Десятая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Н.Москвитин, В.Протасов) (8) Дан прямоугольный треугольник ABC. На катете AB во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник ADB, а на гипотенузе AC во внутреннюю сторону – равносторонний треугольник AEC. Прямые DE и AB пересекаются в точке M. Весь чертеж стерли, оставив только точки A и B. Восстановите точку M.

   Решение. Так как $\angle DAB = \angle EAC = 60°$, то $\angle DAE = \angle BAC$, следовательно треугольники ADE и ABC равны и $\angle ADE = 90°$. Поэтому треугольник ADM — прямоугольный с углом $A = 60°$. Значит, $AD = AB = AM/2$ (рис.1), т.е. точка M симметрична A относительно B.

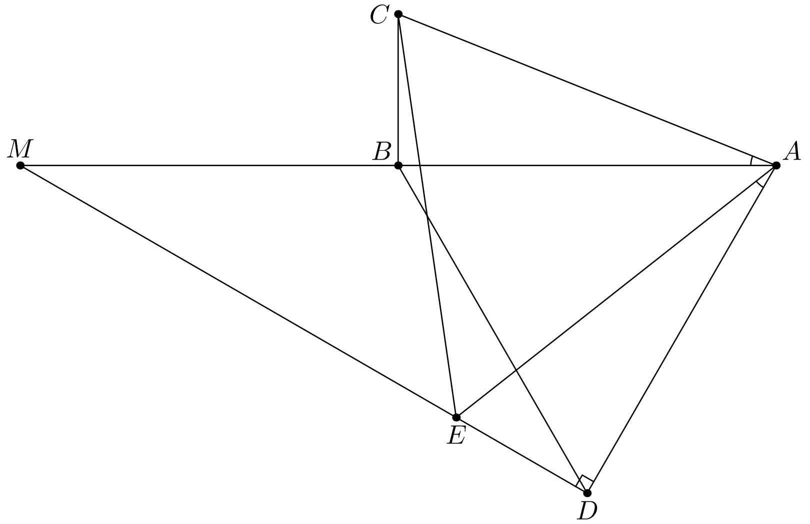

Рис.1

2. (К.Кноп) (8) Есть бумажный квадрат со стороной 2. Можно ли вырезать из него 12-угольник, у которого длины всех сторон равны 1, а все углы кратны 45°?

   Решение. Да, см. рис.2. Точки A, B, C, D лежат на средних линиях данного квадрата и образуют квадрат со стороной $\sqrt{2} - 1$.

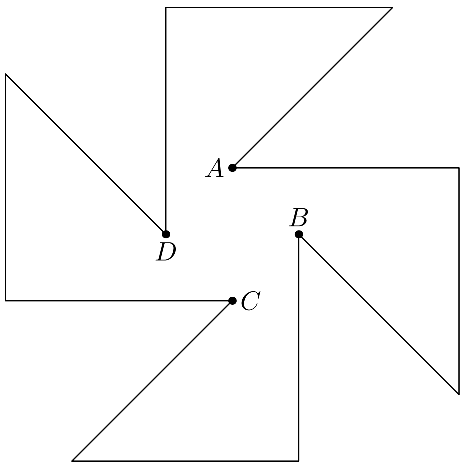

Рис.2

3. (Н.Москвитин) (8) Вокруг равнобедренного треугольника ABC с основанием AB описана окружность и в точке B проведена касательная к ней. Из C проведен пер-

пендикуляр CD к касательной, также проведены высоты AE и BF. Докажите, что D, E, F лежат на одной прямой.

Решение. Пусть CH — третья высота треугольника. Так как $\angle CBD = \angle CAB = \angle CBH$, треугольники CBD и CBH равны, т.е. $BD = BH$. Кроме того, в прямоугольном треугольнике AEB EH — медиана, значит $EH = HB = BD$ и $\angle BEH = \angle EBH = \angle EBD$. Следовательно, $EDBH$ — параллелограмм (рис.3) и $DE \parallel AB$. Поскольку EF также параллельна AB, прямые DE и EF совпадают.

