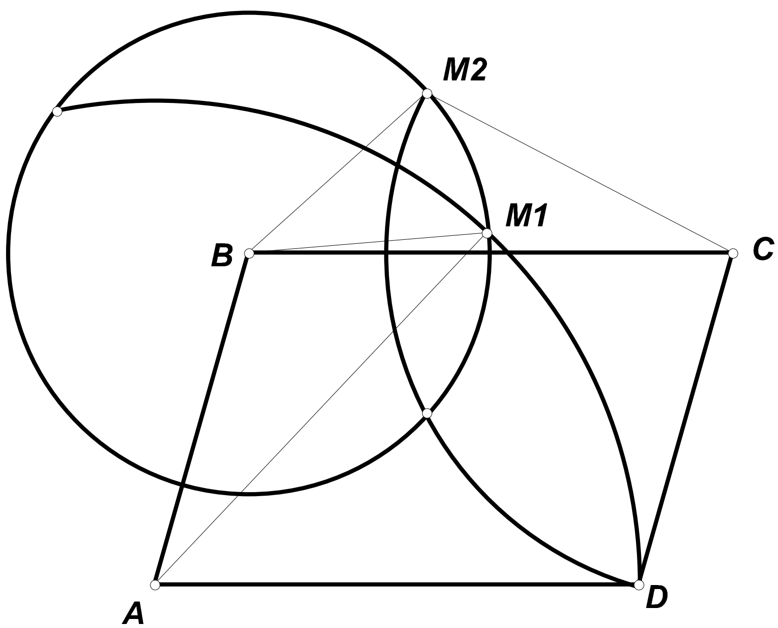

Рис.19

20. (А.Заславский, 10–11) а) Многоугольник обладает следующим свойством: если провести прямую через две точки, делящие его периметр пополам, то эта прямая разделит многоугольник на два равновеликих многоугольника. Верно ли, что многоугольник центрально симметричен?

    б) Верно ли, что любая фигура, обладающая свойством, указанным в п.а), центрально симметрична?

    Решение. а) Да. Пусть X, Y — две точки, делящие периметр многоугольника пополам и не являющиеся его вершинами, X', Y' — точки на тех же сторонах, удовлетворяющие условию $XX' = YY'$, P — точка пересечения прямых XY и $X'Y'$. Так как каждая из этих прямых делит многоугольник на два равновеликих, площади треугольников PXX' и PYY' равны. А так как $XX' = YY'$, равны и высоты треугольников, опущенные на эти стороны. Кроме того $\angle XPX' = \angle YPY'$, как вертикальные.

Следовательно, эти треугольники равны. Если прямые XX' и YY' не параллельны, то отсюда следует равенство углов $PX'X$ и PYY'. Но при фиксированной паре X, Y это равенство не может выполняться для произвольных X', Y'. Таким образом, когда одна из двух противоположных точек движется по стороне многоугольника, другая движется по параллельной стороне, причем длины этих сторон равны. Значит многоугольник имеет центр симметрии.

Примечание. Приведенное выше рассуждение подразумевает, что никакие две стороны многоугольника не лежат на одной прямой. Если это условие не выполняется, то многоугольник может обладать требуемым свойством и не иметь центра симметрии (рис.20а)

