Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2014 г.

Решения задач
8 класс. Первый день

8.1. (*Ю. Зайцева, Д. Швецов*) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается катетов AC и BC в точках B_1 и A_1, а гипотенузы — в точке C_1. Прямые C_1A_1 и C_1B_1 пересекают CA и CB соответственно в точках B_0 и A_0. Докажите, что $AB_0 = BA_0$.

Решение. *Первый способ.* Пусть I_A — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC и продолжения стороны BC в точках B_2 и A_0' соответственно (см. рис. 8.1). Тогда $I_AB_2CA_0'$ — квадрат, а значит $I_AA_0' = B_2C$. Как известно, $B_2C = AB_1$, значит $I_AA_0' = AB_1$. Следовательно, четырехугольник $A_0'I_AAB_1$ — параллелограмм, то есть $A_0'B_1 \parallel I_AA$. С другой стороны, $I_AA \parallel B_1C_1$, следовательно, точки A_0', B_1 и C_1 лежат на одной прямой и A_0' совпадает с A_0. Тогда BA_0 — отрезок касательной к вневписанной окружности, то есть он равен полупериметру треугольника ABC. Аналогично получаем, что отрезок AB_0 равен полупериметру этого же треугольника, откуда $AB_0 = BA_0$.

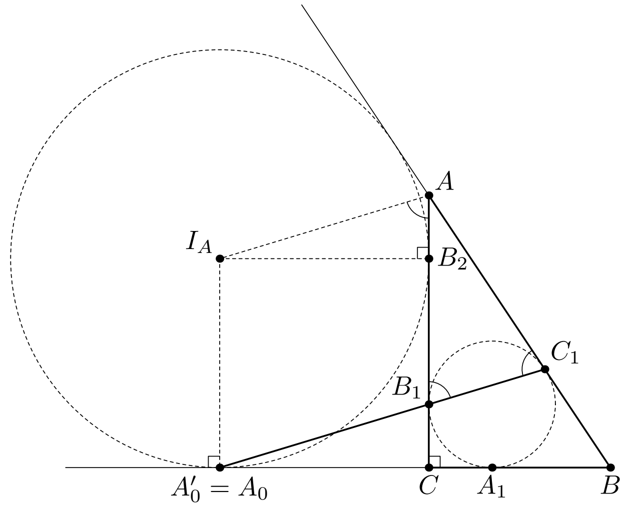

Рис. 8.1

Второй способ. Так как отрезки CA_1 и CB_1 равны радиусу r вписанной окружности, а прямые C_1A_1, C_1B_1 перпендикулярны биссектрисам углов B и A соответственно, из прямоугольных треугольников CA_0B_1 и CB_0A_1 получаем, что $A_0C = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}}$, $B_0C = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2}}$. С другой стороны $AC = r + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}}$, $BC = r + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2}}$. Следовательно, $AB_0 = AC + CB_0 = BC + CA_0 = BA_0$.

8.2. (*Б. Френкин*) Пусть AH_a и BH_b — высоты, а AL_a и BL_b — биссектрисы треугольника ABC. Известно, что $H_aH_b \parallel L_aL_b$. Верно ли, что $AC = BC$?

Ответ: да.

Решение. *Первый способ.* Так как треугольники H_aH_bC и ABC подобны (см. рис. 8.2а), треугольники L_aL_bC и ABC также подобны, то есть $\dfrac{L_aC}{AC} = \dfrac{L_bC}{BC}$. Значит подобны треугольники AL_aC и BL_bC. Следовательно, $\angle L_aBL_b = \angle L_bAL_a$, но эти углы равны половинам углов B и A треугольника. Значит $AC = BC$.

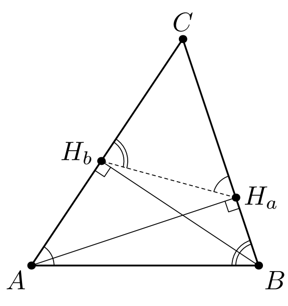

Рис. 8.2а

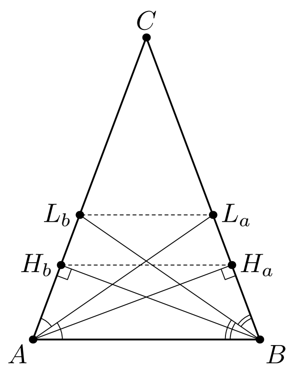

Рис. 8.2б

Второй способ. Так H_aH_b и AB антипараллельны относительно прямых AC и BC, L_aL_b и AB также антипараллельны относительно AC и BC, значит четырехугольник AL_bL_aB вписанный. Тогда, как и в предыдущем решении, получаем, что $\angle L_aBL_b = \angle L_bAL_a$ и $AC = BC$.

8.3. (*А. Блинков*) В треугольнике ABC отмечены середины сторон AC и BC — точки M и N соответственно. Угол MAN равен $15°$, а угол BAN равен $45°$. Найдите угол ABM.

Ответ: $75°$.

Решение. *Первый способ.* Продолжим отрезок MN на его длину в обе стороны и получим точки K и L (см. рис. 8.3а). Так как M — общая середина AC и KN, то $AKCN$ — параллелограмм. Тогда $\angle CKM = 45°$, $\angle KCM = 15°$. Отметим на отрезке CM точку P так, чтобы угол CKP был равен $15°$. Тогда отрезок KP разобьет треугольник KCM на два равнобедренных треугольника. Кроме того, $\angle PMN = 60°$, поэтому треугольник MPN – равносторонний. Треугольники PLN и PKM равны, треугольник CPL — равнобедренный и прямоугольный, отсюда $\angle CLN = \angle CLP + \angle MLP = 75° = \angle ABM$, так как $CLBM$ — параллелограмм.

Можно использовать также, что построенная точка P — центр описанной окружности треугольника KCL.

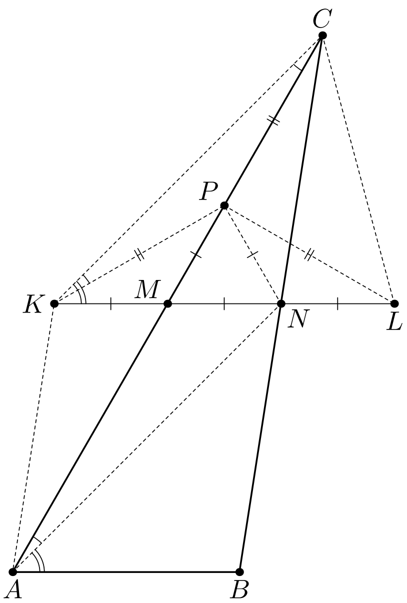

Рис. 8.3а

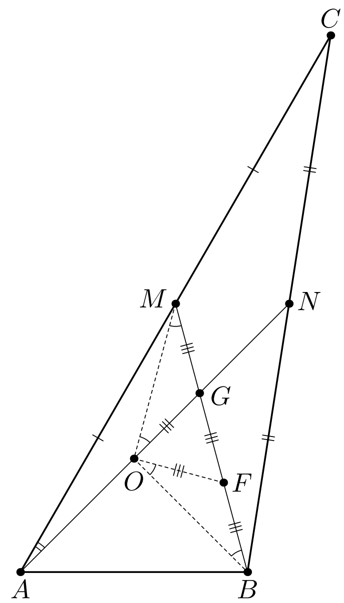

Рис. 8.3б

Второй способ. Пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC, F — середина GB, треугольник GFO равносторонний, причем точки O и A лежат в одной полуплоскости относительно MB (см. рис. 8.3б). Поскольку $\angle MOB = 120°$, то O — центр окружности, описанной около треугольника MAB, при этом $\angle MOG = 30° = 2\angle MAG$, значит AG и OG пересекаются на описанной окружности треугольника AMB, то есть точки A, O и G лежат на одной прямой. Тогда $\angle ABM = \frac{\angle MOA}{2} = 75°$.