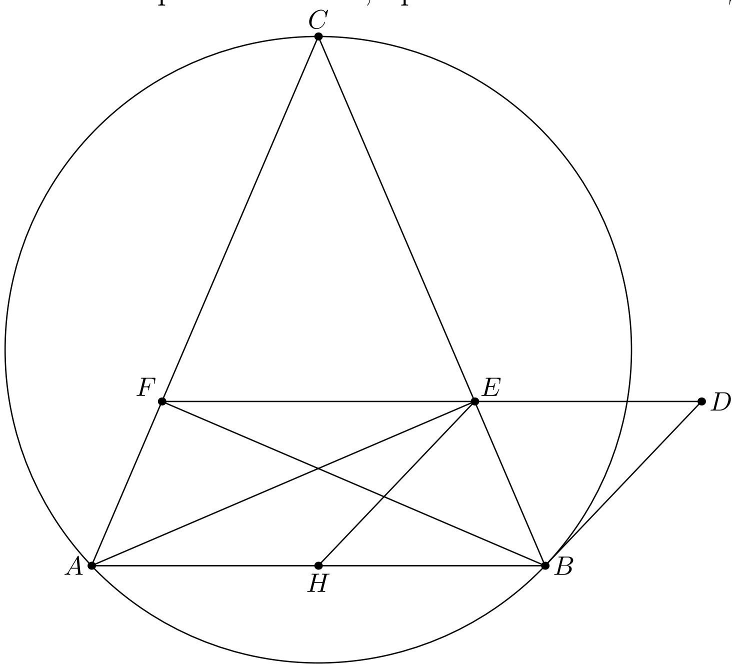

Рис.3

4. (Б.Френкин) (8) В треугольник вписан квадрат (две вершины на одной стороне и по одной на остальных). Докажите, что центр вписанной окружности треугольника лежит внутри квадрата.

Решение. Пусть в треугольнике ABC с инцентром I вершины квадрата K и L лежат на стороне AB, вершина M на стороне AC и вершина N на стороне BC (очевидно, углы A и B острые). Опустим из I перпендикуляр IH на AB, и пусть отрезок DE проходит через I, параллелен AB и его концы D и E лежат соответственно на AC и BC. Нужно доказать, что $DE > IH$ и $H \in KL$. Первое следует из того, что $IH = r$ и $DE > 2r$, где r — радиус вписанной окружности. Теперь продолжим IH за точку I до пересечения с одной из сторон треугольника ABC в некоторой точке F. Пусть для определенности $F \in AC$. Тогда заведомо H и K по одну сторону от L. Проведем через F прямую, параллельную AB, до пересечения с BC в точке G. Достаточно доказать, что $FG < FH$: тогда I и L по одну сторону от K и потому $I \in KL$, что и требуется.

Заметим, что FH — диаметр вписанной окружности, продолженный до пересечения с AC, поэтому F вне окружности и $FH > 2r$. Перпендикулярная прямая через F не имеет общих точек с окружностью. Поэтому точки касания окружности с AC и BC находятся между FG и AB. Следовательно, соединяющая их хорда больше, чем FG. А так как она меньше $2r$, то $FG < 2r < FH$, что и требовалось.

Комментарий. Из решения видно, что вместо квадрата можно взять любой прямоугольник, у которого бОльшая сторона лежит на стороне треугольника и не превосходит удвоенной меньшей стороны.

5. (Б.Френкин) (8) В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AL и высота AH (H лежит между L и B). При этом $ML = LH = HB$. Найдите отношение сторон треугольника ABC.