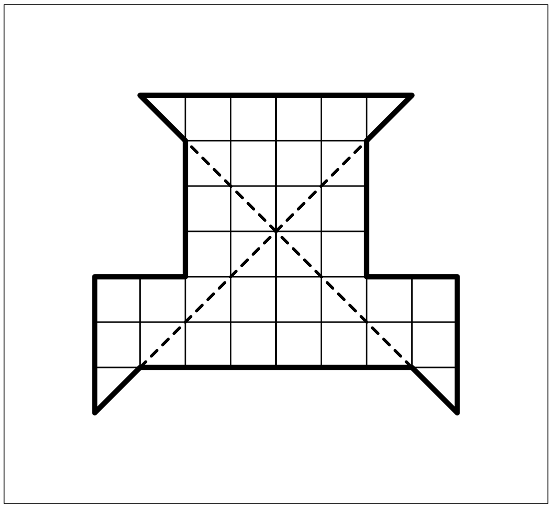

Рис.20а

б) Нет. Пусть, например, ABC — правильный треугольник, A', B', C' — середины его сторон. Проведем шесть дуг окружностей по $60°$ с центрами A', B', C' с концами в точках A, B, C, A', B', C'. Пусть X, Y — пара точек, делящих периметр фигуры ограниченной этими дугами, пополам и точка X лежит, например, на дуге AB'. Тогда Y лежит на дуге $A'B$ и дуги AX и $A'Y$ равны. Так как дуги AB' и $A'B$ являются частями одной окружности с центром C', это означает, что $\angle AC'X = \angle A'CY$. Следовательно, площадь фигуры $AXYB$ равна сумме площадей секторов $C'AX$ и $C'BY$, не зависящей от положения точек X, Y, площади треугольника $C'XY$, также не зависящей от положения этих точек, и площади двух неизменных сегментов. Таким образом, эта площадь постоянна и, как нетрудно видеть, равна половине площади всей фигуры (рис.20б).

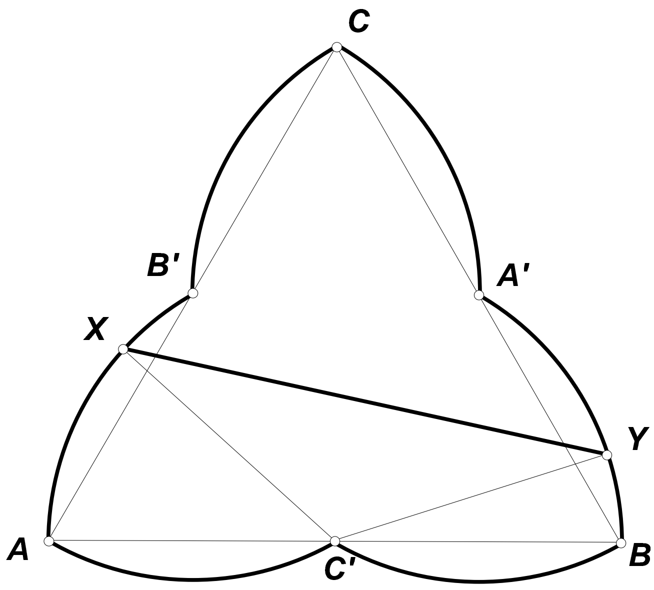

Рис.20б

Примечание. Существуют даже выпуклые фигуры, обладающие указанным свойством. Например, фигура, ограниченная кривой

$$x = 12\cos\phi + \cos 2\phi + \frac{1}{2}\cos 4\phi,\ y = 12\sin\phi - \sin 2\phi + \frac{1}{2}\sin 4\phi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi,$$

однако доказательство в этом случае существенно сложнее.

21. (А.Заславский, Б.Френкин, 10–11) В треугольнике провели серединные перпендикуляры к его сторонам и измерили их отрезки, лежащие внутри треугольника.

а) Все три отрезка оказались равны. Верно ли, что треугольник равносторонний?

б) Два отрезка оказались равны. Верно ли, что треугольник равнобедренный?

в) Могут ли длины отрезков равняться 4, 4 и 3?

Решение. а) Верно. Пусть в треугольнике ABC $\angle A < \angle B \le \angle C$. Тогда серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC пересекают сторону AB. Отрезки этих перпендикуляров, лежащие внутри треугольника, имеют равные проекции на прямые, перпендикулярные AB, но образуют с этими прямыми разные углы. Следовательно, они не равны.

Пусть теперь $\angle A \le \angle B < \angle C$. Тогда серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают соответственно AC и AB и, значит, отрезают от треугольника ABC подобные, но не равные треугольники. Отрезки перпендикуляров, лежащие внутри треугольника, являются соответствующими сторонами этих треугольников и, следовательно, не равны.

Отметим, что из приведенных рассуждений следует, что наименьшую длину имеет отрезок серединного перпендикуляра, проведенного к средней стороне треугольника.

б) Неверно. Например, рассмотрим треугольник с углами $A = \pi/8$, $B = \pi/4$, $C = 5\pi/8$ и единичным радиусом описанной окружности. В нем серединный перпендикуляр к AB пересекает сторону AC и его отрезок, лежащий внутри треугольника, равен $AB \operatorname{tg}\angle A/2 = \sin(5\pi/8)\operatorname{tg}(\pi/8) = \cos(\pi/8)\operatorname{tg}(\pi/8) = \sin(\pi/8)$. Серединный перпендикуляр к BC пересекает AB и длина соответствующего отрезка равна

$BC \operatorname{tg} \angle B/2 = \sin(\pi/8)$. Таким образом эти отрезки равны. Условию удовлетворяет также любой треугольник, в котором $\angle A < \angle B < \angle C$ и $\cos A \operatorname{tg} B = \sin C$.