8.4. (*Т. Казицына*) Таня вырезала из клетчатой бумаги треугольник, изображённый на рисунке 8.4а. Через некоторое время линии сетки выцвели. Сможет ли Таня их восстановить, не пользуясь никакими инструментами, а только перегибая треугольник? (Длины сторон треугольника Таня помнит.)

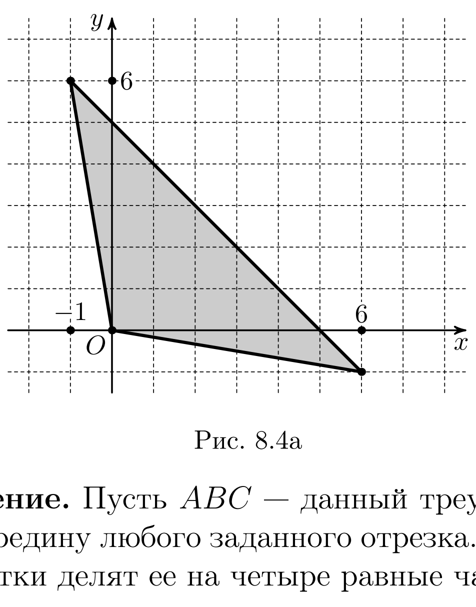

Рис. 8.4а

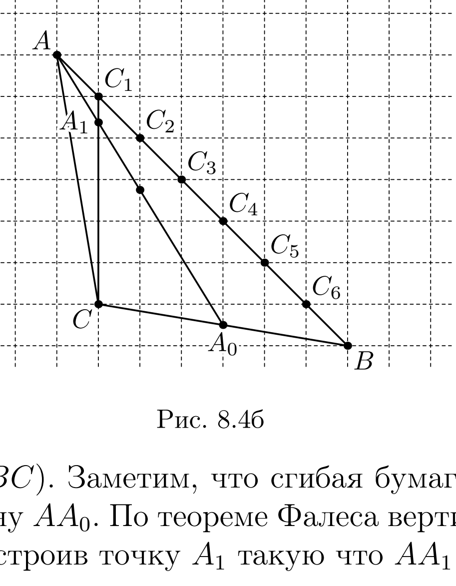

Рис. 8.4б

Решение. Пусть ABC — данный треугольник ($AC = BC$). Заметим, что сгибая бумагу, можно найти середину любого заданного отрезка. Построим медиану AA_0. По теореме Фалеса вертикальные линии сетки делят ее на четыре равные части. Поэтому, построив точку A_1 такую что $AA_1 = AA_0/4$

и перегнув треугольник по прямой A_1 получим точку C_1, такую, что $AC_1 = AB/7$ (см. рис. 8.4б). Теперь, построив отрезки $C_1C_2 = C_2C_3 = \ldots = C_5C_6 = AC_1$, мы найдем все узлы сетки, лежащие на стороне AB. Перегнув треугольник по прямой, проходящей через C_2, так, чтобы точка C_3 попала на прямую CC_1, мы получим линию сетки, проходящую через C_2, и т. д. Перпендикулярные линии строятся аналогично.

Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2014 г.

Решения задач

8 класс. Второй день

8.5. (*А. Шаповалов*) Дан треугольник с углами 30, 70 и 80 градусов. Разрежьте его отрезком на два треугольника так, чтобы биссектриса одного из этих треугольников и медиана второго, проведённые из концов разрезающего отрезка, были параллельны друг другу. (*Достаточно найти одно решение.*)

Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 80°$ (см. рис. 8.5). Проведем высоту AH. Тогда $\angle CAH = \angle MHA = 10°$, где M — середина AC. При этом $\angle HAL = 10°$, где L — основание биссектрисы треугольника HAB, проведенной из вершины A. Значит медиана треугольника AHC, проведенная из вершины H, и биссектриса треугольника BAH, проведенная из вершины A, параллельны, а высота AH является искомым разделяющим отрезком.

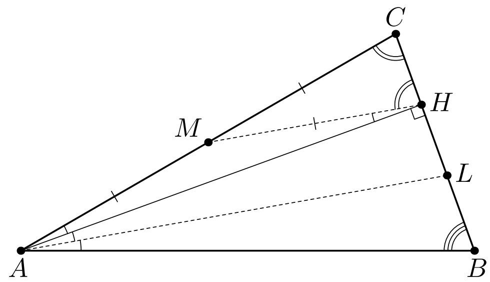

Рис. 8.5

8.6. (*В. Ясинский*) Две окружности k_1 и k_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке O. Точки X и Y лежат на k_1 и k_2 соответственно так, что лучи O_1X и O_2Y одинаково направлены. Из точки X проведены касательные к k_2, а из точки Y — к k_1. Докажите, что эти четыре прямые касаются одной окружности, проходящей через точку O.

Решение. Обозначим через S точку пересечения XO_2 и YO_1 (см. рис. 8.6). Пусть r_1 и r_2 — радиусы соответствующих окружностей. Тогда $\frac{XS}{SO_2} = \frac{O_1S}{SY} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1O}{OO_2}$. Значит, $SO \parallel O_2Y$ и $SO = \frac{r_1}{r_1+r_2}O_2Y = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$.

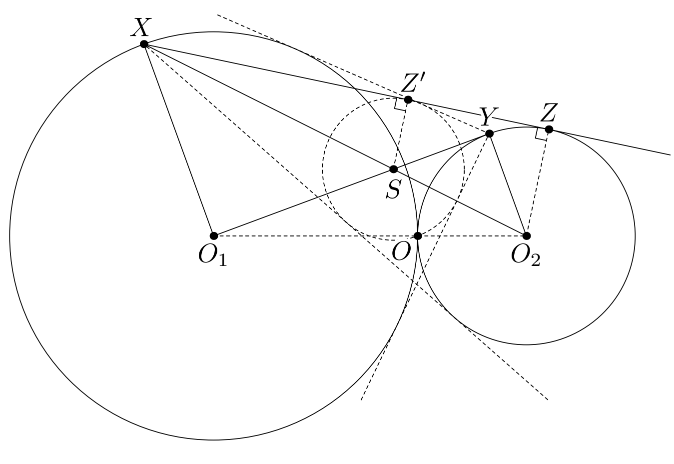

Рис. 8.6

Пусть XZ — одна из касательных из X ко второй окружности, а Z' — проекция S на XZ. Тогда $SZ' = \frac{r_1}{r_1+r_2}O_2Z = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2} = SO$. Аналогично доказывается, что расстояние от S до остальных касательных также равно SO, то есть S и есть центр требуемой окружности.

8.7. (*Фольклор*) Две точки окружности соединили ломаной, длина которой меньше диаметра окружности. Докажите, что существует диаметр, не пересекающий эту ломаную.

Решение. Пусть точки A и B — концы ломаной. Рассмотрим диаметр XY, параллельный AB (см. рис. 8.7). Пусть точка C симметрична B относительно XY, тогда AC — диаметр окружности. Рассмотрим любую точку Z хорды XY. Так как $AZ+BZ = AZ+CZ \geqslant AC$, Z не может лежать на ломаной, а значит диаметр XY подходит.

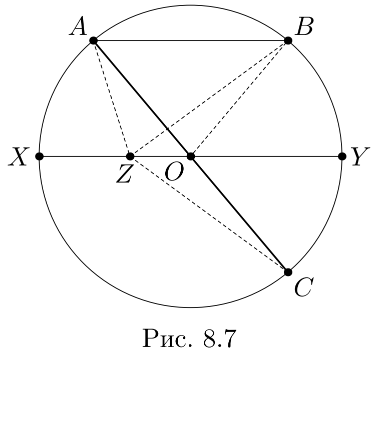

Рис. 8.7

8.8. (*Tran Quang Hung*) Пусть M — середина хорды AB окружности с центром O. Точка K симметрична M относительно O, P — произвольная точка окружности. Перпендикуляр к AB в точке A и перпендикуляр к PK в точке P пересекаются в точке Q. Точка H — проекция P на AB. Докажите, что прямая QB делит отрезок PH пополам.