   Ответ. $AB : AC : BC = 1 : 2 : \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

   Решение. По свойству биссектрисы, $AC : AB = LA : LB = 2 : 1$. Это следует также из свойства медианы: именно, продолжим AB за точку B на отрезок $BD = AB$. Тогда BC — медиана треугольника ADC, и так как $AL : LB = 2 : 1$, то AL также лежит на медиане. Но это и биссектриса, поэтому $AC = AD = 2AB$. Теперь по теореме Пифагора получаем: $AC^2 - AH^2 = AB^2 - BH^2$, или $4AB^2 - 25BH^2 = AB^2 - BH^2$, откуда $AB = 2\sqrt{2}BH$ и $BC : AB = 6BH : AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

6. (А.Заславский) (8–9) Дана окружность с центром O и не лежащая на ней точка P. Пусть X — произвольная точка окружности, Y — точка пересечения биссектрисы угла POX и серединного перпендикуляра к отрезку PX. Найдите геометрическое место точек Y.

   Ответ. Прямая, перпендикулярная лучу OP и пересекающая его в точке, удаленной от O на расстояние $(OP + OX)/2$.

   Решение. Пусть K, L — проекции точки Y на OP и OX. Из определения точки Y следует, что $YP = YX$ и $YK = YL$. Значит треугольники YKP и YLX равны, т.е. $XL = PK$. Кроме того, $OL = OK$. Поскольку длины отрезков OP и OX не равны, одна из них равна сумме длин отрезков OK и KP, а другая — их разности. Следовательно, $OK = (OP + OX)/2$ (рис.6). Очевидно, что любая точка прямой принадлежит искомому ГМТ.

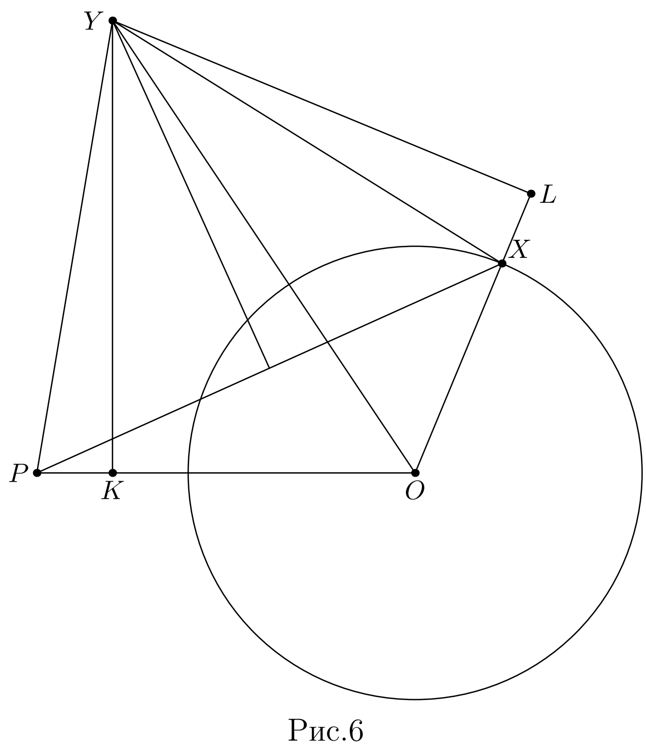

Рис.6

7. (В.Румянцев) (8–9) Перпендикуляр, восстановленный в вершине C параллелограмма $ABCD$ к прямой CD, пересекает в точке F перпендикуляр, опущенный из вершины A на диагональ BD, а перпендикуляр, восстановленный из точки B к прямой AB, пересекает в точке E серединный перпендикуляр к отрезку AC. В каком отношении отрезок EF делится стороной BC?

   Ответ. 1:2.

   Решение. Пусть точка K симметрична A относительно B. Тогда E — центр описанной окружности треугольника ACK. С другой стороны, так как $BKCD$ — параллелограмм, то $AF \perp CK$ и F — ортоцентр треугольника ACK. Следовательно, медиана CB делит EF в отношении 1:2 (рис.7).

