VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина. Решения.

Финал. Первый день. 8 класс

1. (А.Блинков) Точка M — середина основания AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC. Точка N симметрична M относительно BC. Прямая, параллельная AC и проходящая через точку N, пересекает сторону AB в точке K. Найдите угол AKC.

   Ответ. $90°$.

   Решение. Пусть L — точка пересечения NK и BC (рис. 8.1). Из симметрии относительно BC видим, что $AM = MC = CN$ и $\angle MCB = \angle NCB$. Далее, поскольку $LN \parallel AC$, $\angle CNL = \angle LCM$, а значит, треугольник CNL равнобедренный, и $LN = CN = AM$. Итак, отрезки AM И LN параллельны и равны, поэтому $ALNM$ — параллелограмм, и $AL \parallel MN \perp LC$. Наконец, из симметрии относительно BM получаем $\angle AKC = \angle ALC = 90°$.

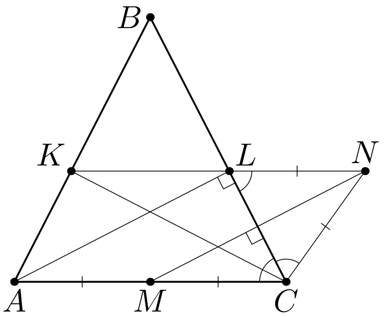

Рис. 8.1

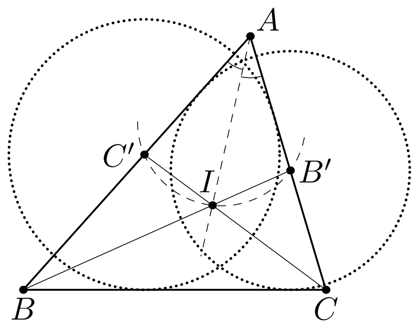

Рис. 8.2

2. (А.Карлюченко) В треугольнике ABC провели биссектрисы BB' и CC', а затем стёрли весь рисунок, кроме точек A, B' и C'. Восстановите треугольник ABC при помощи циркуля и линейки.

   Первое решение. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда $\angle B'IC' = 180° - (\angle IBC + \angle ICB) = 90° + \frac{1}{2}\angle B'AC'$. Значит, если O — центр окружности ω, описанной около $\triangle BCI$, то $\angle B'OC' = 180° - \angle B'AC'$. Таким образом, можно построить точку O, а затем — точку I (как точку пересечения меньшей дуги $B'C'$ окружности ω с биссектрисой угла $B'AC'$, рис. 8.2). Теперь точки B и C строятся как пересечение прямых $B'I$, AC' и $C'I$, AB' соответственно.

   Второе решение. Так как BB' — биссектриса угла B, точка B' равноудалена от прямых BC и AB. Поэтому окружность с центром B', касающаяся AC', касается также BC. Аналогично, прямая BC касается окружности с центром C', касающейся AB' (рис. 8.2). Следовательно, для восстановления точек B и C достаточно провести общую внешнюю касательную к этим двум окружностям (лежащую по другую сторону от $B'C'$, чем A) и найти точки ее пересечения с AB' и AC'.

3. (Л.Штейнгарц, Израиль) Квадратный лист бумаги согнули по прямой так, что одна из вершин квадрата оказалась на несмежной стороне (см. рис. 8.3.1). При этом образовалось три треугольника. В эти треугольники вписали окружности. Докажите, что радиус одной из этих окружностей равен сумме радиусов двух других.

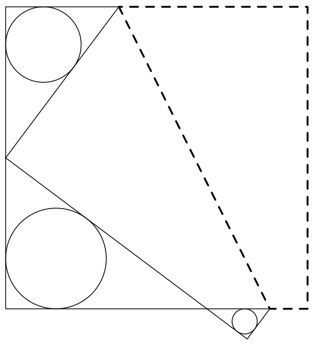

Рис. 8.3.1

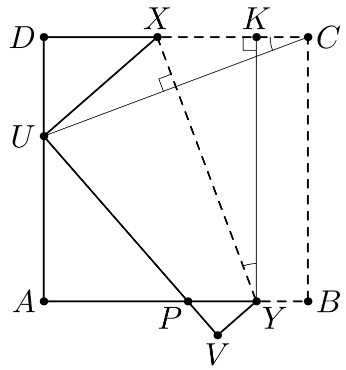

Рис. 8.3.2

Решение. Пусть квадрат $ABCD$ перегнули по прямой XY; обозначим получившиеся точки, как на рис. 8.3.2. Заметим, что в прямоугольном треугольнике центр вписанной окружности, точки её касания с катетами и вершина прямого угла образуют квадрат, поэтому её радиус равен отрезку касательной из этой вершины. Значит, диаметры окружностей, вписанных в треугольники UDX, UAP и PVY, равны соответственно $d_1 = UD + DX - XU$, $d_2 = UA + AP - UP$ и $d_3 = PV + VY - PY$. Обозначив сторону квадрата через a и заметив, что $UX = XC$ и $VY = YB$, получаем

$$d_1+d_3-d_2 = DU+(a-CX)-CX+PV+BY-PY-(a-DU)-(a-PY-BY)+(a-PV) = \\ = 2DU + 2BY - 2CX.$$

Опустим перпендикуляр YK на CD. Точки C и U симметричны относительно XY, поэтому $XY \perp CU$, и $\angle DCU = \angle KYX$. Кроме того, $KY = CD = a$. Следовательно, прямоугольные треугольники CDU и YKX равны, поэтому $DU = KX = CX - CK = CX - BY$. Это и значит, что $d_1 + d_3 - 2_d = 0$.

Замечание. В первой части решения можно рассуждать по-другому. Прямоугольные треугольники DXY, VYP и AUP подобны; значит, радиусы вписанных в них окружностей относятся так же, как соответствующие катеты. Поэтому достаточно доказать равенство $DX + VY = AU$, или $DX + CK = a - DU$. Но из второй части решения следует, что $DU = KX$, откуда и следует требуемое.

4. (А. Акопян, Д.Швецов) Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 120°$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяли точки P и Q соответственно так, что лучи AQ и CP пересекаются под прямым углом. Докажите, что $\angle PQB = 2\angle PCQ$.

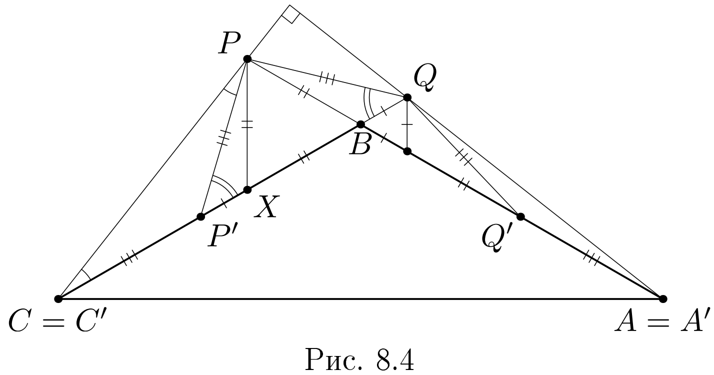

Рис. 8.4

Решение. Выберем на луче BC точки X и Q' такие, что $BX = BP$, $BQ' = BP + BQ$. Тогда треугольник BPX — равнобедренный с углом 60°, значит, он равносторонний, и $PX = BP$, $\angle PXQ' = 120°$. Тогда треугольники PBQ и PXQ' равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $PQ' = PQ$ и $\angle PQ'B = \angle PQB$. Аналогично, выбрав на луче BA точку P' такую, что $BP' = BP + BQ$, получаем, что $QP' = QP$ и $\angle QP'B = \angle QPB$ (рис. 8.4).