Решение. *Первый способ.* Пусть w — данная окружность (с центром в точке O) и QA пересекает w в точке C, отличной от A (см. рис. 8.8а). Так как BC — диаметр w, то отрезки BC и MK делят друг друга пополам, то есть $CKBM$ — параллелограмм. Тогда, поскольку M — середина AB, то $CKMA$ — прямоугольник. Докажем, что отрезки MQ и PC перпендикулярны. Мы имеем:

$$\begin{aligned}MC^2 - MP^2 - QC^2 + QP^2 = (CK^2 + MK^2) - (2PO^2 + 2OK^2 - PK^2) - (QK^2 - CK^2) + \\ + (QK^2 - PK^2) = 2CK^2 + 4OK^2 - 2PO^2 - 2OK^2 = 2CK^2 + 2OK^2 - 2OC^2 = 0.\end{aligned}$$

Значит, $MQ \perp PC$. Пусть BP пересекает QA в точке R. Так как CB — диаметр w, $BR \perp PC$. Следовательно, $MQ \parallel BR$, и поскольку M — середина AB, то Q — середина AR. Значит QB делит PH пополам.

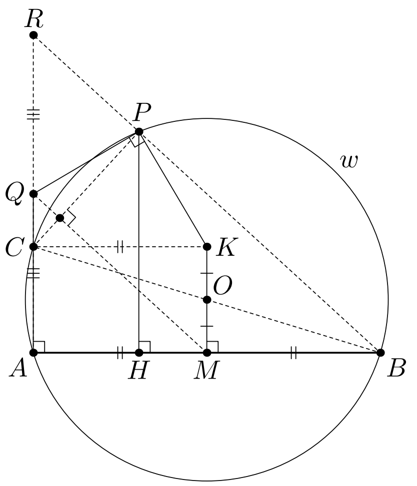

Рис. 8.8а

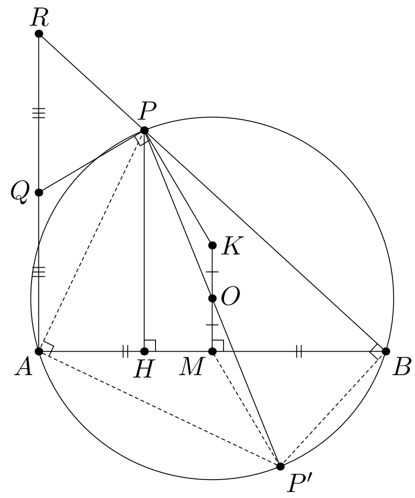

Рис. 8.8б

Второй способ. Заметим, что $\angle PBA \neq 90°$; иначе $PK \parallel AB$, и точка Q не существует. Тогда прямая BP пересекает AQ в некоторой точке R (см. рис. 8.8б). Треугольники BPH и BRA гомотетичны, так что достаточно доказать, что Q — середина AR.

Пусть P' — точка, диаметрально противоположная к P. Тогда $PA \perp P'A$, $PR \perp P'B$, $AR \perp AB$, то есть в треугольниках $P'AB$ и PAR соответственные стороны перпендикулярны. Значит, они подобны, и их медианы из вершин P и P' также перпендикулярны. Но из симметрии относительно O следует, что $P'M \parallel PK$ и $P'M \perp PQ$. Это и означает, что PQ — медиана в $\triangle PAR$.

Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2014 г.

Решения задач
9 класс. Первый день

9.1. (*В. Ясинский*) Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Докажите, что $AC > BD$ тогда и только тогда, когда $(AD - BC)(AB - CD) > 0$.

Решение. *Первый способ.* Без ограничения общности можно считать, что дуги ABC и BCD не превосходят полуокружности. Тогда $\smile AD = 2\pi - \smile ABC - \smile BCD + \smile BC > \smile BC$. Поскольку дуга $ABCD$ также больше дуги BC, получаем, что $AD > BC$.

Теперь, если $AC > BD$, то $\smile ABC > \smile BCD$, $\smile AB > \smile CD$ и $AB > CD$. При $AC < BD$ все неравенства меняются на противоположные.

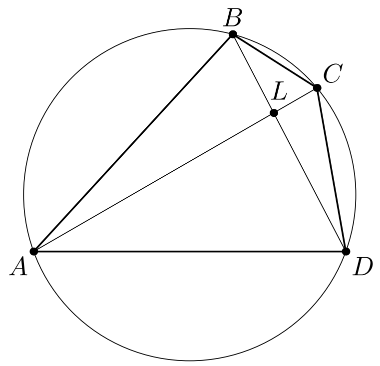

Рис. 9.1

Второй способ. Пусть AL — самый длинный из отрезков AL, BL, CL, DL (см. рис. 9.1). Тогда, в силу равенства $AL \cdot CL = BL \cdot DL$, CL — самый короткий из этих отрезков. Тогда $AL - CL > |BL - DL|$, отсюда $AC^2 = (AL+CL)^2 = (AL-CL)^2 + 4AL\cdot CL > |BL-DL|^2 + 4BL\cdot DL = (BL + DL)^2 = BD^2$, то есть, $AC > BD$. Кроме того, из подобия треугольников ALB и DLC получаем, что $\frac{AB}{CD} = \frac{AL}{DL}$, то есть $AB > CD$. Аналогично из подобия треугольников ALD и BLC получаем $AD > BC$.

Третий способ. Заметим, что $AC = 2R\sin B$ и $BD = 2R\sin A$, поэтому неравенство $AC > BD$ эквивалентно неравенству $\sin B > \sin A$.

Далее $(AD - BC)(AB - CD) > 0 \Leftrightarrow AD\cdot AB + BC\cdot CD > AD\cdot CD + BC\cdot AB$, что эквивалентно (домножим на $\frac{1}{2}\sin A\sin B = \frac{1}{2}\sin A\sin D = \frac{1}{2}\sin C\sin B$).

$$\left(\frac{AD\cdot AB\sin A}{2} + \frac{BC\cdot CD\sin C}{2}\right)\sin B > \left(\frac{AD\cdot CD\sin D}{2} + \frac{BC\cdot AB\sin B}{2}\right)\sin A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (S(DAB) + S(BCD))\sin B > (S(CDA) + S(ABC))\sin A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S(ABCD)\sin B > S(ABCD)\sin A \Leftrightarrow \sin B > \sin A.$$

9.2. (*Ф. Нилов*) В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину диагонали AC.

Решение. *Первый способ.* Пусть M, N, K — середины AB, CD и AC соответственно. Тогда степень точки K относительно окружности с диаметром AB равна $KM^2 - MA^2 = \frac{CB^2 - AB^2}{4}$, а относительно окружности с диаметром CD — $\frac{AD^2 - CD^2}{4}$. Так как $AB^2 + AD^2 = BD^2 = BC^2 + CD^2$, получаем, что степени равны.

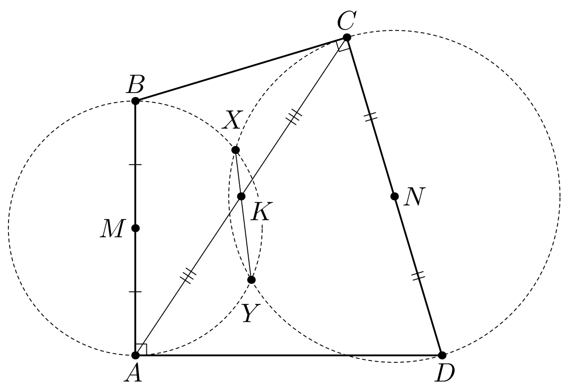

Рис. 9.2

Второй способ. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке Z. Центры данных в условии окружностей ω_1 и ω_2 — середины O_1 и O_2 отрезков AB и CD соответственно. Пусть ω — окружность $ABCD$ (с диаметром BD). Тогда AB — радикальная ось окружностей ω и ω_1, CD — радикальная ось окружностей ω и ω_2, а XY — радикальная ось окружностей ω_1 и ω_2, значит XY проходит через Z. Теперь для решения задачи достаточно доказать, что $ZK \perp O_1O_2$ (где K — середина диагонали AC). Но нетрудно заметить (из средних линий треугольников ABC и ADC), что $O_1K \perp ZO_2$ и $O_2K \perp ZO_1$.