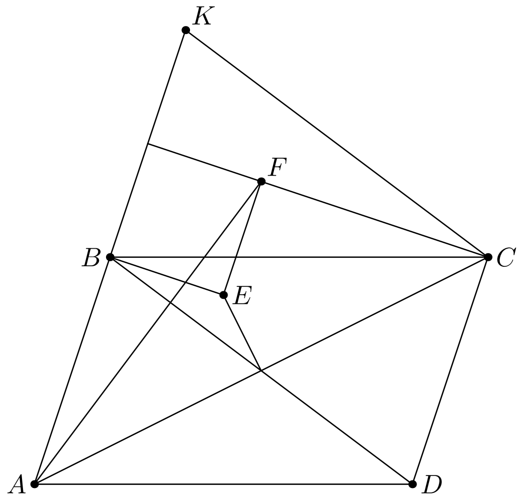

Рис.7

8. (Р.Садыков) (8–9) Дан прямоугольник $ABCD$. Через точку B провели две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сторону AD в точке K, вторая прямая пересекает продолжение стороны CD в точке L. Пусть F — точка пересечения KL и AC. Докажите, что BF перпендикулярно KL.

   Первое решение. Так как $\angle ABK = \angle CBL$, треугольники ABK и CBL подобны. Значит треугольники ABC и KBL также подобны и $\angle BKF = \angle BAF$. Следовательно, четырехугольник $ABFK$ — вписанный и $\angle BFK = 90°$ (рис.8).

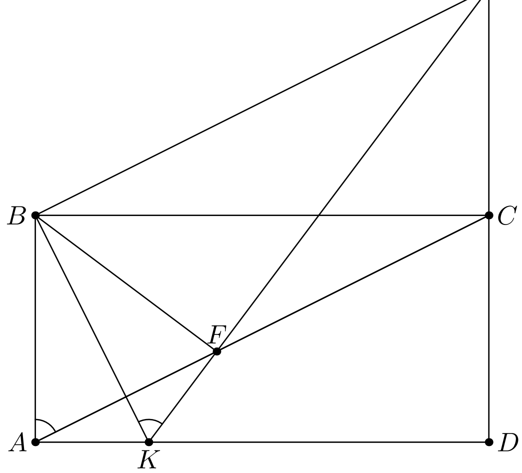

Рис.8

Второе решение.Заметим, что точка B лежит на описанной окружности треугольника KLD. Точки A и C являются основаниями перпендикуляров из точки B на прямые KD и DL. А значит основание перпендикуляра из точки B на прямую KL по теореме о прямой Симсона лежит на прямой AC, то есть совпадает с точкой F, что и требовалось доказать.

9. (Д.Швецов) (8–9) Окружности ω_1 и ω_2, касающиеся внешним образом в точке L, вписаны в угол BAC. Окружность ω_1 касается луча AB в точке E, а окружность ω_2 — луча AC в точке M. Прямая EL пересекает повторно окружность ω_2 в точке Q. Докажите, что $MQ \parallel AL$.

   Решение. Пусть N — вторая точка пересечения ω_1 с AL (рис.9). Тогда композиция симметрии относительно AL и гомотетии с центром A переводит дугу NE в дугу LM. Следовательно, опирающиеся на эти дуги углы ALE и MQE равны, что равносильно утверждению задачи.

