IX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Н.Москвитин) (8) В треугольнике ABC $AB = BC$. Из точки E на стороне AB опущен перпендикуляр ED на BC. Оказалось, что $AE = DE$. Найдите угол DAC.

   Ответ. 45°.

   Решение. По теореме о внешнем угле $\angle AED = 90^\circ + \angle B = 270^\circ - 2\angle A$ (рис.1). Следовательно, $\angle EAD = (180^\circ - \angle AED)/2 = \angle A - 45^\circ$.

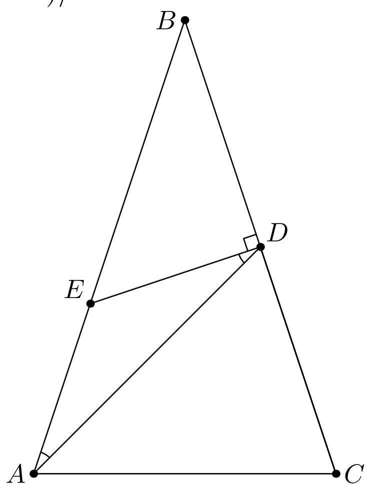

Рис.1

2. (Л.Штейнгарц, Израиль) (8) В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) угол при вершине C равен 20°. Биссектрисы углов A и B пересекают боковые стороны треугольника соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что треугольник A_1OB_1 (где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC) является равносторонним.

   Решение. Возьмем на сторонах BC и AC точки A' и B' так, что $AB' = B'O = OA' = A'B$. Очевидно, что $A'B' \parallel AB$, т.е. $\angle CA'B' = \angle CBA = 80^\circ$. Кроме того, $\angle A'OB = \angle A'BO = \angle BCO = 10^\circ$. Значит, $\angle CA'O = 20^\circ$, а $\angle OA'B' = 60^\circ$, т.е. треугольник $OA'B'$ — равносторонний. Тогда $A'B' = A'B$ и $\angle A'BB' = \angle A'B'B = \angle ABB'$ (рис.2). Следовательно, точка B' совпадает с B_1. Аналогично, A' совпадает с A_1, ч.т.д.

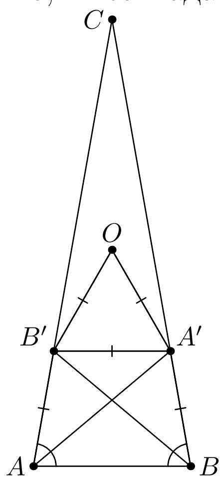

Рис.2

3. (Д.Швецов) (8) Вневписанная окружность, соответствующая вершине A прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$), касается продолжений сторон AB, AC в точках A_1,

A_2 соответственно; аналогично определим точки C_1, C_2. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на прямые C_1C_2, A_1C_1, A_1A_2, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — четвертая вершина прямоугольника $ABCD$. Так как $AI \perp A_1A_2$, $CI \perp C_1C_2$, то перпендикуляры из A на CC_1 и из C на AA_1 пересекаются в центре J окружности, вписанной в треугольник ACD. Поэтому достаточно доказать, что $DI \perp A_1C_1$. Пусть X, Y, Z — проекции I на AB, BC, CD соответственно. Тогда $BC_1 = XC_2 = ZD$ и $A_1B = CY = IZ$, значит, треугольники A_1BC_1 и IZD равны, т.е. $\angle IDZ = \angle A_1C_1B$ (рис.3), откуда и следует искомая перпендикулярность.

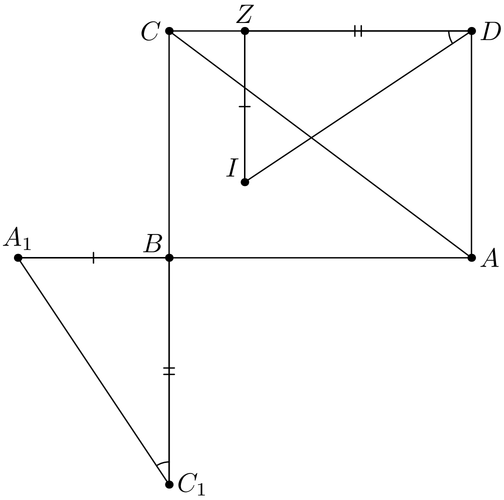

Рис.3

4. (Ф.Ивлев) (8) Дан неравнобедренный треугольник ABC. Точка O — центр описанной около него окружности, а точка K — центр окружности w, описанной около треугольника BCO. Высота треугольника, проведенная из точки A, пересекает окружность w в точке P. Прямая PK пересекает описанную окружность треугольника в точках E и F. Докажите, что один из отрезков EP и FP равен отрезку PA.

Решение. Так как точки O, K лежат на серединном перпендикуляре к BC, то $OK \parallel AP$. Поэтому $\angle OPK = \angle POK = \angle OPA$. Значит, точка A', симметричная A относительно OP, лежит на прямой PK. При этом $OA' = OA$, т.е. A' лежит на описанной окружности треугольника ABC (рис.4) и, следовательно, совпадает с одной из точек E, F.

