IX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс

Ратмино, 1 августа 2013 г.

1. Дан равносторонний пятиугольник $ABCDE$ с прямыми углами ABC и AED. Диагонали BD и CE пересекаются в точке F. Докажите, что отрезок FA равен стороне пятиугольника.

2. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Биссектриса угла O_1AO_2 повторно пересекает окружности в точках C и D.

   Докажите, что центр описанной окружности треугольника CBD равноудалён от точек O_1 и O_2.

3. В выпуклом многоугольнике из каждой вершины опущены перпендикуляры на все не смежные с ней стороны. Может ли оказаться так, что основание каждого перпендикуляра попало на продолжения стороны, а не на саму сторону?

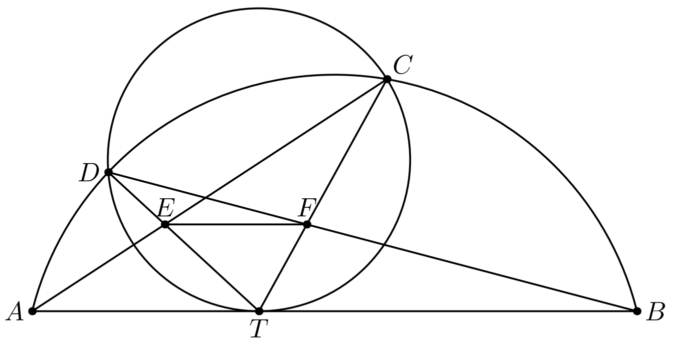
4. В выпуклом четырехугольнике провели диагонали, разрезавшие его на четыре треугольника. В трех из этих треугольников отметили центры описанных окружностей, а в четвертом точку пересечения высот. Затем весь рисунок, кроме этих четырех точек, стерли. Восстановите его.

IX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс

Ратмино, 2 августа 2013 г.

5. Высота AA', медиана BB' и биссектриса CC' треугольника ABC пересекаются в точке K. Известно, что $A'K = B'K$. Докажите, что и отрезок $C'K$ имеет ту же длину.

6. На отрезке AB построена дуга α. Окружность ω касается AB в точке T и пересекает α в точках C и D. Прямые AC и TD пересекаются в точке E, прямые BD и TC — в точке F. Докажите, что прямые EF и AB параллельны.



7. Три окружности касаются друг друга извне и касаются четвёртой окружности изнутри. Их центры были отмечены, а сами окружности стерты. Оказалось, что невозможно установить, какая из отмеченных точек — центр четвертой (самой большой) окружности. Докажите, что отмеченные точки образуют прямоугольник.

8. Пусть P — произвольная точка на дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки B. Биссектриса угла APB пересекает биссектрису угла BAC в точке P_a; биссектриса угла CPB пересекает биссектрису угла BCA в точке P_c. Докажите, что для всех точек P центры описанных окружностей треугольников PP_aP_c лежат на одной прямой.

IX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

Ратмино, 1 августа 2013 г.

1. Пятиугольник $ABCDE$, все углы которого тупые, вписан в окружность ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке E_1; продолжения сторон BC и DE — в точке A_1. Касательная, проведённая в точке B к описанной окружности треугольника BE_1C, пересекает ω в точке B_1; аналогично определяется точка D_1. Докажите, что $B_1D_1 || AE$.

2. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Точки C и D, лежащие на ω_1 и ω_2, по разные стороны от прямой AB, равноудалены от этой прямой. Докажите, что точки C и D равноудалены от середины отрезка O_1O_2.

3. Длина каждой стороны выпуклого 4-угольника $ABCD$ не меньше 1 и не больше 2. Его диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{AOB} + S_{COD} \leq 2(S_{AOD} + S_{BOC})$.