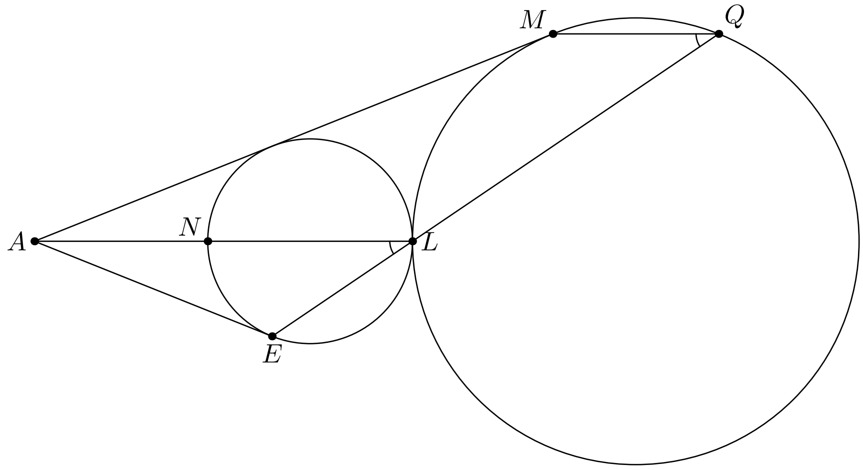

Рис.9

10. (М.Кунгожин) (8–9) В угол вписаны непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2. Рассмотрим все пары параллельных прямых l_1 и l_2 таких, что l_1 касается ω_1, l_2 касается ω_2 (ω_1, ω_2 между l_1 и l_2). Докажите, что средние линии всех трапеций, образованных прямыми l_1, l_2 и сторонами данного угла, касаются фиксированной окружности.

    Решение. Пусть O_1, O_2 — центры данных окружностей, r_1, r_2 — их радиусы, O — середина отрезка O_1O_2, l_1' — прямая, параллельная l_1 и проходящая через O_1, l_2' — прямая, симметричная l_1' относительно средней линии (рис.10). Тогда расстояние от O_2 до l_2' равно $|r_2 - r_1|$. Применив гомотетию с центром O_1 и коэффициентом $1/2$, получаем, что расстояние d от O до средней линии равно $|r_2 - r_1|/2$, т.е. все средние линии касаются окружности с центром O и радиусом d.

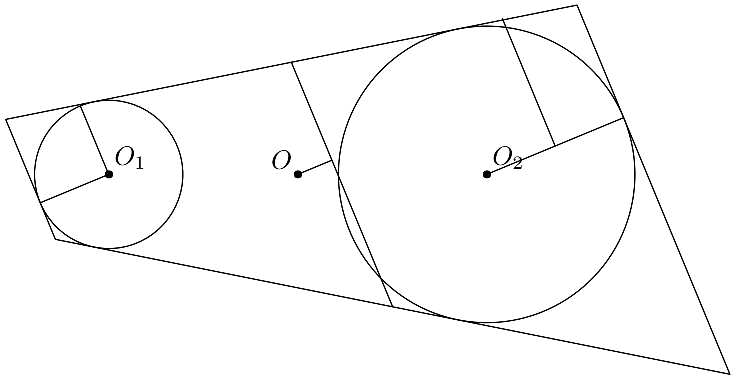

Рис.10

11. (М.Плотников) (8–9) Точки K, L, M и N на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ образуют еще один квадрат. DK пересекает NM в точке E, а KC пересекает LM в точке F. Докажите, что $EF \parallel AB$.

Решение. Обозначим точки пересечения прямых MN и LM с прямой AB как P и Q соответственно. Треугольники AKN, BLK, CML и DMN равны по гипотенузе и острому углу. Пусть $AK = a$ и $BK = b$, тогда $BL = CM = DN = a$, $CL = MD = NA = b$. Поскольку треугольники PKN и QLK прямоугольные, $PA \cdot a = b^2$ и $BK \cdot b = a^2$. Из подобия треугольников PEK и DEM получим, что $KE/DE = (a + b^2/a)/b = (a^2 + b^2)/ab$, но из подобия треугольников QFK и CFM следует, что $FK/CF = (b + a^2/b)/a = (a^2 + b^2)/ab$. Значит $KE/DE = FK/CF$ и $EF \parallel AB$, что и требовалось доказать.

12. (И. Макаров) (9–10) Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Пусть K_1 и K_2 — точки на ω_1 и ω_2 соответственно такие, что K_1A касается ω_2, а K_2A касается ω_1. Описанная окружность треугольника K_1BK_2 пересекает вторично прямые AK_1 и AK_2 в точках L_1 и L_2 соответственно. Докажите, что точки L_1 и L_2 равноудалены от прямой AB.

Решение. Так как $\angle K_1AB = \angle AK_2B$, $\angle K_2AB = \angle AK_1B$, треугольники AK_1B и K_2AB подобны (рис.12). Применяя к ним теорему синусов, получаем:

$$\frac{\sin\angle K_1AB}{\sin\angle K_2AB} = \frac{AK_1}{AK_2} = \frac{AL_2}{AL_1},$$

что равносильно утверждению задачи.