9.3. (*Е. Диомидов*) Дан острый угол A и точка E внутри него. Построить на сторонах угла точки B, C так, чтобы E была центром окружности Эйлера треугольника ABC. (*Исследование проводить не требуется.*)

Решение. *Первый способ.* Пусть M, K и L — середины сторон AB, BC и AC соответственно. Тогда $\angle LEM = 2\angle LKM = 2\angle A$. Обозначим стороны $\angle A$ через l_1 и l_2 так, чтобы при повороте вокруг A на $\angle A$ против часовой стрелки l_1 переходила в l_2. Тогда при повороте по часовой стрелке вокруг E на угол $2\angle A$ середина стороны треугольника, лежащей на l_1, перейдет в середину стороны, лежащей на l_2. Поэтому точка, симметричная A относительно M, будет вершиной треугольника. Вторая вершина строится аналогично.

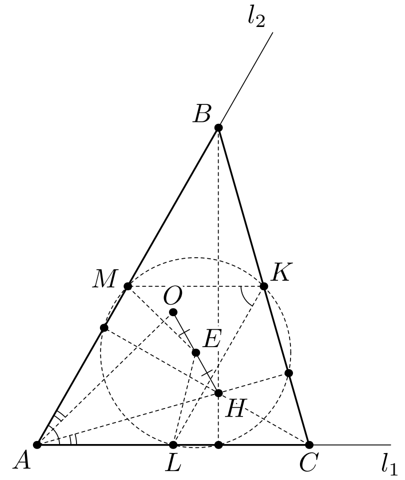

Рис. 9.3

Второй способ. Пусть O и H — центр описанной окружности и ортоцентр треугольника. Тогда E — середина отрезка OH, $\angle BAO = \angle HAC$ и $AH = 2AO\cos\angle A$. Следовательно композиция симметрии относительно биссектрисы угла A, гомотетии с центром A и коэффициентом $2\cos\angle A$ и симметрии относительно E является подобием с центром O. Соответственно, найдя центр этого подобия, можно построить точки B и C как вторые точки пересечения сторон данного угла и окружности с центром O, проходящей через A.

Примечание. При $\angle A = 60^\circ$ рассмотренное подобие будет симметрией относительно прямой, проходящей через E и перпендикулярной биссектрисе угла A. Соответственно, в качестве O можно брать любую точку этой прямой. В остальных случаях решение единственно.

9.4. (*Mahdi Etesami Fard*) Ортоцентр H треугольника ABC лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами A, B, C, проходящие через H, имеют общую касательную.

Решение. *Первый способ.* Пусть H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника. Так как $AH \times$ $\times HH_a = BH \cdot HH_b = CH \cdot HH_c$, то существует инверсия с центром H, переводящая точки A, B, C в H_a, H_b, H_c соответственно (в случае остроугольного треугольника надо взять композицию инверсии и центральной симметрии относительно H). При этой инверсии стороны треугольника перейдут в окружности с диаметрами AH, BH, CH, а вписанная окружность — в прямую, касающуюся этих окружностей. Искомая прямая получается из этой гомотетией с центром H и коэффициентом 2.

Второй способ. Пусть I — центр вписанной окружности, A_1, B_1, C_1 — точки её касания со сторонами BC, AC, AB соответственно, а A_2, B_2, C_2 — такие точки (на трёх окружностях из условия), что

$\triangle A_1IH \sim \triangle HAA_2$, $\triangle B_1IH \sim \triangle HBB_2$ и $\triangle C_1IH \sim \triangle HCC_2$ (подобные треугольники расположены так, что их стороны соответственно параллельны). Касательные в этих точках к этим окружностям параллельны касательной в H ко вписанной; достаточно доказать, что эти касательные совпадают, а для этого достаточно показать, что проекции векторов $\overrightarrow{HA_2}$, $\overrightarrow{HB_2}$ и $\overrightarrow{HC_2}$ на IH равны. Нетрудно видеть, что они сонаправлены. Поскольку HA_2 составляет равные углы с IH и IA_1, длина первой проекции равна длине проекции HA_2 на AH, то есть $\frac{AH}{r} \cdot HA'$, где A' — основание высоты. Аналогично вычисляются остальные проекции; осталось заметить, что $AH \cdot HA' = BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$.

Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2014 г.

Решения задач
9 класс. Второй день

9.5. (*Д. Швецов*) В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, O — центр описанной окружности, BL — биссектриса. Описанная окружность треугольника BOL пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке D. Докажите, что $BD \perp AC$.

Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, D' — точка, симметричная H относительно AC. Тогда D' лежит на описанной окружности, а так как $\angle B = 60^\circ$, то $BO = BH$ (этот факт можно доказать, например, так: заметим, что поскольку $\angle B = 60^\circ$, то описанные окружности треугольников ABC и AOC равны и совмещаются параллельным переносом на вектор BH, поэтому $BH = R = BO$). Значит, поскольку BL — биссектриса угла OBH, то $LO = LH = LD'$. Треугольники LBO и LBH равны (по двум сторонам и углу между ними), отсюда $\angle BOL = \angle BHL$. Из симметрии относительно AC: $\angle BD'L = \angle LHD' = 180^\circ - \angle BHL$, отсюда $\angle BOL + \angle BD'L = 180^\circ$. Следовательно, четырехугольник $BOLD'$ вписанный и D' совпадает с D.

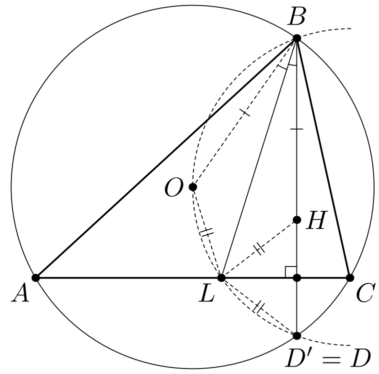

Рис. 9.5

9.6. (*А. Полянский*) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, M, N — середины дуг ABC и BAC описанной окружности. Докажите, что точки M, I, N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $AC + BC = 3AB$.

Решение. *Первый способ.* Обозначим через A_1, B_1 и C_1 середины дуг BC, CA и AB, не содержащих других вершин треугольника ABC (см. рис. 9.6а), кроме того, пусть A_0 и B_0 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и CA соответственно.

Пусть MN проходит через I. Так как A_1N и B_1M — диаметры, то A_1B_1 и MN равны и параллельны. Как известно, $A_1B_1 \perp CC_1$ и $CC_2 = C_2I$. Из симметрии относительно серединного перпендикуляра к CC_1 имеем $CC_2 = C_1I$, кроме того, из прямоугольного треугольника CA_0I получим, что $C_2A_0 = C_2C$. Тогда, по теореме о трезубце $C_2A_0 = C_2C = IC_1 = C_1A = C_1B$. То есть треугольники C_2CA_0 и C_1AB равны ($AB = CA_0$). Отсюда и получаем равенство $AC + CB = AB_0 + B_0C + CA_0 + A_0B = 2AB + AB_0 + A_0B = 3AB$. В обратную сторону аналогично.

