VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс

Ратмино, 1 августа 2012 г.

5. Существует ли выпуклый четырехугольник и точка P внутри него такие, что сумма расстояний от P до вершин больше периметра четырехугольника?

6. Окружность ω описана около треугольника ABC. На продолжении стороны AB за точку B взяли точку B_1 такую, что $AB_1 = AC$. Биссектриса угла A пересекает ω вторично в точке W. Докажите, что ортоцентр треугольника AWB_1 лежит на ω.

7. Высоты AA_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка Q симметрична середине стороны AC относительно AA_1. Точка P — середина отрезка A_1C_1. Докажите, что $\angle QPH = 90°$.

8. Квадрат разрезан на несколько (больше одного) выпуклых многоугольников с попарно различным числом сторон. Докажите, что среди них есть треугольник.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

Ратмино, 1 августа 2012 г.

5. Пусть ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник. На продолжении гипотенузы AB за точку A взята точка D такая, что $AB = 2AD$. Точки M и N на стороне AC таковы, что $AM = NC$. На продолжении стороны CB за точку B взята точка K такая, что $CN = BK$. Найдите угол между прямыми NK и DM.

6. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $BC = a$, $AB = AC = b$. На стороне AC во внешнюю сторону построен треугольник ADC, в котором $AD = DC = a$. Пусть CM и CN — биссектрисы в треугольниках ABC и ADC соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CMN.

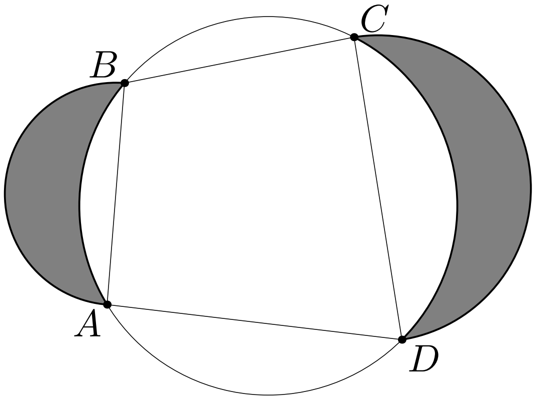
7. В выпуклом пятиугольнике P провели все диагонали, в результате чего он оказался разбитым на десять треугольников и один пятиугольник P'. Из суммы площадей треугольников, прилегающих к сторонам P, вычли площадь P'; получилось число N. Совершив те же операции с пятиугольником P', получили число N'. Докажите, что $N > N'$.

8. Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC. Точки K и L — проекции H на стороны AB и AC. Окружность, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую KL в точках P и Q, а прямую AH — в точках A и T. Докажите, что точка H является центром окружности, вписанной в треугольник PQT.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 1 августа 2012 г.

5. В окружность ω вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого перпендикулярны. На сторонах AB и CD во внешнюю сторону как на диаметрах построены дуги α и β. Рассмотрим две луночки, образованные окружностью ω и дугами α и β (см. рисунок). Докажите, что максимальные радиусы окружностей, вписанных в эти луночки, равны.



6. Дан тетраэдр $ABCD$. Точка X выбрана вне тетраэдра так, что отрезок XD пересекает грань ABC во внутренней точке. Обозначим через A', B', C' проекции точки D на плоскости XBC, XCA, XAB соответственно. Докажите, что $A'B' + B'C' + C'A' \leq DA + DB + DC$.

7. Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.

8. На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрали точку M. Пусть X, Y, Z — центры окружностей, вписанных в треугольники ABM, CMD, AMD соответственно. Пусть H_x, H_y, H_z — ортоцентры треугольников AXB, CYD, AZD соответственно. Докажите, что точки H_x, H_y, H_z лежат на одной прямой.