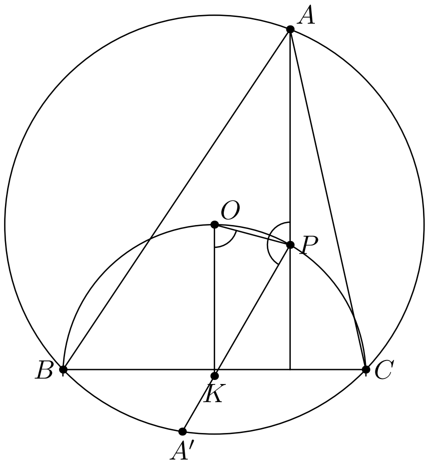

Рис.4

5. (Б.Френкин) (8) Точка внутри выпуклого четырехугольника соединена с вершинами. Получились четыре равных треугольника. Верно ли, что четырехугольник — ромб?

   Ответ. Да.

   Решение. Пусть $ABCD$ и O — четырехугольник и точка из условия. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы. Так как $\triangle ABO = \triangle CBO$, то углы BAO и BCO равны, как лежащие против BO. Аналогично $\angle DAO = \angle DCO$, откуда $\angle BAD = \angle BCD$. Точно так же равны и два других противоположных угла четырехугольника, поэтому сумма любых двух соседних углов равна π, т.е. $ABCD$ — параллелограмм.

   При точке O найдутся два соседних угла, сумма которых не меньше π, скажем $\angle AOB$ и $\angle COB$. Второй из них равен одному из углов треугольника AOB. Это может быть только $\angle AOB$, так как его сумма с любым другим углом треугольника AOB меньше π. В равных треугольниках AOB и COB против равных углов лежат равные стороны, поэтому $AB = BC$ и, значит, $ABCD$ — ромб.

6. (Д.Швецов) (8–9) Диагонали AC, BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников ABP, CDP пересекают прямую AD в точках X, Y. Точка M — середина XY. Докажите, что $BM = CM$.

   Решение. Из условия следует, что $\angle BXA = \angle BPA = \angle CPD = \angle CYD$ (рис.6). Значит, трапеция $BXYC$ равнобокая, что равносильно утверждению задачи.

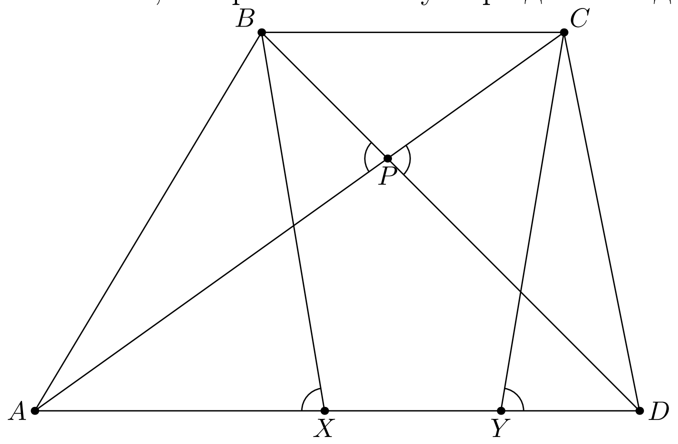

Рис.6

7. (Д.Швецов) (8–9) Пусть BD — биссектриса треугольника ABC. Точки I_a, I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABD, CBD. Прямая I_aI_c пересекает прямую AC в точке Q. Докажите, что $\angle DBQ = 90°$.

   Решение. Прямые AI_a и CI_c пересекаются в центре I вписанной окружности треугольника ABC. При этом $AI_a/I_aI = AD/ID$, $CI_c/I_cI = CD/ID$. По теореме Менелая получаем, что $QA/QC = AD/CD = AB/BC$. Следовательно, BQ — внешняя биссектриса угла B, ч.т.д.

8. (М.Плотников, Украина) (8–9) Вокруг треугольника ABC описана окружность. Пусть X — точка внутри окружности, K и L — точки пересечения окружности и прямых BX и CX соответственно. Прямая LK пересекает BA в точке E, а прямую AC в точке F. Найдите геометрическое место таких точек X, что окружности, описанные около треугольников AFK и AEL, касаются.

Ответ. Дуга окружности, проходящей через B, C и центр O описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть окружности касаются. Тогда углы, образованные их общей касательной с прямыми AC и AB, равны соответственно углам ALE и AKF, которые в свою очередь равны углам ABX и ACX. Поскольку сумма этих углов равна углу A треугольника, то $\angle BXC = 2\angle A = \angle BOC$. Аналогично получаем, что любая точка дуги удовлетворяет условию.