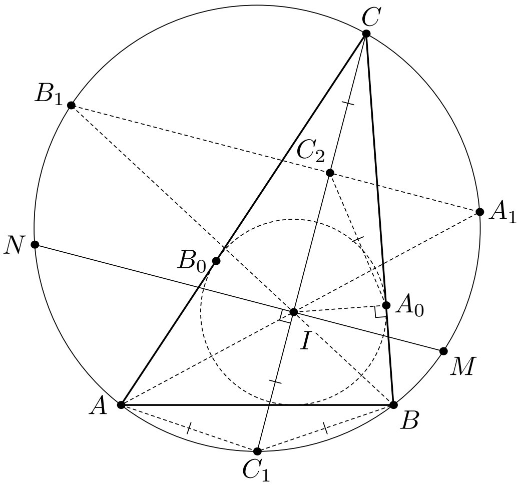

Рис. 9.6а

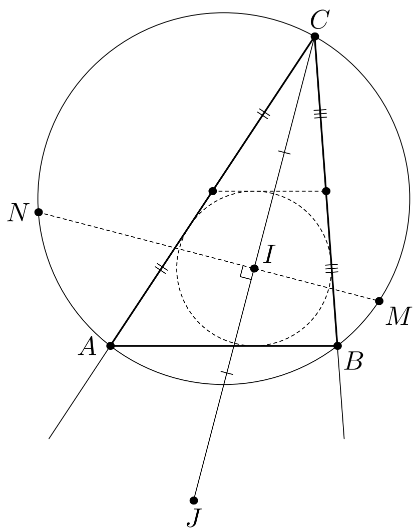

Рис. 9.6б

Второй способ. Пусть J — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB (см. рис. 9.6б). По теореме о трилистнике точки M и N являются центрами окружностей ACJ и BCJ, следовательно MN — серединный перпендикуляр к отрезку CJ, то есть I — середина CJ. Сделав гомотетию с центром C и коэффициентом $1/2$ получим, что вписанная окружность касается средней линии треугольника, параллельной AB. Условие описанности трапеции, образованной этой средней линией и сторонами равносильно требуемому равенству. Обратное утверждение доказывается аналогично.

9.7. (*Н. Белухов*) Девять окружностей расположены вокруг произвольного треугольника, как показано на рисунке 9.7а. Окружности, касающиеся одной и той же стороны треугольника, равны между собой. Докажите, что три прямые на рисунке пересекаются в одной точке. (Прямые проходят через вершины треугольника и центры соответствующих окружностей.)

Решение. *Первый способ.* Введем обозначения, как на рисунке 9.7б. Пусть r_a, r_b и r_c — радиусы окружностей с центрами O_a, O_b и O_c соответственно, $d_a(X)$ — расстояние от точки X до BC, d_b и d_c определены аналогично.

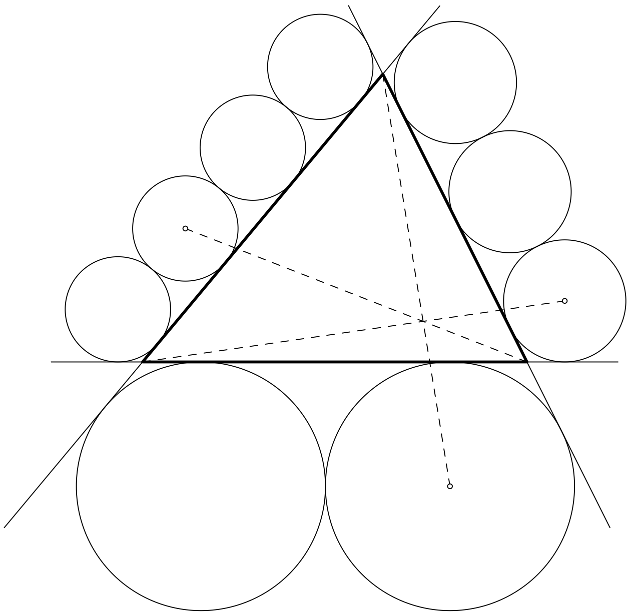

Рис. 9.7а

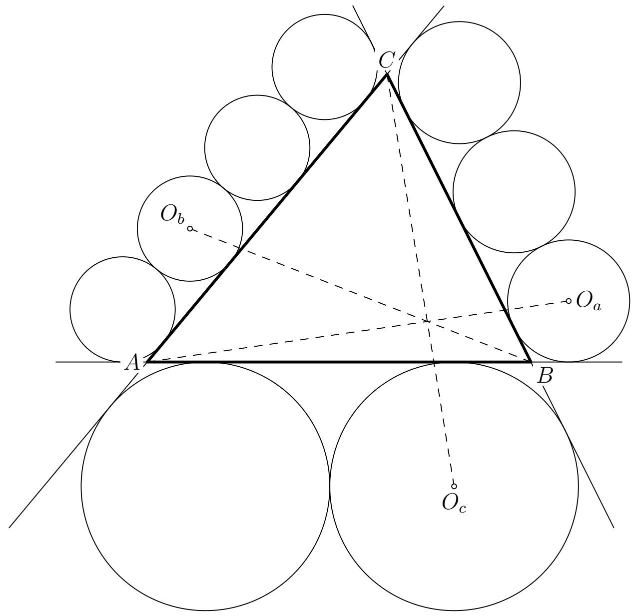

Рис. 9.7б

Фигура, состоящая из лучей CA, CB и трех первых, считая от C, окружностей, касающихся CA, подобна фигуре из лучей CB, CA и окружностей, касающихся CB. Следовательно, $d_a(O_b) : r_b = d_b(O_a) : r_a$. Аналогичные равенства верны для вершин A и B.

Теперь мы имеем

$$\frac{d_c(O_a)}{d_b(O_a)} \cdot \frac{d_a(O_b)}{d_c(O_b)} \cdot \frac{d_b(O_c)}{d_a(O_c)} = \frac{d_c(O_a)}{d_a(O_c)} \cdot \frac{d_b(O_c)}{d_c(O_b)} \cdot \frac{d_a(O_b)}{d_b(O_a)} = \frac{r_a}{r_c} \cdot \frac{r_c}{r_b} \cdot \frac{r_b}{r_a} = 1,$$

что по теореме Чевы влечет утверждение задачи.

Второй способ. Пусть $AC \cap BO_b = K$, $CB \cap AO_a = M$, $BA \cap CO_c = N$. Проведем через O_b отрезок $A'C' \parallel AC$, где A' и C' — на прямых BA и BC соответственно. Тогда $AK/CK = A'O_b/C'O_b = \left(\frac{r_b}{\sin A} + 2r_b\right) / \left(\frac{r_b}{\sin C} + 4r_b\right) = \left(\frac{1}{\sin A} + 2\right) / \left(\frac{1}{\sin C} + 4\right)$. Аналогично выразив отношения CM/BM и BN/AN, завершаем решение, воспользовавшись теоремой Чевы.

9.8. (*Н. Белухов, С. Герджиков*) Выпуклый фанерный многоугольник P лежит на деревянном столе. В стол можно вбивать гвозди, которые не должны проходить через P, но могут касаться его границы. Фиксирующим называется набор гвоздей, не позволяющий двигать P по столу. Найдите минимальное количество гвоздей, позволяющее зафиксировать любой выпуклый многоугольник.

Решение. Если P — параллелограмм, то нужно не менее четырех гвоздей. Действительно, если сторона s не касается никакого гвоздя, от P можно двигать в направлении двух смежных с s сторон.

Покажем теперь, что любой выпуклый многоугольник P можно зафиксировать четырьмя гвоздями.

Пусть окружность c с центром O наибольшая из окружностей, лежащих внутри P, A_1, A_2, …, A_k точки касания c со сторонами P, H — выпуклая оболочка этих точек.

Предположим, что существуют две вершины U и V многоугольника H такие, что UV — диаметр c (см. рис. 9.8а). Вобьем два гвоздя в точки U и V. Очевидно, что стороны P, содержащие U и V параллельны, следовательно P можно двигать только в направлении, перпендикулярном UV. Чтобы зафиксировать P, достаточно вбить еще два гвоздя, препятствующие его движению влево и вправо от $\overrightarrow{UV}$.