Отложим теперь на продолжениях отрезков BP' и BQ' за точки P' и Q' отрезки $Q'A' = P'C' = PQ$. Тогда $BA' = BP' + P'A' = BP + BQ + PQ = BQ' + Q'C' = BC'$. Далее, треугольники $QP'A'$ и $PQ'C'$ равнобедренные, поэтому $\angle P'A'Q + \angle Q'C'P = \frac{1}{2}(\angle QP'B + \angle PQ'B) = \frac{1}{2}(\angle BPQ + \angle BQP) = 30°$. Значит, угол между прямыми QA' и PC' равен $180° - (\angle P'A'Q + \angle Q'C'P + \angle BA'C' + \angle BC'A') = 90°$, Но, если $BA' = BC' < BA$, то этот угол должен быть меньше $90°$, а если $BA' > BA$, то больше. Значит, $A' = A$, $C' = C$, и $\angle PQB = \angle PQ'B = 2\angle PCQ'$, что и требовалось доказать.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина. Решения.

Финал. Второй день. 8 класс

5. (А.Акопян) Существует ли выпуклый четырехугольник и точка P внутри него такие, что сумма расстояний от P до вершин больше периметра четырехугольника?

   Ответ. Да.

   Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AD = BD = CD = x$, $AB = BC = y < x/4$, а P — такая точка на диагонали BD, что $PD = y$ (рис. 8.5). Тогда $PB + PD = BD = x$, $PA = PC > AD - PD = x - y$, следовательно, $PA + PB + PC + PD > 3x - 2y > 2x + 2y = AB + BC + CD + DA$.

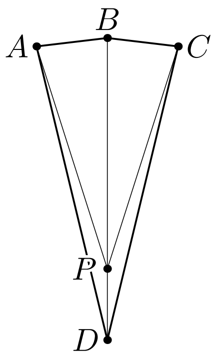

Рис. 8.5

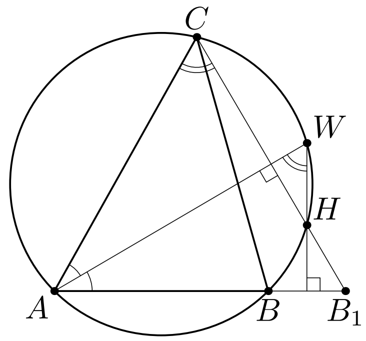

Рис. 8.6

6. (А.Туманян, Украина) Окружность ω описана около треугольника ABC. На продолжении стороны AB за точку B взяли точку B_1 такую, что $AB_1 = AC$. Биссектриса угла A пересекает ω вторично в точке W. Докажите, что ортоцентр треугольника AWB_1 лежит на ω.

   Решение. Пусть H — вторая точка пересечения описанной окружности с прямой CB_1. Поскольку AW — биссектриса равнобедренного треугольника AB_1C, имеем $B_1H \perp AW$. Далее, если точки C и W лежат по одну сторону от AH, то $\angle AWH = \angle ACH = 90^\circ - \angle CAW = 90^\circ - \angle WAB$, то есть $WH \perp AB_1$ (рис. 8.6). Если они лежат по разные стороны, то $\angle AWH = 180^\circ - \angle ACH = 90^\circ + \angle WAB$, откуда опять же следует $WH \perp AB_1$. Наконец, если эти точки совпадают, то треугольник AWB_1 прямоугольный, и $H = W$ — его ортоцентр.

   Итак, в любом случае точка H лежит на двух высотах треугольника AWB_1, то есть является его ортоцентром.

7. (Д.Швецов) Высоты AA_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка Q симметрична середине стороны AC относительно AA_1. Точка P — середина отрезка A_1C_1. Докажите, что $\angle QPH = 90^\circ$.

   Первое решение. Пусть K — середина AC. Так как $KQ \parallel BC$, то KQ делит высоту AA_1 пополам. Значит, в четырёхугольнике AKA_1Q диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, то есть он — ромб. Кроме того, из симметрии $HQ = HK$.

Аналогично, пусть R — точка, симметричная K относительно CC_1; тогда CKC_1R — ромб, и $HQ = HR$ (рис 8.7.1). Значит, отрезки A_1Q, AK, KC и C_1R параллельны и равны, откуда QA_1RC_1 — параллелограмм, а тогда P — середина RQ. Значит, HP — медиана в равнобедренном треугольнике HQR, а значит, и высота, что и требовалось доказать.

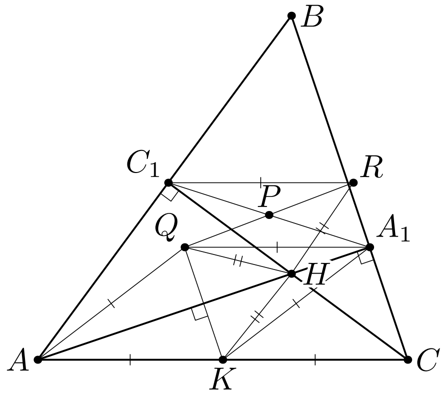

Рис. 8.7.1

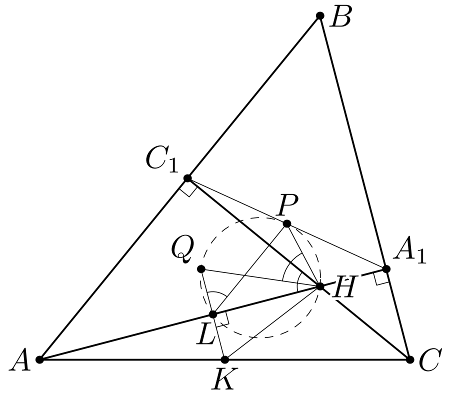

Рис. 8.7.2

Второе решение. Пусть L — середина AA_1. Тогда PL — средняя линия треугольника AA_1C_1, поэтому $\angle PLH = \angle BAA_1$ и, следовательно, $\angle PLQ = 90° - \angle PLH = \angle C_1HA$. С другой стороны, точки A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AC, поэтому треугольники A_1C_1H и CAH подобны; значит, их медианы HP и HK образуют равные углы со сторонами HC_1 и HA соответственно. Значит, $\angle QHA = \angle KHA = \angle PHC_1$ и поэтому $\angle PHQ = \angle C_1HA$ (рис. 8.7.2). Итак, $\angle PHQ = \angle C_1HA = \angle PLQ$, следовательно, точки P, Q, L, H лежат на одной окружности и $\angle QPH = 180° - \angle QLH = 90°$.

8. (А.Заславский) Квадрат разрезан на несколько (больше одного) выпуклых многоугольников с попарно различным числом сторон. Докажите, что среди них есть треугольник.

Решение. Пусть квадрат разрезан на n многоугольников. Тогда каждый из этих многоугольников имеет не более одной стороны на каждой из сторон квадрата; с любым же из остальных многоугольников разбиения он граничит не более, чем по одной стороне. Следовательно, всего у него может быть не более $4 + (n - 1) = n + 3$ сторон.