9. (М.Плотников) (8–9) Пусть T_1, T_2 — точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC со сторонами BC и AC соответственно. Оказалось, что точка, симметричная центру вписанной окружности треугольника относительно середины AB, лежит на окружности, описанной около треугольника CT_1T_2. Найдите угол BCA.

Ответ. 90°.

Решение. Пусть D — четвертая вершина параллелограмма $ACBD$, J — центр вписанной окружности треугольника ABD, S_1, S_2 — точки касания этой окружности с AD и BD. Тогда $S_1T_1 \parallel AC$, $S_2T_2 \parallel BC$ и $\angle T_1JT_2 = \angle S_1JS_2 = \pi - \angle C$. Кроме того, $DS_1 = DS_2$, а значит, прямые S_1T_1, S_2T_2 и DJ пересекаются в одной точке. Следовательно, J совпадает с точкой пересечения прямых S_1T_1 и S_2T_2, т.е. $\angle C = 90^\circ$ (рис.9).

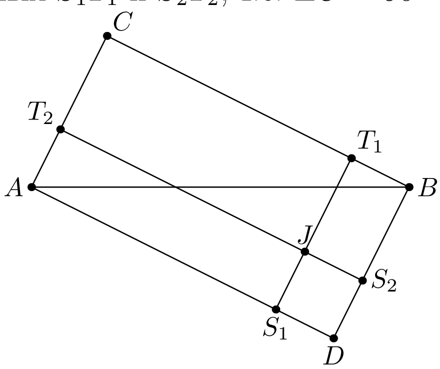

Рис.9

10. (Д.Швецов) (8–9) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке C'. Окружность, вписанная в треугольник ACC', касается сторон AB и AC в точках C_1, B_1; окружность, вписанная в треугольник BCC', касается сторон AB и BC в точках C_2, A_2. Докажите, что прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в одной точке.

Решение. Поскольку $AC' - BC' = AC - BC$, вписанные окружности треугольников ACC' и BCC' касаются стороны CC' в одной и той же точке. Поэтому $CB_1 = CA_2$. Кроме того, $AB_1 = AC_1$, $BA_2 = BC_2$, и, вычислив углы четырехугольника $A_2B_1C_1C_2$, получаем, что он вписанный. Следовательно, прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в радикальном центре трех окружностей: описанной окружности четырехугольника $A_2B_1C_1C_2$ и вписанных окружностей треугольников ACC', BCC' (рис.10).

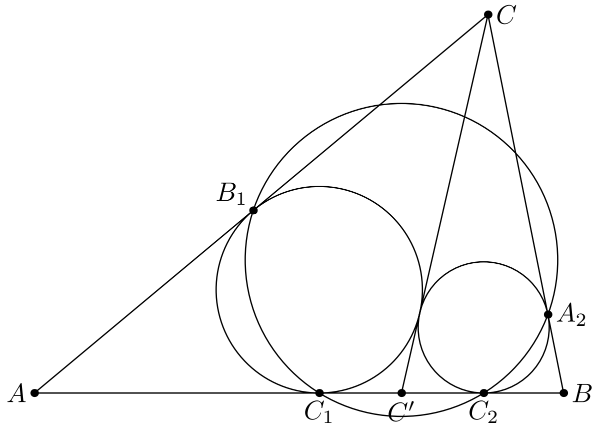

Рис.10

11. (П.Кожевников) (8–9) а) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4$ — взятые в порядке возрастания радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA, DAB. Может ли оказаться, что $r_4 > 2r_3$?

   б)В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Пусть $r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4$ — взятые в порядке возрастания радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABE, BCE, CDE, DAE. Может ли оказаться, что $r_2 > 2r_1$?

   Ответ. а) Нет. б) Нет.

   Решение. а) Пусть для определенности $r_4 = r(ABC)$. Достаточно показать, что $r(ABC)/2 < \max\{r(ABD), r(CBD)\}$. Середина K диагонали AC лежит в одном из треугольников ABD, CBD, скажем, в треугольнике ABD. Тогда треугольник AKL, где L — середина AB, целиком содержится в треугольнике ABD, поэтому $r(ABC)/2 = r(AKL) < r(ABD)$.

   б) Пусть $r = r_1$ — радиус окружности, вписанной в треугольник ABE. Так как диаметры окружностей, вписанных в треугольники BCE, ADE, меньше высот этих треугольников, совпадающих с высотами h_a, h_b треугольника ABE, достаточно доказать, что одна из этих высот не превосходит $4r$. Пусть $AE \ge BE$. Тогда полупериметр треугольника $p < AE + BE \le 2AE$ и $h_b = 2S/AE = 2pr/AE < 4r$.

   Примечание. Отметим, что в обоих пунктах ответ изменится на положительный, если константу 2 заменить на меньшую

12. (Б.Френкин) (8–11) На каждой стороне треугольника ABC отмечены две различные точки. Известно, что это основания высот и биссектрис.

