VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс
Ратмино, 31 июля 2011 г.

5. Через вершину A равностороннего треугольника ABC проведена прямая, не пересекающая отрезок BC. По разные стороны от точки A на этой прямой взяты точки M и N так, что $AM = AN = AB$ (точка B внутри угла MAC). Докажите, что прямые AB, AC, BN, CM образуют вписанный четырехугольник.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. A_0 - середина стороны BC. Прямые A_0B_1 и A_0C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно прямой BC, в точках P и Q. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника PA_0Q лежит на высоте треугольника ABC.

7. На плоскости отмечена точка M, не лежащая на осях координат. По оси ординат движется точка P, а по оси абсцисс точка Q так, что угол PMQ всегда остается прямым. Найдите геометрическое место точек, симметричных M относительно PQ.

8. Пользуясь только линейкой, разделите сторону квадратного стола на n равных частей. Линии можно проводить только на поверхности стола.

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс
Ратмино, 31 июля 2011 г.

5. Из высот треугольника можно составить треугольник. Верно ли, что из его биссектрис также можно составить треугольник?

6. В треугольнике ABC AA_0 и BB_0 — медианы, AA_1 и BB_1 — высоты. Описанные окружности треугольников CA_0B_0 и CA_1B_1 вторично пересекаются в точке M_c. Аналогично определяются точки M_a, M_b. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой, а прямые AM_a, BM_b, CM_c параллельны.

7. В угол вписаны две окружности ω и Ω. Прямая ℓ пересекает стороны угла в точках A и F, окружность ω в точках B и C, окружность Ω в точках D и E (порядок точек на прямой — A, B, C, D, E, F). Пусть $BC = DE$. Докажите, что $AB = EF$.

8. Выпуклый n-угольник P, где $n > 3$, разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Каковы возможные значения n, если n-угольник описанный?

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2011 г.

5. Точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведенной к этой же стороне. Докажите, что эта сторона составляет треть периметра треугольника.

6. Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника $l_1^2 > \sqrt{3}S > l_2^2$, где l_1, l_2 — наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, S — его площадь.

7. В остроугольном треугольнике ABC O — центр описанной окружности, A_1, B_1, C_1 — основания высот. На прямых OA_1, OB_1, OC_1 нашли такие точки A', B', C' соответственно, что четырёхугольники $AOBC'$, $BOCA'$, $COAB'$ вписанные. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AA_1A', BB_1B', CC_1C', имеют общую точку.

8. Есть лист жести размером 6×6. Разрешается надрезать его, но так, чтобы он не распадался на части, и сгибать. Как сделать куб с ребром 2, разделенный перегородками на единичные кубики?