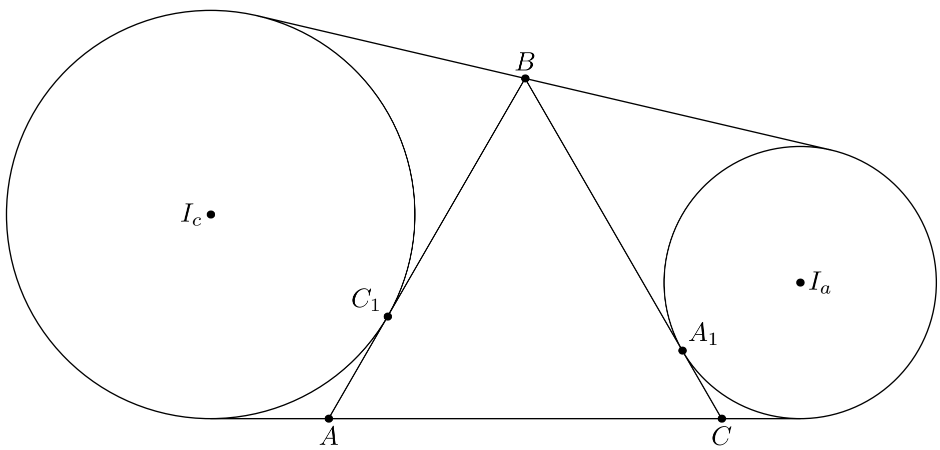
4. Дан треугольник ABC и точка F, такая что $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$. Прямая, проходящая через F и перпендикулярная BC, пересекает медиану, проведенную из вершины A, в точке A_1. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 являются тремя вершинами правильного шестиугольника, три другие вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC.

IX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

Ратмино, 2 августа 2013 г.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки E и F. Прямые EF и BC пересекаются в точке S. Точки M и N — середины отрезков BC и EF соответственно. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная MN, пересекает BC в точке K. Докажите, что $BK/CK = FS/ES$.

6. Через вершину B правильного треугольника ABC проводится прямая l. Окружность ω_a (I_a — центр) касается стороны BC в точке A_1, прямых l, AC. Окружность ω_c (I_c — центр) касается стороны BA в точке C_1, прямых l, AC. Докажите, что ортоцентр треугольника A_1BC_1 лежит на прямой I_aI_c.



7. Две окружности ω_1, и ω_2 пересекаются в точке O. Окружность с центром O и произвольным радиусом R пересекает ω_1 в точках A и B, а ω_2 — в точках C и D. Пусть X — точка пересечения прямых AC и BD. Докажите, что при изменении радиуса R все точки X лежат на одной прямой

8. Три велосипедиста ездят по кольцевой дороге радиуса 1 км в одном направлении с постоянными различными скоростями. Верно ли, что найдется момент, когда расстояние между любыми двумя из них будет больше 1 км?

IX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

Ратмино, 1 августа 2013 г.

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Точки E и F — середины не содержащих других вершин дуг AB и CD соответственно. Прямые, проходящие через точки E и F параллельно диагоналям четырехугольника $ABCD$, пересекаются в точках K и L. Докажите, что прямая KL содержит точку O.

2. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Из точки H провели перпендикуляры к прямым B_1C_1 и A_1C_1, которые пересекли лучи CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что перпендикуляр из точки C к прямой A_1B_1 проходит через середину отрезка PQ.

3. В пространстве отмечены 5 точек. Известно, что это центры сфер, четыре из которых попарно касаются извне и касаются изнутри пятой сферы. При этом невозможно определить, какая точка является центром пятой (самой большой) сферы. Найдите отношение радиусов наибольшей и наименьшей сфер.

4. Даны две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Из произвольной точки C внешней окружности проведены касательные к внутренней, вторично пересекающие внешнюю в точках A и B. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей треугольников ABC.

IX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 2 августа 2013 г.

5. Окружность k проходит через вершины B и C треугольника ABC ($AB > AC$) и пересекает продолжения сторон AB и AC за точки B и C в точках P и Q соответственно. Пусть AA_1 — высота треугольника ABC. Известно, что $A_1P = A_1Q$. Докажите,что угол PA_1Q в два раза больше угла A треугольника ABC.

6. В описанном четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD \neq BC$. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке L. Докажите, что угол ALB острый.

7. Пусть X — такая точка внутри треугольника ABC, что $XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB$; I_1, I_2, I_3 — центры вписанных окружностей треугольников XBC, XCA и XAB соответственно. Докажите, что прямые AI_1, BI_2 и CI_3 пересекаются в одной точке.

8. Дан бумажный треугольник, площадь которого равна $1/2$, а квадраты всех сторон — целые числа. Докажите, что в него можно завернуть квадрат с площадью $1/4$ (треугольник можно сгибать, но нельзя резать).