   (а) Пользуясь только линейкой без делений, определите, где высоты, а где биссектрисы.

   (б) Решите пункт (а), проведя только три прямых.

   Решение. Предварительные замечания. Поскольку все основания высот и биссектрис по условию различны, треугольник неравнобедренный. На любой стороне треугольника основание высоты лежит ближе к меньшей из прилежащих сторон, чем основание биссектрисы, и поэтому достаточно определить, какая сторона треугольника наибольшая, наименьшая и средняя. Основания биссектрисы и высоты, проведённых из некоторой вершины X, будем обозначать L_X и H_X соответственно.

   Лемма. Если $|AC| > |BC|$, то прямые L_BL_A и H_BH_A пересекают продолжение стороны AB за вершину B.

Доказательство леммы. Пусть L_BD — перпендикуляр из L_B на AB, а CH — высота. Поскольку биссектриса делит сторону пропорционально прилежащим, выполнено равенство $|L_BD| : |CH| = |AB| : (|BC| + |AB|)$. Аналогично, если L_AE — перпендикуляр из L_A на AB, то $|L_AE| : |CH| = |AB| : (|AC| + |AB|)$. Так как $|AC| > |BC|$, то $|L_BD > |L_AE|$, поэтому L_BL_A пересекает AB за вершиной B, что и требовалось.

Точки H_B, H_A лежат на полуокружности с диаметром AB. Если бы углы H_AAB и H_BBA были равны, то перпендикуляры из H_A и H_B на AB также были бы равны. Но первый из углов меньше, поэтому и соответствующий перпендикуляр меньше. Лемма доказана.

Простейшее решение п. (а). Соединим отмеченные точки с противолежащими вершинами. Получим два семейства конкурентных прямых. На двух сторонах треугольника возьмём точки, принадлежащие одному и тому же семейству, и проведём через них прямую. Согласно лемме она пересекает продолжение третьей стороны за меньшей из двух выбранных сторон — независимо от того, какому семейству соответствуют выбранные точки. Отсюда определяется, какая сторона треугольника меньше какой, что и требуется.

Решение п. (б). Для каждой вершины треугольника выберем на прилежащих сторонах ближайшие отмеченные точки и соединим их прямой. Как показано ниже, *эти прямые пересекут продолжение наибольшей стороны треугольника за вершину среднего угла и продолжения остальных двух сторон за вершину наибольшего угла.* Отсюда определяется, какая сторона треугольника меньше какой, что и требуется.

Докажем утверждение, выделенное курсивом. Пусть $|AB| > |AC| > |BC|$. Отмеченные точки, ближайшие (по сторонам) к вершине наименьшего угла, — основания биссектрис, а ближайшие к вершине наибольшего угла — основания высот. Согласно лемме, соединяющие их прямые пересекают соответственно продолжение BC за C и продолжение AB за B. Отмеченные точки, ближайшие по сторонам к вершине среднего угла B, — это H_C и L_A. Согласно лемме, прямая L_CL_A пересекает продолжение AC за C в некоторой точке P. Луч H_CL_A направлен внутрь треугольника H_CCP и потому пересекает CP, что и требуется.

13. (Ф.Ивлев) (9–10) Пусть A_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AB соответственно, а A' и C' — точки касания вневписанной окружности треугольника, вписанной в угол B, с продолжениями сторон BC и AB соответственно. Докажите, что ортоцентр H треугольника ABC лежит на A_1C_1 тогда и только тогда, когда прямые $A'C_1$ и BA перпендикулярны.

    Решение. Пусть $A'C_1 \perp BA$. Тогда по теореме Фалеса высота, проведенная из C, делит отрезок A_1C_1 в отношении $A_1C : CA' = p - c : p - a$. Через ту же точку проходит и высота из A. Обратное утверждение доказывается аналогично.

14. (Д.Швецов) (9–11) Точки M, N — середины диагоналей AC, BD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = \angle D = 90°$). Описанные окружности треугольников ABN, CDM пересекают прямую BC в точках Q, R. Докажите, что точки Q, R равноудалены от середины отрезка MN.

    Решение. Пусть X, Y — проекции N и M на BC. Тогда утверждение задачи равносильно равенству $RY = XQ$. Так как $\angle NQX = \angle NAB = \angle DBA$, треугольники XQN и ABD подобны (рис.14). Значит, $XQ = AB{\cdot}NX/AD$. Но $NX = CD \sin\angle BCD/2 = CD{\cdot}AD/2BC$, следовательно, $XQ = AB \cdot CD/2BC = RY$.