Итак, количество сторон любого многоугольника разбиения не меньше 3 и не больше $n+3$. Значит, если среди них нет треугольника, то количества их сторон должны быть равны $4, 5, \ldots, n + 3$. Но тогда $n + 3$-угольник должен примыкать ко всем сторонам квадрата. Поэтому каждый из остальных многоугольников может примыкать не более, чем к двум сторонам квадрата и, следовательно, иметь не более $2+(n-1) = n+1$ стороны. Противоречие.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина. Решения.

Финал. Первый день. 9 класс

1. (Л.Штейнгарц, Израиль) В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Затем провели высоту A_1A_2 в треугольнике OBA_1 и высоту B_1B_2 в треугольнике OAB_1. Докажите, что отрезок A_2B_2 параллелен стороне AB.

   Решение. Поскольку $\angle CAA_1 = 90^\circ - \angle ACB = \angle CBB_1$, прямоугольные треугольники OA_1B и OB_1A подобны (рис. 9.1). Значит, их высоты A_1A_2 и B_1B_2 делят отрезки OB и OA в одном и том же отношении. Отсюда по обратной теореме Фалеса получаем утверждение задачи.

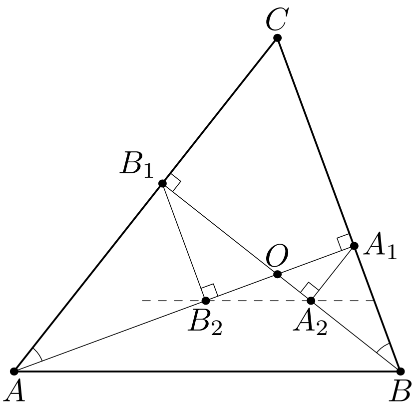

Рис. 9.1

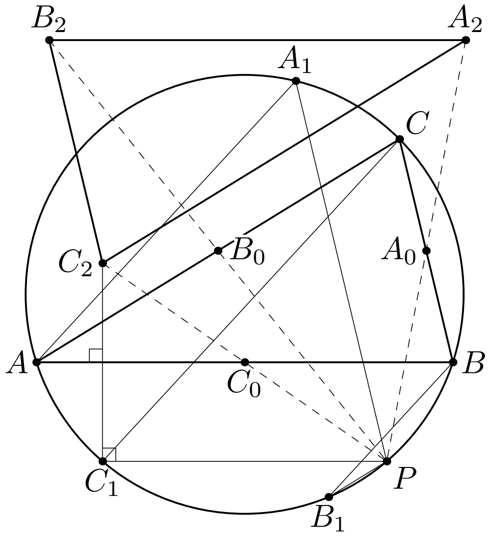

Рис. 9.2

2. (Д.Швецов, А.Заславский) Через вершины A, B, C треугольника ABC проведены три параллельные прямые, пересекающие вторично описанную около него окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точкам A_1, B_1, C_1 относительно сторон BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

   Решение. Проведем через A_1, B_1 и C_1 прямые a, b и c, параллельные соответственно BC, CA и AB; покажем, что они вторично пересекают описанную окружность в одной и той же точке. Действительно, пусть c пересекает окружность вторично в точке P (если она касается окружности, то $P = C_1$). Тогда, поскольку $AB \parallel C_1P$ и $AA_1 \parallel CC_1$, получаем $\smile BP = \smile C_1A = \smile A_1C$ (здесь через $\smile XY$ обозначается величина дуги, проходимой от X к Y по часовой стрелке). Это и означает, что $A_1P \parallel BC$, то есть a проходит через P. Аналогично, b проходит через P (рис.9.2).

   Далее, точки C_1 и P симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB, а точки C_1 и C_2 симметричны относительно AB; это значит, что P и C_2 симметричны относительно середины C_0 отрезка AB; аналогично, A_2 и B_2 симметричны точке P относительно середин A_0 и B_0 соответствующих сторон треугольника ABC. Таким образом, $\overrightarrow{A_2B_2} = 2\overrightarrow{A_0B_0} = -\overrightarrow{AB}$; аналогично, $\overrightarrow{A_2C_2} = -\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_2C_2} = -\overrightarrow{BC}$. Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ центрально симметричны, и прямые, соединяющие их соответствующие вершины, проходят через центр симметрии.

3. (В.Протасов) В треугольнике ABC провели биссектрису CL. В треугольники CAL и CBL вписали окружности, которые касаются прямой AB в точках M и N соответственно. Затем все, кроме точек A, L, M и N, стерли. С помощью циркуля и линейки восстановите треугольник.

Первое решение. Пусть K — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AB (точка K лежит на отрезке MN). Заметим, что

$$MK = AK - AM = \frac{AB + AC - BC}{2} - \frac{AL + AC - LC}{2} = \frac{BL + LC - BC}{2} = LN.$$

Далее, пусть I_a, I_b и I — центры окружностей ω_a, ω_b и ω, вписанных в треугольники ACL, BCL и ABC, соответственно. По свойству биссектрисы и теореме Фалеса имеем $\dfrac{AL}{IL} = \dfrac{AI_a}{I_aI} = \dfrac{AM}{MK}$, то есть $IL = \dfrac{AL \cdot MN}{AM}$.

Итак, мы можем последовательно построить точку K, затем I (как пересечение окружности с центром в L и перпендикуляра к MN в точке K), I_a и I_b (как пересечение биссектрис углов ALI и CLI с перпендикулярами к отрезку MN в его концах), окружности ω_a и ω_b, и, наконец, точки C (как пересечение касательных к ω_a из A и L) и B (как пересечение касательной к ω_b с MN).

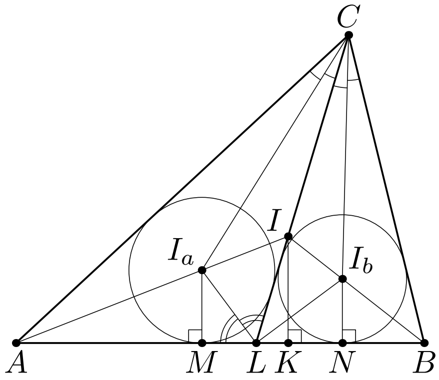

Рис. 9.3

Второе решение. Докажем равенство $1/AM + 1/ML = 1/LN + 1/NB$. Обозначим через $x = AC$, $y = CL$, $z = LA$ длины сторон треугольника ACL, через p, S и r — его полупериметр, площадь и радиус вписанной окружности соответственно, а через h — его высоту из вершины C. Тогда $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{ML} = \dfrac{1}{p-y} + \dfrac{1}{p-x} = \dfrac{z}{(p-x)(p-y)}$.

Далее, из формулы Герона получаем $(p-x)(p-y) = \dfrac{S^2}{p(p-z)} = \dfrac{rp \cdot zh/2}{p(p-z)}$, откуда $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{ML} = \dfrac{2(p-z)}{rh} = \dfrac{2}{h\operatorname{tg}(\angle ACL/2)}$. В треугольнике BCL угол при вершине C и высота из этой вершины такие же, откуда и следует искомое равенство.