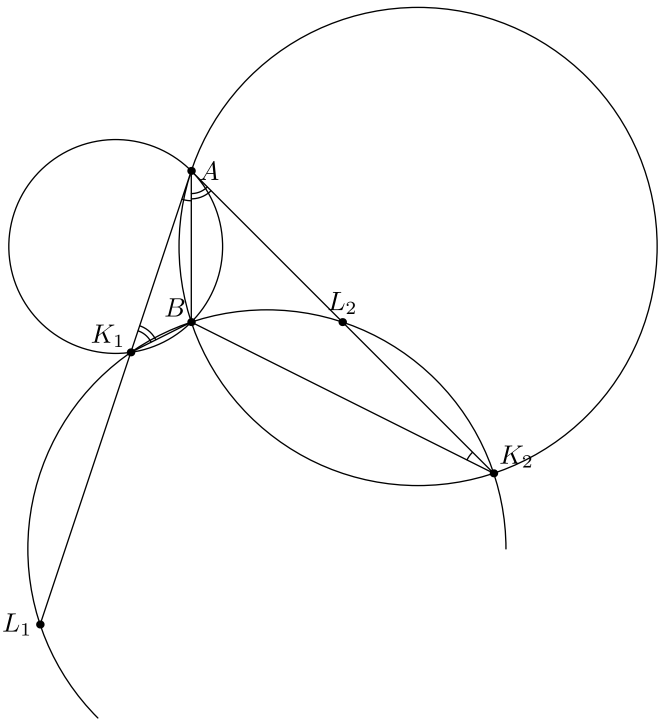

Рис.12

13. (Д.Прокопенко, Д.Швецов) (9–10) В окружности ω с центром O фиксирована хорда AC. Точка B движется по дуге AC. Точка P — фиксированная точка хорды AC. Прямая, проходящая через P параллельно AO, пересекает прямую BA в точке A_1; прямая, проходящая через P параллельно CO, пересекает прямую BC в точке C_1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1BC_1 движется по прямой.

    Решение. Пусть Q — вторая точка пересечения прямой AC с окружностью A_1PC_1. Тогда $\angle QA_1C_1 = \angle QPC_1 = \angle QCO = \angle QAO = \angle APA_1 = \angle QCA_1$. Следовательно, $QA_1 = QC_1$ и $\angle A_1QC_1 = \angle AOC = 2\angle A_1BC_1$, т.е. Q — центр описанной окружности треугольника A_1BC_1 (рис.13). Таким образом, этот центр движется по прямой AC.