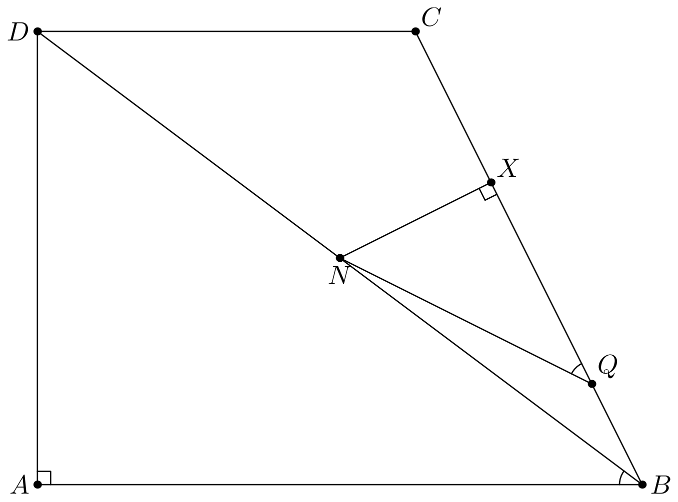

Рис.14

15. (9–11) а) (В.Расторгуев) В треугольник ABC вписаны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ так, что $C_1A_1 \perp BC$, $A_1B_1 \perp CA$, $B_1C_1 \perp AB$, $B_2A_2 \perp BC$, $C_2B_2 \perp CA$, $A_2C_2 \perp AB$. Докажите, что эти треугольники равны.

б) (П.Кожевников) Внутри треугольника ABC взяли точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ так, что A_1 - на отрезке AB_1, B_1 - на отрезке BC_1, C_1 - на отрезке CA_1, A_2 - на отрезке AC_2, B_2 - на отрезке BA_2, C_2 - на отрезке CB_2 и углы $BAA_1, CBB_1, ACC_1, CAA_2, ABB_2, BCC_2$ равны. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

Решение. а) Опишем вокруг треугольника $A_2B_2C_2$ треугольник $A'B'C'$ так, что $C_2A_2 \perp B'C'$, $A_2B_2 \perp C'A'$, $B_2C_2 \perp A'B'$. Очевидно, что соответствующие стороны треугольников ABC и $B'C'A'$ симметричны относительно центра описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$. При этой симметрии треугольник $A_2B_2C_2$ переходит в треугольник $B_1C_1A_1$. Следовательно, эти треугольники равны и имеют общий центр описанной окружности.

б) В описанной окружности треугольника ABC рассмотрим хорды AA', BB', CC', AA'', BB'', CC'', лежащие соответственно на прямых A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, A_2C_2, B_2A_2, C_2B_2. Из условия задачи следует равенство дуг AC', BA', CB', AB'', CA'', BC''. Пусть каждая из этих дуг равна φ. Тогда при повороте вокруг центра описанной окружности хорды AA', BB', CC' переходят соответственно в BB'', CC'', AA'', значит, этот поворот совмещает треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ (рис.15).

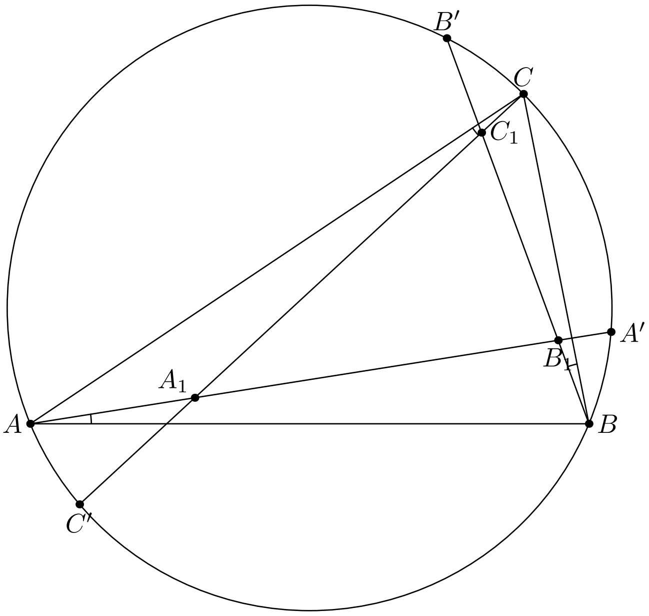

Рис.15

Примечание. Как частный случай этой задачи получаем, что, если треугольник $A_1B_1C_1$ вырождается в точку, то треугольник $A_2B_2C_2$ также вырождается в точку, причем обе точки равноудалены от центра описанной окружности. Эти точки называются *точками Брокара* треугольника.

16. (Ф.Ивлев) (9–11) Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Перпендикуляр из центра I этой окружности на медиану из вершины C пересекает прямую $A'B'$ в точке K. Докажите, что $CK \parallel AB$.

Решение. При полярном преобразовании относительно вписанной окружности перпендикуляр из I на медиану перейдет в бесконечно удаленную точку этой медианы, прямая $A'B'$ — в точку C, а прямая, проходящая через C и параллельная AB, — в точку P пересечения $A'B'$ с IC'. Таким образом, надо доказать, что эта точка лежит на медиане.