в) Нет. Если треугольник равнобедренный, то, как показано в п.а), отрезки серединных перпендикуляров к боковым сторонам короче высоты. Если же $\angle A < \angle B < \angle C$ и $\cos A \operatorname{tg} B = \sin C$, то отношение отрезков перпендикуляров к наибольшей и средней сторонам треугольника равно отношению самих этих сторон, т.е.

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\cos B}{\sqrt{1 - 2\cos B + 2\cos^3 B}}.$$

Исследовав правую часть этого равенства, можно убедиться, что ее максимум меньше, чем 4/3.

22. (А.Хачатурян, 10–11) а) Все вершины пирамиды лежат на гранях куба, но не на его ребрах, причем на каждой грани лежит хотя бы одна вершина. Какое наибольшее количество вершин может иметь пирамида?

б) Все вершины пирамиды лежат в плоскостях граней куба, но не на прямых, содержащих его ребра, причем в плоскости каждой грани лежит хотя бы одна вершина. Какое наибольшее количество вершин может иметь пирамида?

Ответ. а)13. б) Произвольно большое.

Решение. а) Сечение куба плоскостью основания пирамиды пересекает все его грани и, значит, является выпуклым шестиугольником. Вершины основания лежат на сторонах этого шестиугольника, но не в его вершинах. Нетрудно видеть, что, если на какой-то стороне лежит больше двух вершин основания, то соединить их несамопересекающейся ломаной, лежащей внутри шестиугольника, невозможно. Поэтому основание имеет не более 12 вершин, а пирамида — не более 13. Существование пирамиды с 13 вершинами очевидно.

б) В этом случае вершины основания могут лежат на прямых, содержащих стороны шестиугольника, и их количество может быть произвольно большим (рис.22).

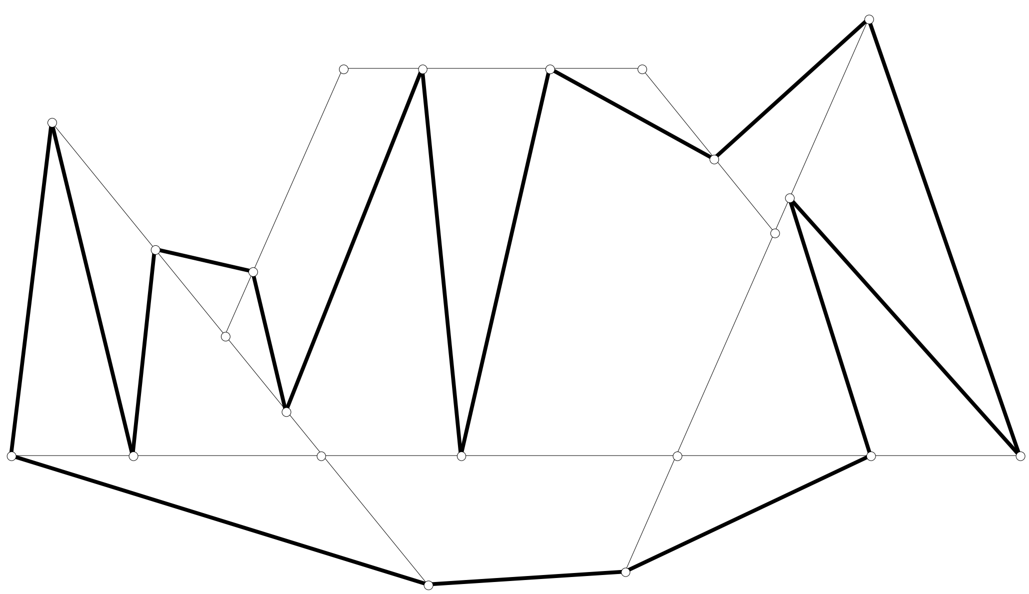

Рис.22

23. (В.Протасов, 10–11) В пространстве даны две пересекающиеся сферы разных радиусов и точка A, принадлежащая обеим сферам. Докажите, что в пространстве существует точка B, обладающая следующим свойством: если через точки A и B провести произвольную окружность, то точки ее повторного пересечения с данными сферами будут равноудалены от B.