Таким образом, зная отрезки AM, ML, LN, мы можем найти отрезок NB и построить точку B. Далее, из соотношений $AC - CL = AM - LM$ и $BC - CL = BN - LN$ мы находим разность $AC - BC = AM - LM - BN + LN = p$, а из равенства $AC/BC = AL/BL = q$ — их отношение. Из этих двух условий можно найти длины сторон $AC = \dfrac{p}{q-1}$ и $BC = \dfrac{pq}{q-1}$, а значит — и построить точку C.

4. (Б.Френкин) При каких $n > 3$ правильный n-угольник можно разрезать диагоналями (возможно, пересекающимися внутри него) на равные треугольники?

Ответ. При четных.

Первое решение. Если $n = 2k$, то k главных диагоналей разрезают правильный n-угольник на n равных треугольников.

Пусть теперь n нечётно; предположим, что правильный n-угольник P получилось разрезать требуемым образом. Рассмотрим треугольники разрезания, в которых одна из сторон является стороной P. Против этих равных сторон в каждом таком треугольнике лежит одинаковый угол α. Пусть остальные два угла треугольника равны β и γ. Возможны два случая.

Случай 1. Пусть эти углы не равны между собой, скажем, $\beta < \gamma$. Назовём сторону n-угольника β-стороной или γ-стороной в соответствии с тем, какой угол примыкает к её левому концу (если смотреть изнутри). Выберем некоторую β-сторону b и в примыкающем треугольнике разрезания рассмотрим сторону угла β, лежащую внутри P. Она лежит на диагонали, и на другом конце эта диагональ также образует угол β с некоторой стороной c многоугольника (рис. 9.4.1). Этот угол не может быть разрезан на углы другими диагоналями; действительно, иначе угол разбиения, примыкающий к c, должен быть равен β или $\gamma > \beta$, но он меньше, чем β — противоречие. Итак, наш угол β принадлежит треугольнику, примыкающему к γ-стороне. Наоборот, рассматривая угол β, примыкающий к произвольной γ-стороне c, мы найдём β-сторону b, сопоставленную ей. Итак, β- и γ-стороны разбиваются на пары, и общее их количество чётно; противоречие.

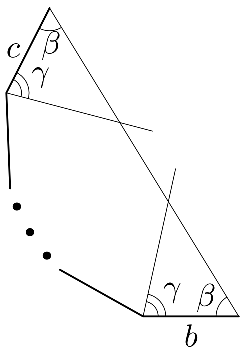

Рис. 9.4.1

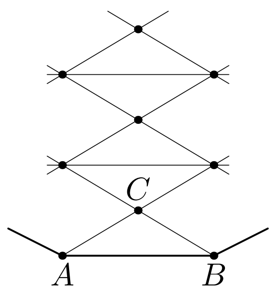

Рис. 9.4.2

Случай 2. Пусть теперь $\beta = \gamma$, и в треугольнике разрезания ABC, содержащем «нижнюю» сторону AB многоугольника, угол при C равен α. Вертикальный к этому угол, равный α, лежит в некотором другом треугольнике разрезания, а против него — сторона, равная и параллельная AB. По другую сторону от неё в некотором треугольнике разрезания лежит угол, равный α, и т.д. Получилась цепочка треугольников (рис. 9.4.2); рассмотрим последний треугольник UVW этой цепочки. Если он ориентирован не так, как ABC, то его верхняя сторона, равная и параллельная AB, является стороной P, а тогда n чётно, поскольку в правильном нечётноугольнике нет параллельных сторон. В противном случае угол при верхней вершине W треугольника UVW равен α, и W — вершина P. Тогда обе стороны UV и VW либо являются сторонами P, либо лежат на диагоналях. В первом случае получаем $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, и угол n-угольника также равен 60°, откуда $n = 3$ вопреки условию. Во втором же случае угол n-угольника при вершине W содержит как минимум угол α и два угла по β, откуда $\alpha + 2\beta < 180^\circ$. С другой стороны, $\alpha + 2\beta = 180^\circ$ как сумма углов треугольника. Противоречие.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что при нечётном n указанное разрезание невозможно. Так как n нечетно, никакие две диагонали не перпендикулярны. Поэтому через любую точку пересечения двух диагоналей должна проходить, по крайней мере, ещё одна диагональ (в противном случае образованные диагоналями смежные углы равны двум разным углам одного треугольника, что невозможно). Докажем теперь, что из каждой вершины многоугольника выходит не меньше двух диагоналей.

Предположим, что из вершины A_i не выходит ни одной диагонали. Тогда треугольником, содержащим эту вершину, будет $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, и один из углов треугольника разбиения равен углу n-угольника. Но тогда каждая сторона n-угольника лежит в треугольнике разбиения, содержащем ещё одну его сторону. Значит, стороны разбиваются на пары, что невозможно.

Предположим теперь, что из вершины A_i выходит одна диагональ. Тогда она делит угол при этой вершине на два неравных угла $\beta < \gamma$. Оба эти угла примыкают к сторонам n-угольника; значит, в любом треугольнике разбиения к стороне, равной стороне n-угольника, примыкают углы, равные β и γ. Итак, сумма всех углов треугольников разбиения, примыкающих к сторонам n-угольника, равна $n(\beta + \gamma)$, что равно сумме углов n-угольника. Значит, из каждой вершины выходит ровно одна диагональ, что опять же невозможно в силу нечётности n. Утверждение доказано.

Итак, пусть n-угольник разрезан на k треугольников; сумма всех их углов равна $k\pi$. Вклад углов n-угольника в эту сумму равен $(n-2)\pi$, значит, сумма углов при точках пересечения диагоналей равна $(k-n+2)\pi$; каждая такая точка добавляет 2π, поэтому количество этих вершин равно $(k-n+2)/2$. Поскольку каждая такая точка принадлежит по крайней мере шести треугольникам, а каждая вершина многоугольника — трём, то общее число треугольников не меньше, чем $(3(k-n+2)+3n)/3 = k+2 > k$ — противоречие.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина. Решения.

Финал. Второй день. 9 класс

5. (М.Кунгожин) Пусть ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник. На продолжении гипотенузы AB за точку A взята точка D такая, что $AB = 2AD$. Точки M и N на стороне AC таковы, что $AM = NC$. На продолжении стороны CB за точку B взята точка K такая, что $CN = BK$. Найдите угол между прямыми NK и DM.

   Ответ. $45°$.

   Решение. Пусть L — проекция M на AB. Заметим, что $\frac{ML}{CN} = \frac{AL}{BK} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; поэтому и $\frac{LD}{CK} = \frac{AL+AD}{BK+BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, прямоугольные треугольники MLD и NCK подобны, и $\angle MDL = \angle NKC$ (рис.9.5). Поэтому угол между прямыми NK и MD равен углу между прямыми KC и LD, то есть $45°$.