Поскольку $IA' = IB'$, $\angle PIB' = \angle A$, $\angle PIA' = \angle B$, то $B'P : A'P = BC : AC$. А так как $CA' = CB'$, то $\sin\angle ACP : \sin\angle BCP = BC : AC$, т.е. CP делит AB пополам (рис.16).

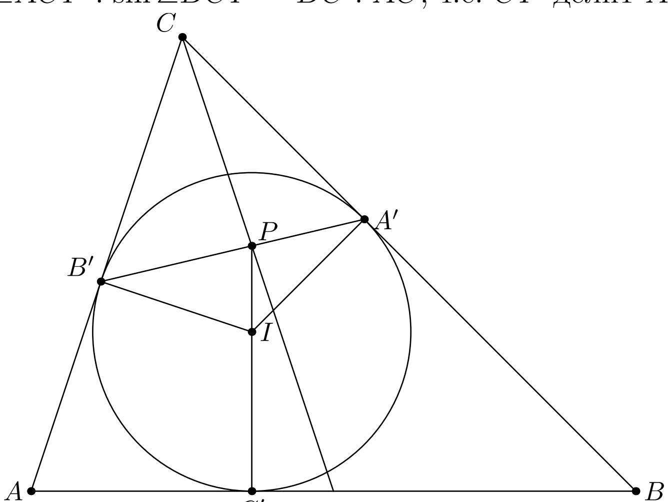

Рис.16

17. (А.Заславский) (9–11) Дан вписанный четырехугольник, острый угол между диагоналями которого равен ϕ. Докажите, что острый угол между диагоналями любого другого четырехугольника с теми же длинами сторон меньше ϕ.

Решение. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Обозначив $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$, $PD = d$, выразим стороны четырехугольника по теореме косинусов через a, b, c, d и $\cos\phi$.

$$|AB^2 - BC^2 + CD^2 - CA^2| = 2\cos\phi(ab + bc + cd + da) = 2AC \cdot BD\cos\phi.$$

Но по теореме Птолемея $AC \cdot BD \le AB \cdot CD + BC \cdot AD$, причем равенство достигается только на вписанном четырехугольнике.

18. (А.Иванов) (9–11) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точки M и N являются проекциями B и C на AD. Окружность с диаметром MN пересекает BC в точках X и Y. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

Решение. Пусть B', C', X', Y' — точки, симметричные B, C, X, Y относительно MN. Тогда $BB'CC'$ — равнобокая трапеция, диагонали которой пересекаются в точке L, инверсной A относительно окружности с диаметром MN. В этой же точке пересекаются диагонали равнобокой трапеции $XX'YY'$, вписанной в эту окружность. Боковые стороны этой трапеции пересекаются на поляре точки L, которая проходит через A и параллельна основаниям трапеции. В силу симметрии точка пересечения боковых сторон совпадает с A, что равносильно утверждению задачи (рис.18).

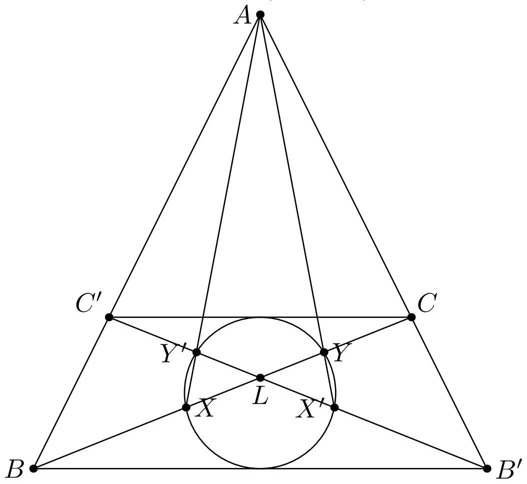

Рис.18

19. (Д.Прокопенко) (10–11) а) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках B_0 и C_0 соответственно. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают серединный перпендикуляр к биссектрисе AL в точках Q и P соответственно. Докажите, что прямые PC_0 и QB_0 пересекаются на прямой BC.

б) В треугольнике ABC провели биссектрису AL. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABL и ACL соответственно. Точки B_1 и C_1 — проекции вершин C и B на биссектрисы углов B и C соответственно. Докажите, что прямые O_1C_1 и O_1B_1 пересекаются на прямой BC.

в) Докажите, что точки, полученные в пп.а) и б), совпадают.

Решение. а) Очевидно, что $PQ \parallel B_0C_0$. Кроме того, точка P лежит на описанной окружности треугольника ACL. Значит, $\angle PLA = \angle C/2$ и $\angle PLB = 90° - \angle B/2 = \angle C_0A_0B$, где A_0 — точка касания вписанной окружности с BC. Следовательно, соответственные стороны треугольников PQL и $C_0B_0A_0$ параллельны, т.е. эти треугольники гомотетичны (рис.19а). Центр гомотетии S лежит на прямой LA_0. Значит, прямые P_0 и QB_0 пересекаются в S, т.е. на прямой BC.