Решение. Проведем через A прямую, параллельную линии центров данных сфер, и найдем вторые точки C, D ее пересечения со сферами. Покажем, что середина B отрезка CD — искомая точка. Возьмем произвольную окружность, проходящую через A и B, и рассмотрим сечения сфер плоскостью этой окружности. Эти сечения представляют собой две окружности, одна из которых проходит через точки A и C, другая — через A и D. Центрами этих окружностей будут проекции O_1, O_2 центров сфер на плоскость сечения, следовательно, прямые O_1O_2 и CD параллельны. Поэтому достаточно доказать плоский аналог утверждения задачи.

Пусть X_1, X_2 — вторые точки пересечения окружности, проходящей через A и B, с данными окружностями; A' — вторая точка пересечения данных окружностей. Тогда O_1O_2 — средняя линия треугольника $A'CD$, т.е. $CB = BD = O_1O_2$. Следовательно, $O_1B = O_2D = O_2X_2$, $O_2B = O_1C = O_1C_1$. Кроме того, центр O окружности ABX_1X_2 равноудален от O_1 и O_2, поэтому $\angle BO_1X_1 = \angle BO_1O + \angle OO_1X_1 = \angle BO_1O + \angle AO_1O = \angle AO_2O + \angle BO_2O = \angle BO_2O + \angle OO_2X_2 = \angle BO_2X_2$. Таким образом, треугольники O_1X_1B и O_2BX_2 равны, а значит, $BX_1 = BX_2$ (рис.23).

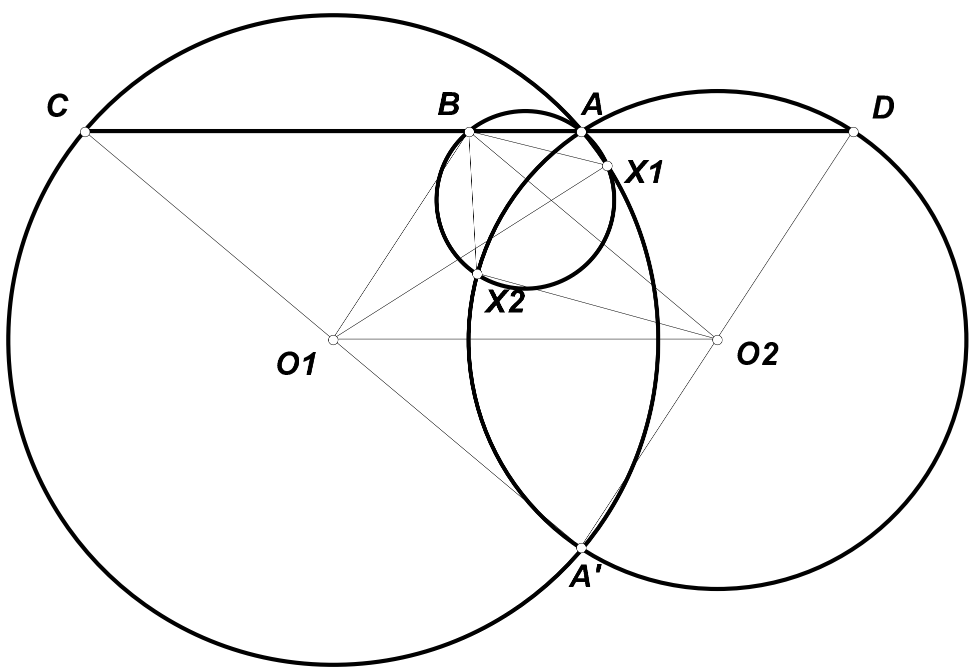

Рис.23

24. (И.Богданов, 11) Пусть h — наименьшая высота тетраэдра, d — наименьшее расстояние между его противоположными ребрами. При каких t возможно неравенство $d > th$?

Решение. При $t < 3/2$. Пусть ABC — грань наибольшей площади тетраэдра $ABCD$. Тогда его объем равен $V = S_{ABC}h/3$. С другой стороны он равен половине произведения длин противоположных ребер на расстояние и синус угла между ними. Пусть

$A'B'C'$ — треугольник, средними линиями которого являются стороны ABC. Тогда, например, $S_{A'B'D} = AB \cdot CD \sin\phi$, где ϕ — угол между AB и CD. Поскольку сумма площадей боковых граней тетраэдра больше площади его основания, площадь треугольника $A'B'C'$ не превосходит утроенной максимальной площади треугольников $A'B'D$, $B'C'D$, $C'A'D$, т.е. $d < 3h/2$. Усилить это неравенство нельзя, так как если взять правильную пирамиду и устремить ее высоту к нулю, отношение d/h будет стремиться к $3/2$.