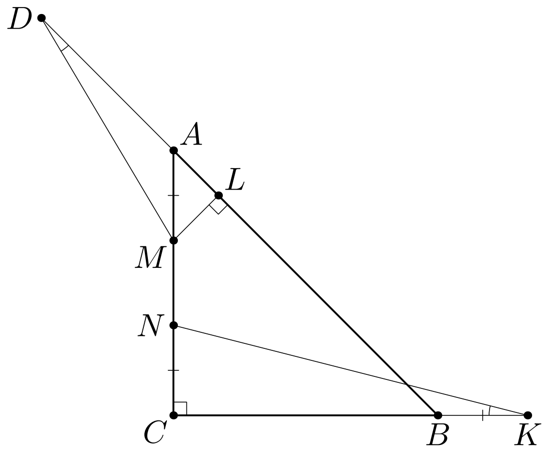

Рис. 9.5

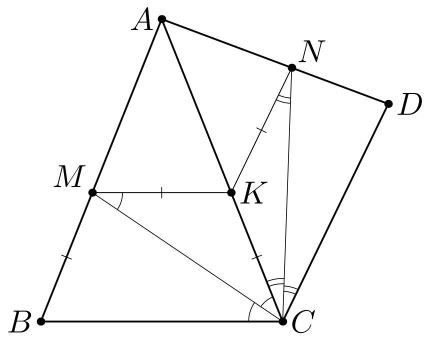

Рис. 9.6

6. (М.Рожкова) Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $BC = a$, $AB = AC = b$. На стороне AC во внешнюю сторону построен треугольник ADC, в котором $AD = DC = a$. Пусть CM и CN — биссектрисы в треугольниках ABC и ADC соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CMN.

   Ответ. $\frac{ab}{a+b}$.

   Решение. Пусть K — такая точка на отрезке AC, что $MK \parallel BC$. Тогда $\angle MCA = \angle MCB = \angle CMK$, поэтому $MK = KC$; кроме того, из симметрии $KC = MB$. Далее, по теореме Фалеса и свойству биссектрисы имеем $\frac{CK}{AK} = \frac{BM}{AM} = \frac{a}{b} = \frac{DN}{AN}$. Следовательно, $KN \parallel CD$; аналогично предыдущему, получаем $KN = KC$. Таким образом, K — центр описанной окружности треугольника CMN, а ее радиус по теореме о биссектрисе равен $KC = MB = ab/(a+b)$ (рис.9.6).

7. (А.Белов) В выпуклом пятиугольнике P провели все диагонали, в результате чего он оказался разбитым на десять треугольников и один пятиугольник P'. Из суммы площадей треугольников, прилегающих к сторонам P, вычли площадь P'; получилось число N. Совершив те же операции с пятиугольником P', получили число N'. Докажите, что $N > N'$.

Решение. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ — исходный пятиугольник, $B_1B_2B_3B_4B_5$ — пятиугольник, образованный его диагоналями (B_1 — точка пересечения A_2A_4 с A_3A_5 и т.д.), $C_1C_2C_3C_4C_5$ — пятиугольник, образованный диагоналями $B_1B_2B_3B_4B_5$ (C_1 — точка пересечения B_2B_4 с B_3B_5 и т.д.). Продолжим нумерацию вершин циклически (то есть $A_{i+5} = A_i$ и т.д.). Для удобства будем обозначать площадь многоугольника P через $[P]$.

Заметим, что $N' = \sum_i [B_iB_{i+1}B_{i+2}] - [B_1B_2B_3B_4B_5]$, поскольку в сумме справа как раз пятиугольник $C_1C_2C_3C_4C_5$ учтён с кратностью -1, треугольники вида $B_iB_{i+1}C_{i+3}$ — с коэффициентом 1, а треугольники вида $C_iC_{i+1}B_{i+3}$ — с нулевым коэффициентом. Значит, требуемое неравенство равносильно неравенству

$$\sum_i [A_iA_{i+1}B_{i+3}] > \sum_i [B_iB_{i+1}B_{i+2}].$$

Докажем, что $[A_iA_{i+1}B_{i+3}] > [B_{i+2}B_{i+3}B_{i+4}]$; тогда, сложив пять неравенств такого вида, получим требуемое.

Ясно, что достаточно это доказать при $i = 1$. Присоединив к каждому из треугольников $A_1A_2B_4$ и $B_3B_4B_5$ треугольник $A_1B_3B_4$, получим треугольники $A_1B_3A_2$ и $A_1B_3B_5$ с общим основанием A_1B_3. При этом расстояние от точки B_5 до этого основания меньше, чем от точки A_2 (рис.9.7); значит, $[A_1B_3A_2] > [A_1B_3B_5]$, что и требовалось доказать.

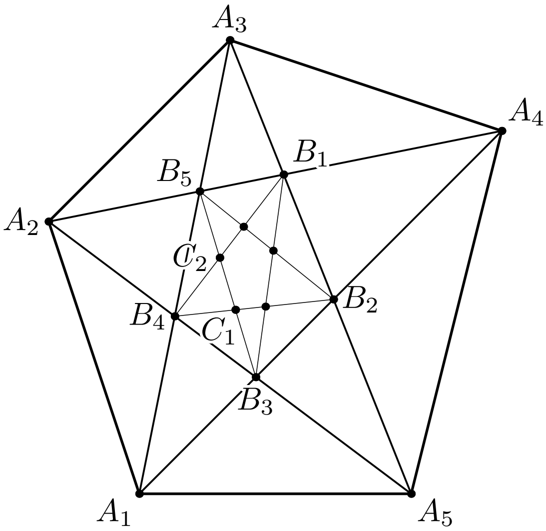

Рис. 9.7

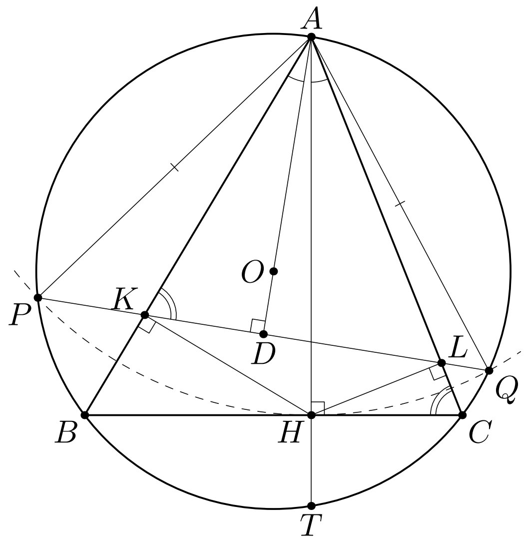

Рис. 9.8

8. (М.Плотников, Украина) Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC. Точки K и L — проекции H на стороны AB и AC. Окружность, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую KL в точках P и Q, а прямую AH — в точках A и T. Докажите, что точка H является центром окружности, вписанной в треугольник PQT.

Решение. Пусть O — центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Из прямоугольных треугольников ABH и ACH имеем $AK \cdot AB = AH^2 = AL \cdot AC$, то есть $AK/AL = AC/AB$. Значит, треугольники ALK и ABC подобны, то есть $\angle AKL = \angle ACB$. Поскольку $\angle OAB = \pi/2 - \angle ACB$, получаем $OA \perp KL$, значит, OA — серединный перпендикуляр к хорде PQ, и поэтому $AP = AQ$. Отсюда TA — биссектриса угла PTQ (рис. 9.8).

Итак, центр I окружности, вписанной в PQT, лежит на TA. Кроме того, по лемме о трезубце $AI = AP$. Значит, для доказательства того, что $I = H$, достаточно показать, что $AH = AP$. Пусть D — точка пересечения AO и KL, а r — радиус Ω. По теореме Пифагора, $AQ^2 - r^2 = AQ^2 - OQ^2 = (AD^2 + DQ^2) - (OD^2 + DQ^2) = AD^2 - (AD - r)^2$, откуда $AQ^2 = 2r \cdot AD$. Далее, заметим, что AH — диаметр окружности, описанной около треугольника AKL, поскольку $\angle AKH = \angle ALH = 90°$; значит, коэффициент подобия треугольников AKL и ABC равен $AH/(2r)$. Отрезки AD и AH — соответственные высоты в этих треугольниках, поэтому $AD/AH = AH/(2r)$, или $AH^2 = 2r \cdot AD = AQ^2$, что и требовалось доказать.