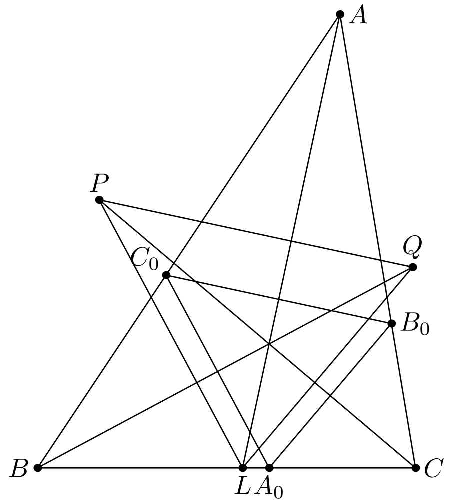

Рис.19а

б) Докажем сначала, что точки C_0, B_0, C_1 и B_1 лежат на одной прямой. Действительно, поскольку точка, симметричная B относительно биссектрисы угла C, лежит на прямой AC, точка C_1 лежит на средней линии $A'C'$. При этом $A'C_1 = BC/2$, а значит, $C'C_1 = |AC - BC|/2 = C'B_0$. Этим же свойством обладает и точка пересечения $A'C'$ с B_0C_0. Таким образом, прямые O_1O_2 и C_1B_1 параллельны. Далее, четырехугольник BC_1IA_0 — вписанный, поэтому $\angle C_1A_0B = 90° - \angle A/2 = \angle O_1LB$. Значит, $A_0C_1 \parallel LO_1$. Аналогично $A_0B_1 \parallel LO_2$ (рис.19б). Следовательно, треугольники O_1O_2L и $C_1B_1A_0$ гомотетичны.

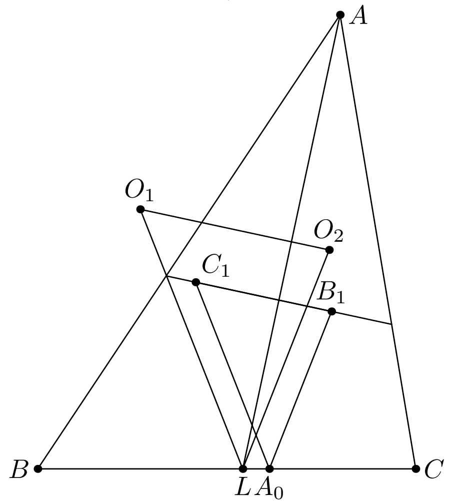

Рис.19б

в) Каждая из гомотетий пп. а) и б) переводит A_0 в L, а прямую B_0C_0 — в серединный перпендикуляр к AL. Поэтому их центры совпадают.

20. (В.Ясинский) (10–11) На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка C_1. Точки A_1, B_1 на лучах BC и AC таковы, что $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Прямые AA_1

и BB_1 пересекаются в точке C_2. Докажите, что все прямые C_1C_2 проходят через одну точку.

Решение. Из условия следует, что четырехугольники ACA_1C_1 и BCB_1C_1 — вписанные. Поэтому $\angle B_1BC_1 = \angle ACC_1$, $\angle A_1AC_1 = \angle BCC_1$, а значит, $\angle AC_2B = \pi - \angle C$, т.е. C_2 лежит на окружности, проходящей через A, B и точку C', симметричную C относительно AB. При этом $\angle BC'C_1 = \angle BAC_2$, следовательно, прямая $C'C_1$ проходит через C_2 (рис.20).

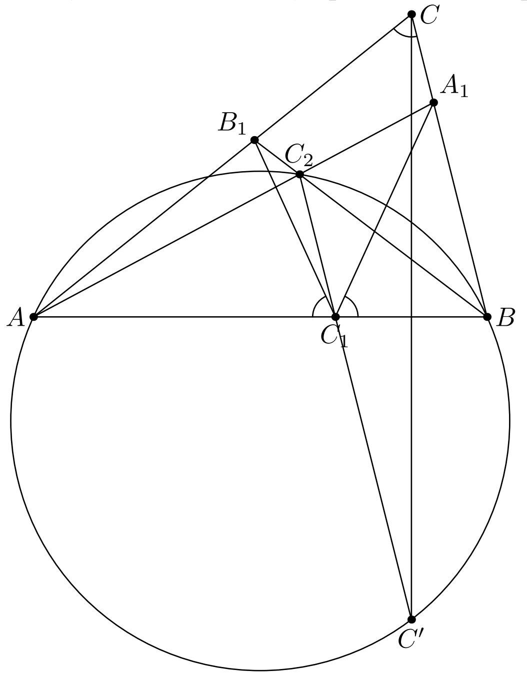

Рис.20

21. (В.Ясинский) (10–11) Дана окружность ω и точка A вне ее. Через A проведены две прямые, одна из которых пересекает ω в точках B и C, а другая — в точках D и E (D лежит между A и E). Прямая, проходящая через D и параллельная BC, вторично пересекает ω в точке F, а прямая AF — в точке T. Пусть M — точка пересечения прямых ET и BC, а N — точка, симметричная A относительно M. Докажите, что описанная около треугольника DEN окружность проходит через середину отрезка BC.