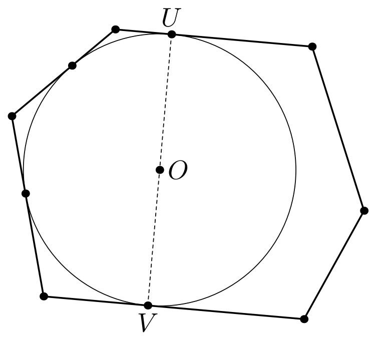

Рис. 9.8а

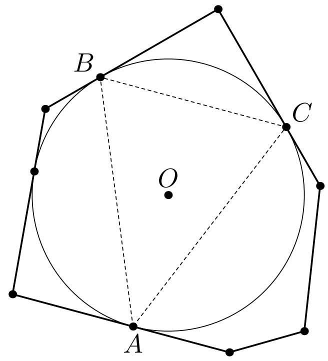

Рис. 9.8б

Будем теперь считать, что стороны и диагонали H не содержат O.

Предположим, что $O \notin H$. Пусть PQ сторона H, разделяющая H и O, а касательные к c в точках P и Q пересекаются в точке T. Тогда существует гомотетия с центром T и коэффициентом, большим 1, переводящая c в большую окружность, лежащую внутри P — противоречие.

Таким образом, $O \in H$. Тогда существует треугольник ABC, содержащий O (см. рис. 9.8б). (A, B, C три точки касания c со сторонами P.) Легко видеть, что три гвоздя, вбитые в точки A, B и C фиксируют P.

Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2014 г.

Решения задач
10 класс. Первый день

10.1 (*И. Богданов, Б. Френкин*) Вершины равнобедренного треугольника и центр его описанной окружности лежат на четырёх различных сторонах квадрата. Найдите углы треугольника.

Ответ: 15°, 15° и 150°.

Решение. Пусть $ABCD$ — квадрат, вершины X, Y, Z равнобедренного треугольника лежат на сторонах BC, CD, DA соответственно, а центр описанной окружности O треугольника XYZ лежит на AB (см. рис. 10.1). Так как отрезок OY пересекает отрезок XZ, угол XYZ тупой, поэтому основанием равнобедренного треугольника является именно XZ. Тогда отрезки OY и XZ перпендикулярны. Поскольку их соответственные проекции на перпендикулярные прямые BC и AB равны, они и сами равны, то есть сторона треугольника XYZ равна радиусу его описанной окружности.

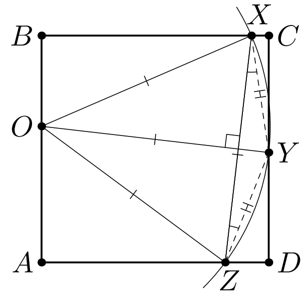

Рис. 10.1

Поскольку угол XYZ тупой, отсюда следует, что $\angle XYZ = 150^\circ$, а тогда остальные углы треугольника равны по 15°.

10.2 (*А. Зерцалов, Д. Скробот*) Даны окружность, её хорда AB и точка W — середина меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности из точки C пересекает касательные из точек A и B в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

Решение. *Первый способ.* Пусть отрезки AB и CW пересекаются в точке T (см. рис. 10.2). Тогда $\angle ACW = \angle ABW = \angle TAW$, то есть треугольники CAW и ATW подобны. Тогда, поскольку прямая WX — симедиана в треугольнике CAW, она является медианой в треугольника ATW, то есть точка N — середина AT. Аналогично, точка M — середина BT, откуда $MN = AB/2$.

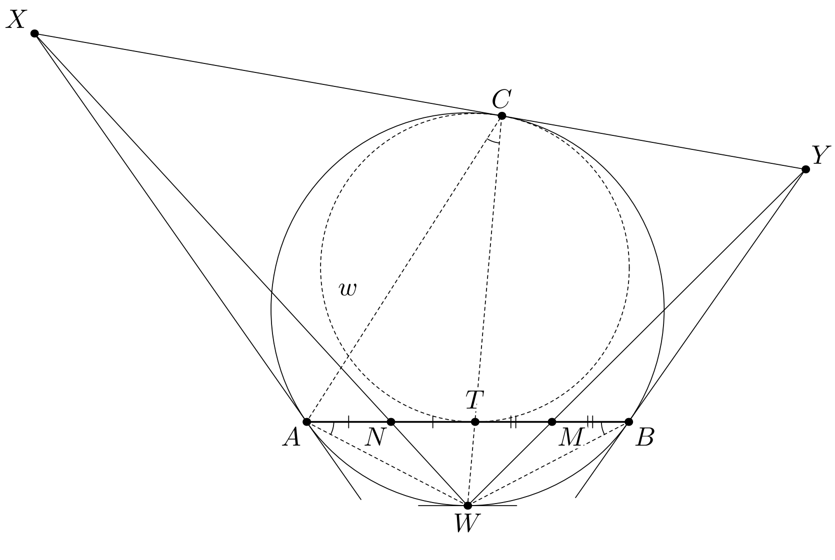

Рис. 10.2

Второй способ. Поскольку W — середина дуги AB, касательная в ней параллельна AB. Совершим гомотетию с центром C, переводящую эту касательную в AB; пусть наша окружность при этой гомотетии переходит в окружность ω, а точка W — в точку T.

Из подобия треугольников CAW и ATW, доказанного в предыдущем способе, следует, что $AW^2 = WC \cdot WT$, то есть W лежит на радикальной оси ω и точки A. Поскольку $XA = XC$, точка X также на ней лежит. Значит, эта радикальная ось есть WX, откуда $NA^2 = NT^2$, и N — середина AT. Аналогично, M — середина BT, откуда $MN = AB/2$.

10.3 (*А. Блинков*) Верно ли, что существуют выпуклые многогранники с любым количеством диагоналей? (*Диагональю называется отрезок, соединяющий две вершины многогранника и не лежащий на его поверхности.*)

Ответ: да.

Решение. Построим выпуклый многогранник с n диагоналями. При $n = 0$ годится любая пирамида.

Пусть $n > 0$. Возьмем $(n+2)$-угольную пирамиду $SA_1 \dots A_{n+2}$. Построим вовне неё на грани $SA_{n+1}A_{n+2}$ как на основании пирамиду $TSA_{n+1}A_{n+2}$ (так, чтобы все $n+4$ построенных вершины находились в выпуклом положении). Объединение этих двух пирамид — выпуклый многогранник $TSA_1 \dots A_{n+2}$, диагоналями которого являются ровно отрезки $TA_1, \dots, TA_n$.

10.4 (*А. Гаркавый, А. Соколов*) Дан фиксированный треугольник ABC. Пусть D — произвольная точка в плоскости треугольника, не совпадающая с его вершинами. Окружность с центром в D, проходящая через A, пересекает вторично прямые AB и AC в точках A_b и A_c соответственно. Аналогично определяются точки B_a, B_c, C_a и C_b. Точку D назовём *хорошей*, если точки A_b, A_c, B_a, B_c, C_a и C_b лежат на одной окружности. Сколько может оказаться точек, хороших для данного треугольника ABC?

Ответ: 2, 3 или 4.

Решение. Очевидно, что центр O описанной окружности Ω треугольника ABC — хорошая точка, поскольку в этом случае $B_a = C_a = A$, $A_b = C_b = B$ и $A_c = B_c = C$.

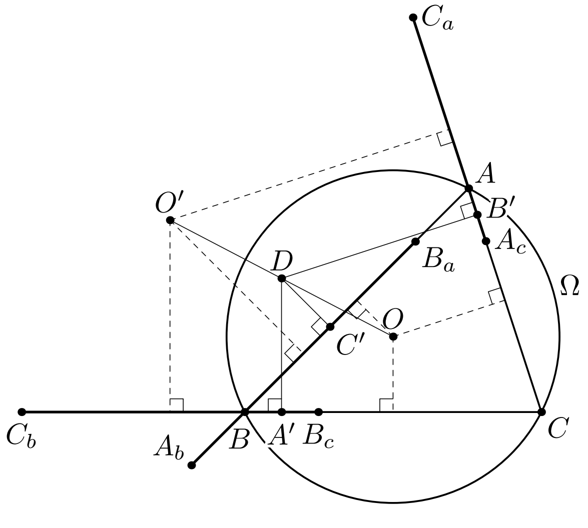

Рис. 10.4а

Рассмотрим теперь любую хорошую точку $D \neq O$. Пусть A', B', C' — проекции D на BC, CA, AB соответственно. Точки A и A_b симметричны относительно C', также как и точки B и B_a. Значит, середины отрезков AB и A_bB_a также симметричны относительно C'; следовательно, серединный перпендикуляр к A_bB_a проходит через точку O', симметричную O относительно D (см. рис. 10.4а). Аналогично, серединные перпендикуляры к A_cC_a и B_cC_b также проходят через O', при этом они не параллельны; значит, O' и является центром окружности, проходящей через шесть точек.

