VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Шестой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники 8–11 классов. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов (на момент проведения олимпиады) она предназначена. Впрочем, можно решать также задачи и для более старших классов (решенные задачи для младших классов при подведении итогов не учитываются).

Решения задач на русском языке должны быть посланы не позднее 1 апреля 2010 года. Рекомендуется присылать решения по электронной почте в форматах pdf, doc или jpg на адрес geomolymp@mccme.ru. При этом во избежание потери работы нужно соблюдать следующие правила.

1. Каждую работу следует посылать отдельным письмом.

2. Если работа содержится в нескольких файлах, желательно присылать их в виде архива.

3. В теме письма нужно написать "работа на олимпиаду им.Шарыгина", а в тексте привести следующие сведения об участнике:

- фамилию, имя, отчество;

- полный почтовый адрес с индексом, телефон, E-mail;

- класс, в котором сейчас учится школьник;

- номер и адрес школы;

- ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.

Если у Вас нет возможности прислать работу в электронном виде, пришлите ее простой бандеролью (или принесите сами) в обычной тетради, не сворачивая тетрадь в трубку, по адресу: *119002, Москва Г-002, Большой Власьевский пер., д. 11., МЦНМО. На олимпиаду им. И.Ф.Шарыгина.* На обложке тетради **обязательно** укажите все сведения, перечисленные выше в п.3.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая аккуратные чертежи. Если задача на вычисления, в конце ее решения должен быть отчетливо выделенный ответ. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении какой-то известной теоремой или фактом, приведенным в задаче из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему или факт Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Ваши работы будут тщательно проверены, и Вы получите (не позднее середины мая 2010 г.) ответ жюри. Победители заочного тура — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2010 года в г. Дубна под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат Грамоты оргкомитета олимпиады.

1. (8) Существует ли треугольник, в котором одна сторона равна какой-то из его высот, другая — какой-то из биссектрис, а третья — какой-то из медиан?

2. (8) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Пусть O — центр описанной окружности треугольника CA_1B_1. Докажите, что $OI \perp AB$.

3. (8) Точки A', B', C' лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Точка X такова, что $\angle AXB = \angle A'C'B' + \angle ACB$ и $\angle BXC = \angle B'A'C' + \angle BAC$. Докажите, что четырёхугольник $XA'BC'$ — вписанный.

4. (8) Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке N. Окружности, описанные вокруг треугольников ANB и CND, повторно пересекают стороны BC и AD в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписан в окружность с центром N.

5. (8–9) На высоте BD треугольника ABC взята точка E такая, что $\angle AEC = 90^\circ$. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников AEB и CEB; F, L — середины отрезков AC и O_1O_2. Докажите, что точки L, E, F лежат на одной прямой.

6. (8–9) На стороне BC равностороннего треугольника ABC взяты точки M и $N(M$ лежит между B и $N)$ такие, что $\angle MAN = 30^\circ$. Описанные окружности треугольников AMC и ANB пересекаются в точке K. Докажите, что прямая AK содержит центр описанной окружности треугольника AMN.

7. (8–9) Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная медиане BM. Эта прямая пересекает высоты, выходящие из A и C (или их продолжения), в точках K и N. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABK и CBN соответственно. Докажите, что $O_1M = O_2M$.

8. (8–10) В треугольнике ABC проведена высота AH. Точки I_b и I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABH и ACH; L — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Найдите угол LI_bI_c.

9. (8–10) Назовём точку внутри треугольника хорошей, если три чевианы через неё равны. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, а количество хороших точек нечётно. Чему оно может быть равно?

10. (8–11) Дан треугольник ABC. С помощью двусторонней линейки, проведя не более восьми линий, постройте на стороне AB такую точку D, что $AD/BD = BC/AC$.

11. (8–11) Выпуклый n-угольник разрезан на 3 выпуклых многоугольника. У одного из них n сторон, у другого — больше, чем n, у третьего — меньше, чем n. Каковы возможные значения n?

12. (9) В прямоугольном треугольнике ABC AC — больший катет, CH — высота, проведенная к гипотенузе. Окружность с центром H и радиусом CH пересекает катет AC в точке M. Точка B' симметрична точке B относительно H. В точке B' восставлен перпендикуляр к гипотенузе, который пересекает окружность в точке K. Докажите, что:

    а) $B'M \parallel BC$;

    б) AK — касательная к окружности.

13. (9) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$. На диагонали BD выбрана точка K такая, что $\angle AKB + \angle BKC = \angle A + \angle C$. Докажите, что $AK \cdot CD = KC \cdot AD$.

14. (9–10) На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка M, что CM и BM параллельны AB и CD соответственно. Докажите, что $S_{ABCD} \geq 3S_{BCM}$.

15. (9–11) В остроугольном треугольнике ABC AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке K. Окружности, описанные вокруг треугольников A_1KC_1 и A_1KB_1 вторично пересекают прямые AB и AC в точках N и L соответственно. Докажите, что

    а) сумма диаметров этих окружностей равна стороне BC.

    б) $A_1N/BB_1 + A_1L/CC_1 = 1$.

16. (9–11) В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках D и E. Хорда BX параллельна прямой DE. Докажите, что отрезок XC проходит через середину отрезка DE.

17. (9–11) Постройте треугольник по высоте и биссектрисе, проведенным из одной вершины, и медиане, проведенной из другой вершины.

18. (9–11) На хорде AC окружности ω выбрали точку B. На отрезках AB и BC как на диаметрах построили окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, которые пересекают ω второй раз в точках D и E соответственно. Лучи O_1D и O_2E пересекаются в точке F. Лучи AD и CE пересекаются в точке G. Докажите, что прямая FG проходит через середину AC.

19. (9–11) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точки P и Q диаметрально противоположны C и D соответственно. Касательные к окружности в этих точках пересекают прямую AB в точках E и F (A лежит между E и B, B — между A и F). Прямая EO пересекает AC и BC в точках X и Y, а прямая FO пересекает AD и BD в точках U и V. Докажите, что $XV = YU$.

20. (10) Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается его сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Пусть A_2, B_2 — середины отрезков B_1C_1, A_1C_1 соответственно, O — центр описанной окружности треугольника, P — одна из точек пересечения прямой CO с вписанной окружностью. Прямые PA_2 и PB_2 вторично пересекают вписанную окружность в точках A' и B'. Докажите, что прямые AA' и BB' пересекаются на высоте треугольника, опущенной на AB.

21. (10–11) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle ABD + \angle ACD > \angle BAC + \angle BDC$. Докажите, что $S_{ABD} + S_{ACD} > S_{BAC} + S_{BDC}$.

22. (10–11) Окружность с центром F и парабола с фокусом F пересекаются в двух точках. Докажите, что на окружности найдутся такие четыре точки A, B, C, D, что прямые AB, BC, CD и DA касаются параболы.

23. (10–11) Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Известно, что $AB \cdot CF = 2BC \cdot FA$, $CD \cdot EB = 2DE \cdot BC$, $EF \cdot AD = 2FA \cdot DE$. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

24. (10–11) Дана прямая l в пространстве и точка A, не лежащая на ней. Для каждой прямой l', проходящей через A, построим общий перпендикуляр XY (Y лежит на l') к прямым l и l'. Найдите ГМТ точек Y.

25. (11) Среди вершин двух неравных икосаэдров можно выбрать шесть, являющихся вершинами правильного октаэдра. Найдите отношение ребер икосаэдров.