   Решение. Спроецируем сначала прямую AB на окружность из точки D, а затем окружность на прямую AB из точки T. В результате A перейдет в M, бесконечно удаленная точка — в A, а точки B и C останутся на месте. Приравняв двойные отношения, получим $MB/MC = (AB/AC)^2$. Из этого соотношения получаем, что $AM = AB \cdot AC/(AB + AC)$. Пусть теперь K — середина BC. Тогда $AN \cdot AK = 2AM(AB+AC)/2 = AB \cdot AC = AD \cdot AE$, т.е. точки D, E, K, N лежат на окружности.

22. (А.Заславский) (10–11) Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

   Решение. Пусть K, L, M, N — точки на сторонах AB, BC, CD, DA пространственного четырехугольника $ABCD$, являющиеся основаниями общих перпендикуляров. При проекции на плоскость, параллельную KM и LN, эти прямые перейдут в перпендикулярные прямые $K'M'$ и $L'N'$. По теореме о трех перпендикулярах проекции прямых AB и CD будут перпендикулярны $K'M'$, а проекции прямых BC и AD перпендикулярны $L'N'$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ проецируется в прямоугольник $A'B'C'D'$, причем $A'K' = D'M'$, $B'L' = A'N'$. Значит, $AK/KB = DM/MC$, $BL/LC = AN/ND$ и по теореме Менелая точки K, L, M, N лежат в одной плоскости.

23. (Б.Френкин) (10–11) Выпуклые многогранники A и B не имеют общих точек. Многогранник A имеет ровно 2012 плоскостей симметрии. Каково наибольшее возможное количество плоскостей симметрии у фигуры, состоящей из A и B, если B имеет а) 2012, б) 2013 плоскостей симметрии?

в) Каков будет ответ в пункте (б), если плоскости симметрии заменить на оси симметрии?

Ответ. (а) 2013. (б) 2012. (в) 1.

Решение. (а) *Оценка.* Симметрия либо меняет многогранники A и B местами, либо оставляет каждый из них на месте. В первом случае она меняет местами их центры тяжести, поэтому плоскость симметрии перпендикулярна отрезку между центрами тяжести и проходит через его середину. Во втором случае плоскость симметрии фигуры является плоскостью симметрии каждого из многогранников A и B. Отсюда оценка 1+2012=2013. *Пример.* Пусть A — правильная 2012-угольная пирамида. На её оси симметрии (очевидно, единственной) выберем точку вне A и проведем через неё плоскость P перпендикулярно оси. Пусть B получается из A отражением относительно P. Все условия задачи выполнены, при этом P и 2012 плоскостей симметрии пирамиды A являются плоскостями симметрии полученной фигуры.

(б) *Оценка.* Поскольку многогранники A и B имеют разное количество плоскостей симметрии, они не равны и не могут перейти друг в друга при симметрии всей фигуры. Следовательно, эта симметрия оставляет каждый из них на месте и, в частности, является симметрией многогранника A, но он по условию имеет только 2012 плоскостей симметрии. *Пример.* Пусть A, как и в п. (а), — правильная 2012-угольная пирамида. Выберем на её оси точку вне A, проведем через неё плоскость перпендикулярно оси и отразим основание пирамиды относительно этой плоскости. Над этим основанием построим прямую призму, не имеющую общих точек с A, это и будет B. Ясно, что B имеет 2013 плоскостей симметрии: одна из них параллельна плоскостям оснований призмы и расположена посредине между ними, а остальные 2012 проходят через ось призмы и две противоположные вершины основания. Они являются плоскостями симметрии также для A и для всей фигуры.

(в) *Оценка.* Поскольку многогранники A и B имеют разное количество осей симметрии, они не равны и не могут перейти друг в друга при симметрии всей фигуры. Значит, эта симметрия оставляет каждый из них на месте. Поэтому она оставляет на месте центр тяжести каждого из многогранников. Эти центры не совпадают, поскольку многогранники выпуклые (это существенно!). Таким образом, у соединяющей прямой есть две неподвижные точки. Значит, она и есть ось симметрии. *Пример.* Пусть A — прямая призма, основания которой — правильные 2011-угольники. Плоскости оснований считаем горизонтальными. Тогда у призмы одна вертикальная ось симметрии, и через середину её отрезка между основаниями проходят 2011 горизонтальных осей симметрии. Далее, пусть B — прямая призма, её основания горизонтальны и являются правильными 2012-угольниками, а вертикальная ось та же, что у A, причем A и B не имеют общих точек. Тогда A имеет 2012 осей симметрии, B — 2013, а составленная из них фигура имеет вертикальную ось симметрии.