Далее, каждая из точек D и O' равноудалена от A_b и A_c; при этом $D \neq O'$, ибо $D \neq O$. Значит, прямая DO' является серединным перпендикуляром к A_bA_c. Но $B'C'$ — средняя линия в треугольнике AA_bA_c, следовательно, $DO' \perp B'C'$. Аналогично получаем, что $DO' \perp A'B'$, то есть точки A', B' и C' лежат на одной прямой. Значит, D лежит на Ω, а $A'B'C'$ — её прямая Симсона. Кроме того, эта прямая перпендикулярна прямой DO', то есть радиусу DO (см. рис. 10.4б).

Наоборот, пусть точка D окружности Ω такова, что её прямая Симсона перпендикулярна OD. Обращая рассуждения предыдущих двух абзацев, получаем, что точка O' лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам A_bB_a, B_cC_b, A_cC_a, A_bA_c, B_aB_c и C_aC_b, то есть все шесть точек равноудалены от O'. Значит, точка D — хорошая.

Найдём теперь количество описанных точек. Пусть точка X движется по Ω так, что угловая скорость радиуса OX постоянна. Как известно (и нетрудно показать счётом углов), прямая Симсона точки X вращается со вдвое меньшей угловой скоростью в противоположном направлении. Значит, угол между OX и этой прямой меняется с полуторной скоростью, поэтому на описанной окружности существуют три описанных точки. Добавляя центр O, получаем, что хороших точек не больше четырёх.

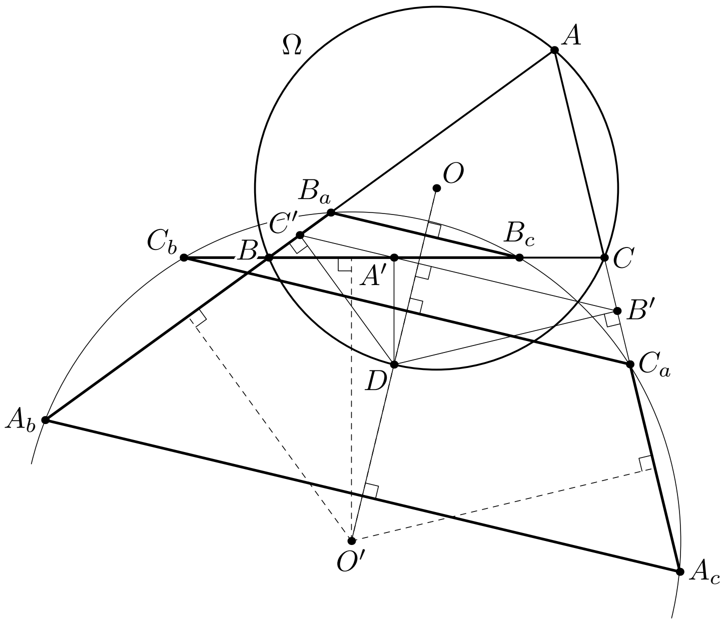

Рис. 10.4б

Осталось учесть, что некоторые из них могут совпасть с вершинами. Поскольку прямая Симсона вершины A — это высота из неё, такое происходит, если радиус OA параллелен BC, то есть $|\angle B - \angle C| = 90^\circ$. Это может произойти и с двумя вершинами — ровно в треугольнике с углами 30°, 30° и 120°. Отсюда и следует ответ.

Десятая всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2014 г.

Решения задач
10 класс. Второй день

10.5 (*А. Заславский*) В треугольнике провели высоту из одной вершины, биссектрису из другой и медиану из третьей, отметили точки их попарного пересечения, а затем всё, кроме этих отмеченных точек, стерли (три отмеченные точки различны, кроме того, известно, какая является чьим пересечением). Восстановите треугольник. (*Исследование проводить не требуется.*)

Решение. Пусть X, Y, Z — отмеченные точки. Нам требуется построить на прямых XY, YZ и ZX точки A, B и C соответственно так, чтобы в треугольнике ABC высота из A, биссектриса из B и медиана из C лежали соответственно на этих прямых.

Выберем произвольную точку B' и проведём через неё прямую ℓ_1, перпендикулярную XY; тогда ℓ_1 должна быть параллельна BC (см. рис. 10.5). Проведём через B' прямую, параллельную YZ, и отразим ℓ_1 относительно этой прямой; мы получим прямую ℓ_2, параллельную AB. На ℓ_2 выберем произвольную точку A' и проведём через середину отрезка $A'B'$ прямую, параллельную ZX, до пересечения с ℓ_1 в точке C'. Построенный треугольник $A'B'C'$ гомотетичен искомому (он переводится в ABC гомотетией, переводящей A' и B' в A и B соответственно; здесь мы считаем параллельный перенос частным случаем гомотетии с бесконечно удалённым центром).

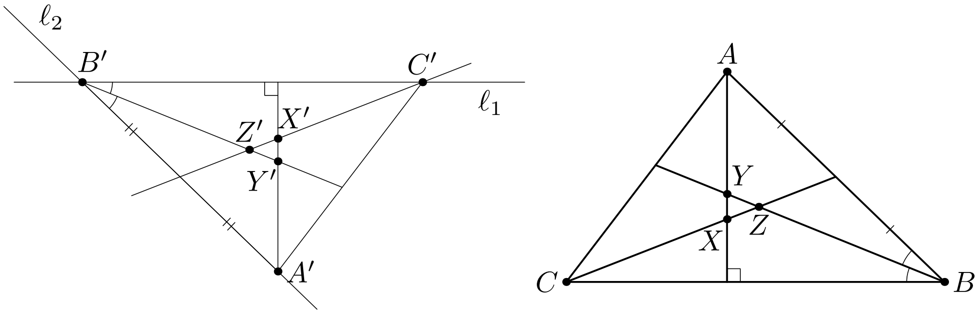

Рис. 10.5

Построим в этом треугольнике точки X', Y' и Z', соответствующие X, Y и Z соответственно. Из этих данных гомотетия однозначно восстанавливается, а после этого восстанавливается и исходный треугольник.

Замечание. Из решения видно, что задача имеет единственное решение, если точки X, Y и Z различны.

10.6 (*E. H. Garsia*) Вписанная окружность разностороннего треугольника ABC касается AB в точке C'. Окружность с диаметром BC' пересекает вписанную окружность вторично в точке A_1, а биссектрису угла B вторично в точке A_2. Окружность с диаметром AC' пересекает вписанную окружность вторично в точке B_1, а биссектрису угла A вторично в точке B_2. Докажите, что прямые AB, A_1B_1, A_2B_2 пересекаются в одной точке.