Замечание. Доказательство того, что $AQ = AH$, можно упростить, рассмотрев инверсию с центром A и радиусом AQ. При этой инверсии прямая PQ и окружность Ω переходят друг в друга, поэтому точки B и K также переходят друг в друга. Следовательно, $AQ^2 = AB \cdot AK = AH^2$.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина. Решения.

Финал. Первый день. 10 класс

1. (А.Шаповалов) При каких n можно оклеить в один слой поверхность клетчатого куба $n \times n \times n$ бумажными прямоугольниками 1×2 так, чтобы каждый прямоугольник граничил по отрезкам сторон ровно с пятью другими?

   Ответ. При четных.

   Решение. Если n четно, разобьем каждую грань куба на квадраты 2×2 и заклеим каждый квадрат двумя прямоугольниками так, чтобы к длинным сторонам прямоугольников, лежащих в одном квадрате, примыкали короткие стороны прямоугольников, лежащих в соседних квадратах. Покажем, почему так можно оклеить все грани. Легко понять, что можно оклеить четыре боковые грани, образующие кольцо. При этом на верхней грани один ряд квадратов 2×2 заполнить можно (в углах оклейка будет выглядеть так, как на рис. 10.1 или симметрично); этот ряд определяет однозначно всю оклейку верхней грани; при этом остальные четыре крайних слоя квадратов будут заполнены аналогично, поэтому на остальных рёбрах прямоугольники также будут стыковаться требуемым образом. Аналогично оклеивается нижняя грань.

   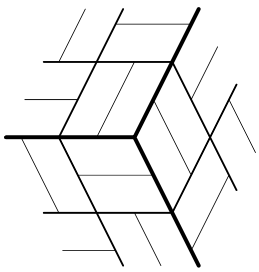

   Рис.10.1

   При нечетных n общее число прямоугольников равно $6n^2/2 = 3n^2$. Если у каждого пять соседей, то общее количество пар соседних прямоугольников будет равно $3n^2 \cdot 5/2$; однако это число нецелое. Значит, требуемая оклейка невозможна.

2. (А.Заславский, Б.Френкин) Точку внутри треугольника назовем *хорошей*, если длины проходящих через нее чевиан обратно пропорциональны длинам соответствующих сторон. Найдите все треугольники, для которых число хороших точек — максимальное возможное.

   Ответ. Для остроугольных.

   Решение. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC, H — его ортоцентр. Рассмотрим любую хорошую точку P; пусть AA_P, BB_P, CC_P — проходящие через неё чевианы. Из условия получаем, что $AA_P/AA_1 = BB_P/BB_1 = CC_P/CC_1$; значит, прямоугольные треугольники AA_1A_P, BB_1B_P и CC_1C_P подобны, поэтому $\angle A_1AA_P = \angle B_1BB_P = \angle C_1CC_P$. При этом возможны два различных случая ориентации этих углов. (Напомним, что ориентированным углом $\angle(\ell, m)$ называется угол, на который надо повернуть против часовой стрелки прямую ℓ, чтобы она стала параллельна m.)

   Случай 1. Пусть $\angle(A_1A, AA_P) = \angle(B_1B, BB_P) = \angle(C_1C, CC_P)$ (в частности, треугольник ABC остроугольный; действительно, если, скажем, $\angle BAC$ не острый, то углы $\angle B_1BB_P$ и $\angle C_1CC_P$ острые и ориентированы по-разному). Из первого равенства следует, что точки P, H. A, B лежит на одной окружности; аналогично, точка P лежит на окружностях, описанных около треугольников ACH и BCH. Но эти три окружности имеют ровно одну общую точку H; значит, P совпадает с H.

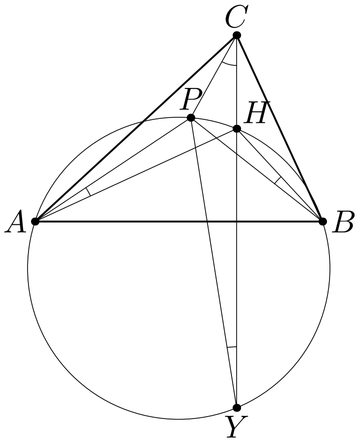

Рис. 10.2.1

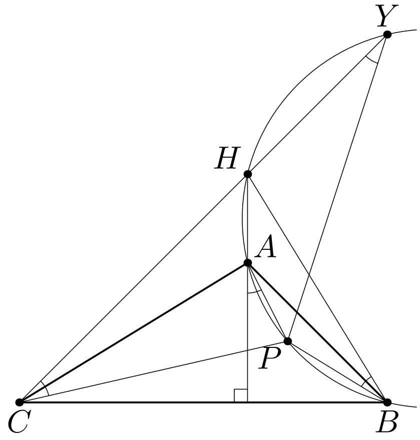

Рис. 10.2.2

Случай 2. Два из трех ориентированных углов равны, а третий (для определённости, $\angle(C_1C, CC_P)$) им противоположен. Тогда, как и в первом случае, точка P лежит на окружности Ω_C, описанной около треугольника ABH (поскольку $\angle(AH, HB) = -\angle(AC, CB)$, эта окружность симметрична описанной окружности Ω треугольника ABC). Пусть прямая CH вторично пересекают Ω_C в точке X (тогда точки C и X симметричны относительно AB; на рис. 10.2.1 и 10.2.2 показаны две таких потенциально возможных конфигурации). Тогда $\angle(PX, XC) = \angle(PB, BH) = -\angle(PC, CX)$; если эти углы ненулевые, то это означает, что треугольник PCX равнобедренный, $PC = PX$. Но тогда точка P лежит на серединном перпендикуляре AB к отрезку CX, что невозможно. Значит, $\angle(PB, BH) = 0$, и $P = H$.

Таким образом, хорошей точкой может быть только ортоцентр треугольника (и в остроугольном треугольнике он ею, очевидно, является). Следовательно, в остроугольном треугольнике хорошая точка одна, а в неостроугольном — ни одной.

Примечание. В случае 2 есть более короткое, но менее элементарное решение. Геометрическим местом точек P, удовлетворяющих одному равенству $\angle(B_1B, BB_P) = \angle(C_1C, CC_P)$, является описанная около треугольника ABC равносторонняя гипербола. Две таких гиперболы могут иметь максимум четыре общих точки, и эти точки — A, B, C и H.