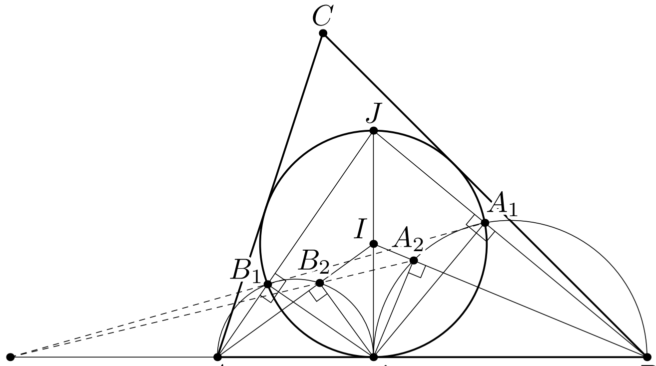

Рис. 10.6

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности ω, а J — её точка, диаметрально противоположная C' (см. рис. 10.6). Поскольку $\angle AB_1C' = \angle C'B_1J = \angle BA_1C' = \angle C'A_1J = 90^\circ$, точки A_1 и B_1 — это точки пересечения AJ и BJ с ω. Точки же A_2 и B_2 — это основания перпендикуляров из C' на BI и AI, соответственно.

Теперь из прямоугольных треугольников $AC'I$, $BC'I$, $AC'J$ и $BC'J$ с высотами $C'B_2$, $C'A_2$, $C'B_1$ и $C'A_1$ имеем
$$\frac{AB_1}{B_1J}\cdot\frac{JA_1}{A_1B}=\frac{AC'^2}{C'J^2}\cdot\frac{JC'^2}{C'B^2}=\frac{AC'^2}{4C'I^2}\cdot\frac{4IC'^2}{C'B^2}=\frac{AC'^2}{C'I^2}\cdot\frac{IC'^2}{C'B^2}=\frac{AB_2}{B_2I}\cdot\frac{IA_2}{A_2B}.$$
Согласно теореме Менелая, применённой к треугольникам AIB и AJB, это означает, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекают AB в одной точке (или обе параллельны ей).

10.7 (*С. Шлосман, О. Огиевецкий*) Докажите, что для любого тетраэдра его самый маленький двугранный угол (из шести) не больше, чем двугранный угол правильного тетраэдра.

Решение. Будем считать, что наибольшая из площадей граней тетраэдра равна 1; обозначим эту грань через $\mathcal{F}$. Пусть S_1, S_2 и S_3 — площади остальных трёх граней, а α_1, α_2 и α_3 — соответственно двугранные углы, образованные этими гранями с $\mathcal{F}$. Проектируя эти три грани на $\mathcal{F}$, получаем, что
$$S_1\cos\alpha_1+S_2\cos\alpha_2+S_3\cos\alpha_3=1.$$
Следовательно, одно из выражений вида $S_i\cos\alpha_i$ не меньше $\frac{1}{3}$, то есть
$$\cos\alpha_i\geq\frac{1}{3S_i}\geq\frac{1}{3}.$$

В правильном тетраэдре все три выражения равны, как и все четыре площади, так что в нём косинус двугранного угла равен $\frac{1}{3}$. Отсюда и следует требуемое.

10.8 (*Н.Белухов*) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Внутри треугольника BCD взяли точку L_a, расстояния от которой до сторон треугольника пропорциональны этим сторонам. Аналогично внутри треугольников ACD, ABD, ABC взяли точки L_b, L_c, и L_d соответственно. Оказалось, что четырехугольник $L_aL_bL_cL_d$ вписанный. Докажите, что у $ABCD$ есть две параллельные стороны.

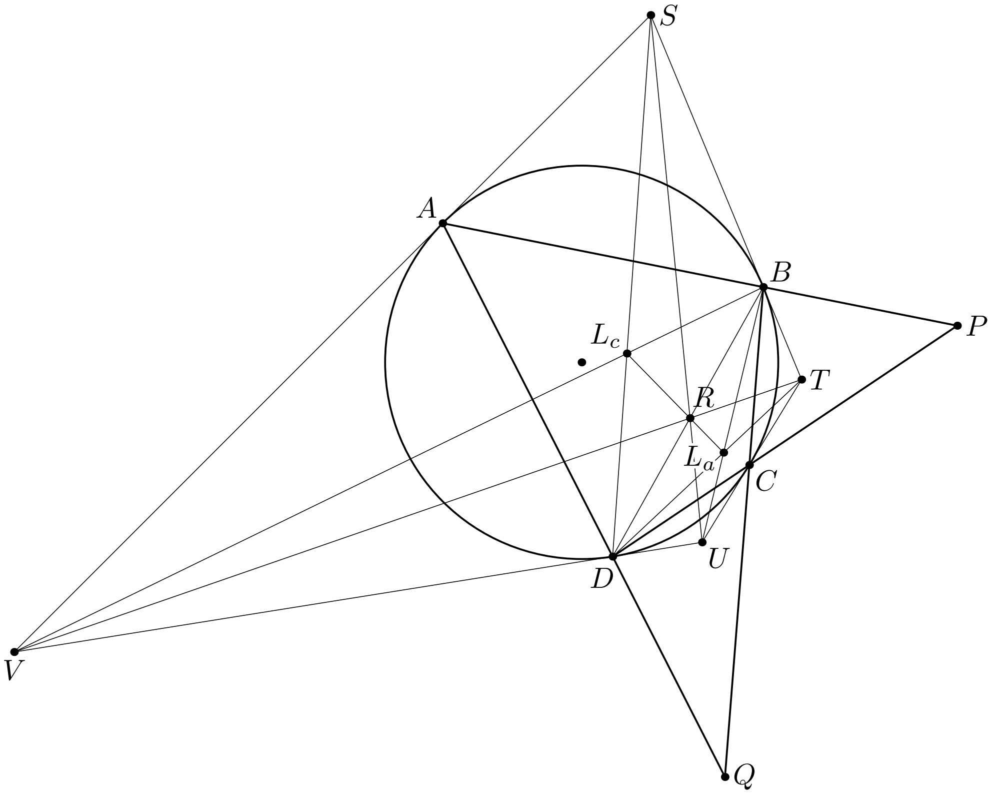

Рис. 10.8

Решение. Предположим, что четырехугольник $L_aL_bL_cL_d$ вписанный, но в четырехугольнике $ABCD$ нет параллельных сторон. Обозначим $P=AB\cap CD$, $Q=AD\cap BC$ и $R=AC\cap BD$ (см. рис. 10.8). Далее, пусть касательные к окружности в точках A, B, C и D образуют четырёхугольник $STUV$, как показано на рисунке; некоторые из точек S, T, U и V могут быть бесконечно удалёнными, но точки P, Q и R таковыми не являются.

По теореме Ньютона для описанного четырёхугольника $STUV$ имеем $R = SU \cap TV$. Далее, нетрудно понять, что точки L_a и L_c являются точками Лемуана треугольников BCD и BAD соответственно, поэтому $L_a = BU \cap DT$ и $L_c = BV \cap DS$. Применив теорему Паппа к шестиугольнику $BUSDTV$, получаем, что точка R лежит на прямой L_aL_c. Аналогично, точка R лежит на L_bL_d, то есть $R = L_aL_c \cap L_bL_d$.

Обозначим также $W = ST \cap UV$ и $X = SV \cap UT$ (эти точки могут быть бесконечно удалёнными). Точно так же, применяя теорему Паппа к шестиугольникам $ATVBXW$ и аналогичным, получаем, что $P = L_aL_b \cap L_cL_d$ и $Q = L_aL_d \cap L_bL_c$.

Так как вершины треугольника PQR являются точками пересечения диагоналей и противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, вершины этого треугольника являются полюсами его сторон относительно описанной окружности k четырехугольника $ABCD$ (такая окружность называется *автополярной окружностью* треугольника PQR). По тем же причинам, описанная окружность s четырехугольника $L_aL_bL_cL_d$ также является автополярной относительно PQR. Но для треугольника может существовать максимум одна автополярная окружность. Следовательно, $k \equiv s$, что невозможно, так как точки L_a, L_b, L_c и L_d лежит внутри k.

Замечание. Покажем, что автополярная окружность может быть только одна. Если ω автополярна для треугольника PQR, O — её центр, а r — её радиус, то $PO \perp QR$ и $QO \perp PR$, то есть O — ортоцентр треугольника PQR. Кроме того, $PO \cdot \rho(O, QR) = r^2$, откуда восстанавливается её радиус.