3. (А.Карлюченко) Пусть M и I — точки пересечения медиан и биссектрис неравнобедренного треугольника ABC, а r — радиус вписанной в него окружности. Докажите, что $MI = r/3$ тогда и только тогда, когда прямая MI перпендикулярна одной из сторон треугольника

Первое решение. Пусть C_1 и C_2 — точки касания окружностей ω и ω_C, соответственно вписанной и вневписанной в треугольник ABC, со стороной AB; пусть также C' — середина этой стороны. Тогда, как известно, $C_1C' = C_2C'$. Далее, при гомотетии с центром C, переводящей ω_C в ω, точка C_2 переходит в точку C_3 на ω, диаметрально противоположную C_1 (так как касательные к ω в этих точках параллельны) (рис. 10.3.1). Значит, IC' — средняя линия треугольника $C_1C_2C_3$, поэтому $C'I \parallel CC_2$. Значит, при гомотетии с центром M и коэффициентом -2 точка I переходит в точку N, лежащую на CC_2 (аналогично, она лежит на отрезках, соединяющих другие вершины с соответствующими точками касания вневписанных окружностей; точка N называется *точкой Нагеля* треугольника ABC). Значит, N получается из M' гомотетией с центром I и коэффициентом 3.

Перейдем к решению задачи. Пусть $MI = r/3$. Тогда точка N лежит на ω. Пусть для определённости касательная к ω в этой точке пересекает стороны AC и BC; тогда ω и C лежат по разные стороны от этой касательной, а значит, $N = C_3$. Так как $IC_3 \perp AB$, то и $MI \perp AB$ (рис. 10.3.2).

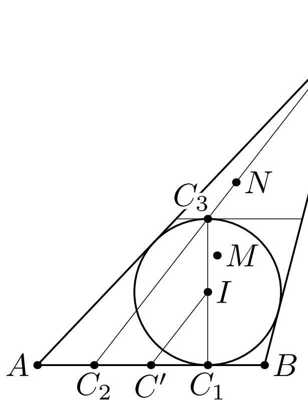

Рис. 10.3.1

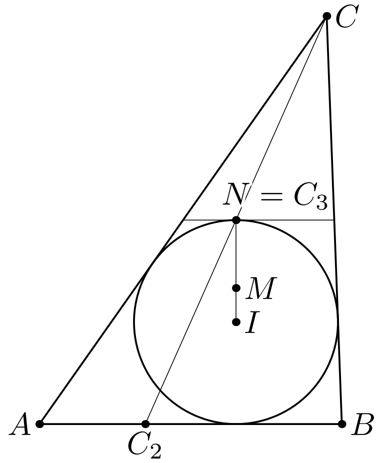

Рис. 10.3.2

Обратно, пусть $AB \perp IM$. Тогда точка N лежит на прямой IC_2; кроме того, она лежит на CC_2. Поскольку треугольник ABC неравнобедренный, эти прямые различны, а значит, $N = C_2$, и $r = IN = 3IM$.

Второе решение. Пусть $AB \perp IM$. Тогда по теореме Пифагора $AM^2 - BM^2 = (AC_1^2 + C_1M^2) - (BC_1^2 + C_1M^2) = (p-a)^2 - (p-b)^2 = c(b-a)$ (здесь C_1 — точка касания AB со вписанной окружностью). Пользуясь формулой длины медианы, получаем $AM^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$, $BM^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, откуда $c(b-a) = \frac{1}{3}(b-a)(a+b)$, или $a + b = 3c$, то есть $p = 2c$. Легко показать, что верно и обратное: если $p = 2c$, то $AB \perp IM$. Наконец, поскольку $c(IM + r)/2 = S_{ABM} = S_{ABC}/3 = pr/3$, получаем $IM + r = 4r/3$, или $IM = r/3$.

Пусть, наоборот, $MI = r/3$. Заметим, что $IA^2 + IB^2 + IC^2 = (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA})^2 + (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MB})^2 + (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MC})^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{IM} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + 3MI^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3MI^2$. Значит, если $MI = r/3$, то $IA^2 + IB^2 + IC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + \frac{1}{3}r^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + r^2)$. Далее, по теореме Пифагора $IA^2 = r^2 + (p-a)^2$; наконец, по формуле Герона $r^2 = S^2/p^2 = (p-a)(p-b)(p-c)/p$. Итак,

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + r^2}{3} = (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + 3r^2,$$

или

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - (p-a)^2 - (p-b)^2 - (p-c)^2 = \frac{8r^2}{3} = \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{3p},$$

что приводится к виду $(p-2a)(p-2b)(p-2c) = 0$. Как показано выше, одна из скобок обращается в нуль тогда и только тогда, когда IM перпендикулярно соответствующей стороне.

4. (Б.Френкин) Дан квадрат. Найдите геометрическое место середин гипотенуз прямоугольных треугольников, вершины которых лежат на попарно различных сторонах квадрата и не совпадают с его вершинами.

Ответ. Все точки криволинейного восьмиугольника, ограниченного дугами восьми парабол с фокусами в вершинах квадрата и директрисами, содержащими несмежную сторону, кроме середин сторон квадрата (рис.10.4.1).

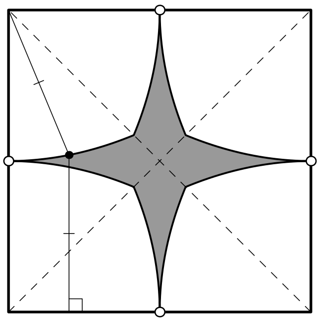

Рис. 10.4.1

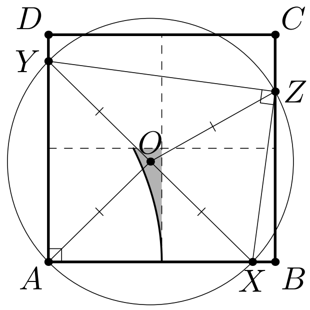

Рис. 10.4.2

Решение. Если концы гипотенузы лежат на противоположных сторонах квадрата, то ее середина лежит на соответствующей средней линии (но не совпадает с её концом). Пусть теперь концы X и Y гипотенузы треугольника XYZ принадлежат соответственно сторонам AB и AD квадрата $ABCD$, а вершина Z — стороне BC (рис. 10.4.2). Обозначим через O середину XY. Точки A и Z лежат на окружности с диаметром XY; поэтому $OA = OX = OY = OZ$, и расстояние от O до A меньше, чем до других вершин квадрата, но не меньше, чем расстояние от O до прямой BC.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от A и BC, является парабола с фокусом A и директрисой BC (вершиной этой параболы является середина AB). Значит, точка O лежит между BC и этой параболой в четверти квадрата, содержащей A. При этом точка O может попасть на параболу, но не может — на среднюю линию (иначе точка Y совпадёт с B).

Рассмотрев аналогично другие случаи расположения вершин треугольника и объединив полученные области, получим криволинейный восьмиугольник P, ограниченный дугами восьми парабол. Вершинами P являются середины сторон квадрата (они не лежат в ГМТ) и точки пересечения парабол с его диагоналями. При этом средние линии квадрата лежат в P; значит, и искомое ГМТ содержится в нём. Осталось показать, что любая точка O этого восьмиугольника, кроме середин сторон квадрата, принадлежит ГМТ.

Если O лежит на средней линии, параллельной AB, и расстояние от неё до AD не превосходит расстояния до BC, то можно в качестве концов гипотенузы X и Y взять проекции O на AB и CD, а в качестве вершины прямого угла — одну из точек пересечения окружности с диаметром XY и стороны AD. Если же точка O лежит в четверти квадрата, содержащей A, между параболой с фокусом A и директрисой BC и соответствующей средней линией, то в качестве X и Y возьмём вторые точки пересечения окружности с центром O и радиусом OA, а в качестве Z — точку пересечения этой окружности со стороной BC (такая точка существует, так как расстояние от O до BC не превосходит OA, а расстояния до точек B и C — превосходят).

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина. Решения.

Финал. Второй день. 10 класс

5. (Ф.Нилов) В окружность ω вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого перпендикулярны. На сторонах AB и CD во внешнюю сторону как на диаметрах построены дуги α и β. Рассмотрим две луночки, образованные окружностью ω и дугами α и β (см. рис. 10.5.1). Докажите, что максимальные радиусы окружностей, вписанных в эти луночки, равны.

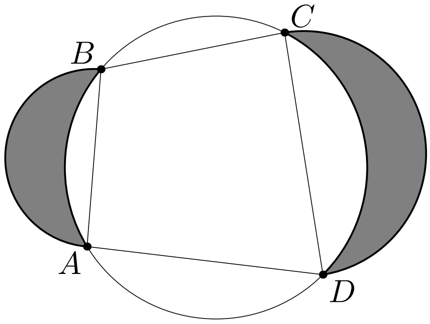

Рис. 10.5.1

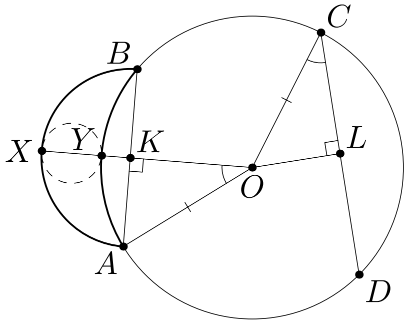

Рис. 10.5.2

Решение. Пусть X и Y — середины дуги α и дуги AB окружности ω соответственно, а O — центр ω. Тогда луночка с вершинами A и B находится между окружностями концентрическими окружностями с центром O и радиусами OY и OX (рис. 10.5.2). Значит, диаметр окружности, вписанной в луночку, не превосходит XY; с другой стороны, окружность с диаметром XY касается ω и α и лежит в луночке. Итак, максимальный диаметр окружности, вписанной в эту луночку, равен XY.

Поскольку $AC \perp BD$, сумма дуг AB и CD окружности ω равна 180°. Пусть K и L — середины отрезков AB и CD; тогда $\angle AOK = 90^\circ - \angle COL = \angle OCL$, поэтому прямоугольные треугольники AOK и OCL равны по гипотенузе и острому углу. Поэтому $OX = OK + KX = OK + KA = (AB + CD)/2$, поэтому $XY = (AB + CD)/2 - r$, где r — радиус ω. Аналогично, максимальный диаметр окружности, вписанной в луночку с вершинами C и D также равен $(AB + CD)/2 - r$.

6. (В.Ясинский) Дан тетраэдр $ABCD$. Точка X выбрана вне тетраэдра так, что отрезок XD пересекает грань ABC во внутренней точке. Обозначим через A', B', C' проекции точки D на плоскости XBC, XCA, XAB соответственно. Докажите, что $A'B' + B'C' + C'A' \leq DA + DB + DC$.

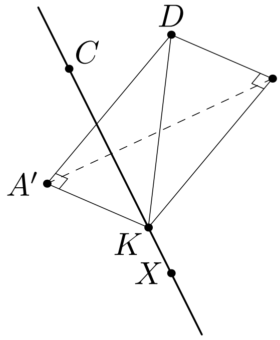

Рис. 10.6

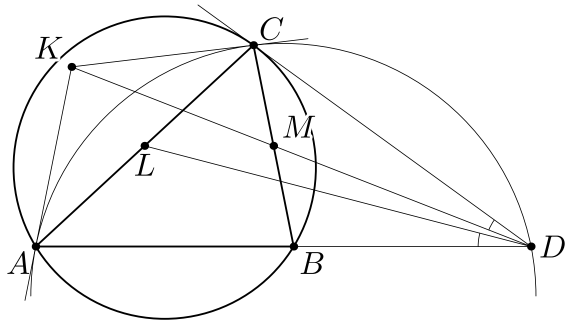

Рис. 10.7

Решение. Пусть K — проекция точки D на XC; тогда $DK \leq DC$. Поскольку $DA' \perp (XBC)$, получаем $\angle DA'K = 90^\circ$; аналогично, $\angle DB'K = 90^\circ$ (рис. 10.6). Значит, точки A' и B' лежат на сфере с диаметром AD, поэтому расстояние между ними не превосходит диаметра: $A'B' \le DK$. Итого, $A'B' \le DK \le DC$. Аналогично, $A'C' \le DB$ и $B'C' \le DA$. Складывая эти три неравенства, получаем требуемое.

7. (Ф.Ивлев) Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.

   Решение. Как известно, в произвольном треугольнике XYZ симедиана XX' (то есть прямая, симметричная медиане из вершины X относительно угла X) проходит через точку пересечения касательных к описанной окружности в точках Y и Z. Значит, прямая DK является симедианой треугольника ACD. Далее, треугольники ACD и BCD подобны. Значит, если DL и DM — их медианы, то $\angle CDK = \angle ADL = \angle CDM$, откуда и следует, что точка M лежит на DK.

8. (Д.Швецов) На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрали точку M. Пусть X, Y, Z — центры окружностей, вписанных в треугольники ABM, CMD, AMD соответственно. Пусть H_x, H_y, H_z — ортоцентры треугольников AXB, CYD, AZD соответственно. Докажите, что точки H_x, H_y, H_z лежат на одной прямой.

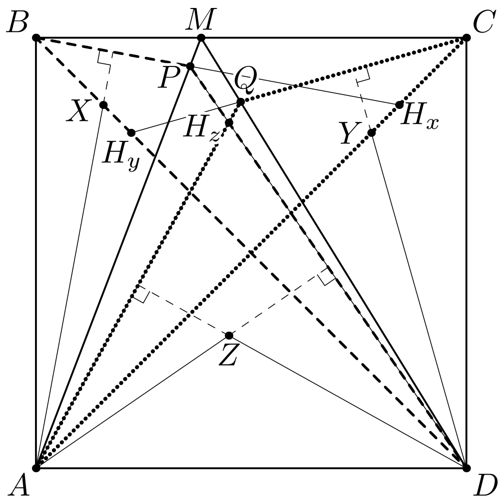

Рис. 10.8

   Решение. Ясно, что точки X и Y лежат на диагоналях BD и AC соответственно; поэтому прямые AC и BD содержат высоты треугольников AXB и CYD соответственно. Отметим на отрезках AM и DM точки P и Q соответственно так, что $AP = DQ = AD$. Тогда AX — биссектриса и, следовательно, высота в равнобедренном треугольнике ABP; значит, ортоцентр H_x — это точка пересечения прямых BP и AC. Аналогично, H_y — это точка пересечения CQ и BD. Наконец, из тех же соображений получаем $AZ \perp DP$, $BZ \perp AQ$, так что H_z — точка пересечения прямых AQ и BP (рис. 10.8).

   Применим теорему Дезарга к треугольникам BPD и CAQ; поскольку прямые BC, PA и DQ, соединяющие их соответственные точки, пересекаются в точке M, получаем, что точки пересечения прямых, содержащих соответственные стороны этих треугольиков, лежат на одной прямой. Как показано выше, эти точки и есть H_x, H_y и H_z.