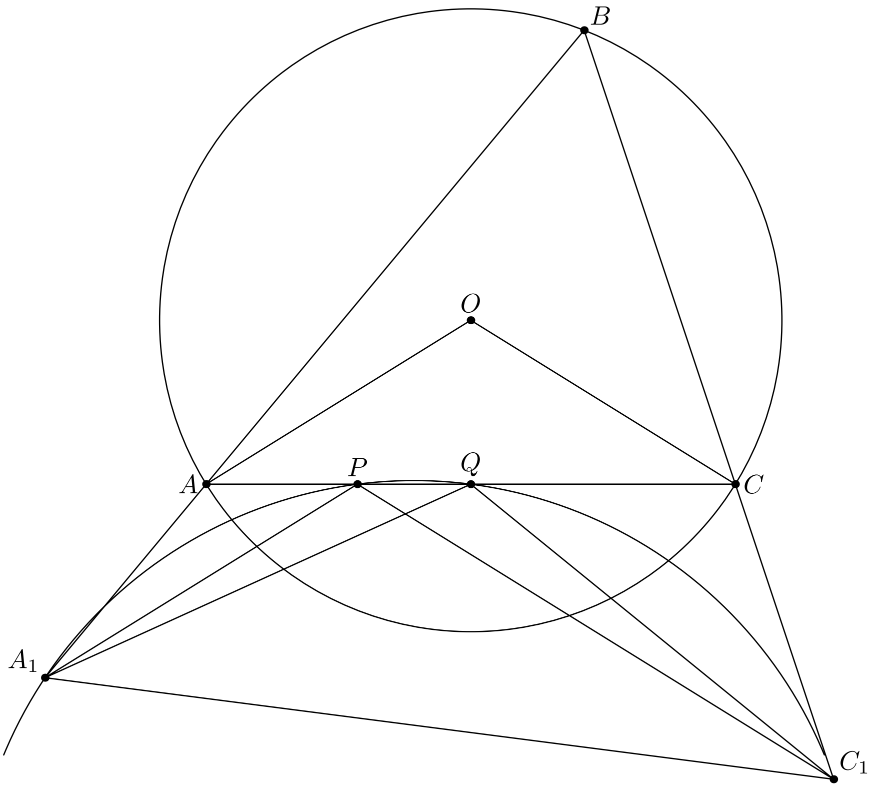

Рис.13

14. (Фольклор) (9–11) Постройте подмножество круга, площадью в половину площади круга, такое что его образ при симметрии относительно любого диаметра пересекается с ним по площади, равной четверти круга.

    Решение. Построим круг, концентричный данному вдвое меньшей площади. Разделим внутренний круг пополам произвольным диаметром, а внешнее кольцо — перпендикулярным диаметром. Объединив половину внутреннего круга с половиной внешнего кольца, получим искомое множество.

15. (9–11) В неравнобедренном треугольнике ABC высота из вершины A, биссектриса из вершины B и медиана из вершины C пересекаются в одной точке K.

    а) (Б.Френкин) Какая из сторон треугольника - средняя по величине?

    б) (А.Заславский) Какой из отрезков AK, BK, CK средний по величине?

    Ответ. а) AC. б) BK.

    Решение. а) Вспомним, что в неравнобедренном треугольнике биссектриса проходит между медианой и высотой, а высота — между биссектрисой и меньшей из прилежащих сторон. Предположим, что $AB < AC$. Тогда биссектриса угла A пересекает биссектрису угла B в точке, лежащей между K и AC. Через эту точку проходит и биссектриса угла C. Так как она лежит между медианой и меньшей из прилежащих сторон, то $AC < BC$. Значит, AC — средняя по величине из сторон треугольника.

    Пусть теперь $AB > AC$. Тогда рассуждение аналогичное: точка пересечения биссектрис лежит между прямыми AK и AB, биссектриса угла C лежит между CK и BC, поэтому $AC > BC$. Снова AC — средняя по величине.

б) Из условия задачи следует, что высота из A проходит внутри треугольника, т.е углы B и C — острые. Применив теорему Чевы, получаем, что $\sin A = \cos C \operatorname{tg} B$ или $\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} B \frac{1-\cos B}{\cos B}$. Потому при $B < 60^\circ$ имеем $C < B < 60^\circ < A$, а при $B > 60^\circ$ — $C > B > 60^\circ > A$.

В первом случае $\angle KBA < 30^\circ < \angle KAB$ и $\angle KCB < C/2 < B/2 = \angle KBC$, следовательно $KA < KB < KC$. Аналогично, во втором случае получаем $KA > KB > KC$.

Комментарий. Из условий задачи невозможно определить, какая сторона наибольшая и какая наименьшая, а также, какой из отрезков KA, KC наибольший и какой наименьший.

16. (Д.Прокопенко) (9–11) Из некоторой точки D в плоскости треугольника ABC провели прямые, перпендикулярные к отрезкам DA, DB, DC, которые пересекают прямые BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

    Решение. Окружности с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 проходят через основания соответствующих высот треугольника, поэтому степени ортоцентра H относительно всех трех окружностей равны. Следовательно, прямая DH является их общей радикальной осью и центры окружностей лежат на одной прямой.

    Комментарий. Применяя теорему Менелая к треугольнику ABC и треугольнику, образованному его средними линиями, нетрудно показать, что точки A_1, B_1, C_1 также лежат на одной прямой.

17. (Н.Москвитин) (10–11) Дан прямоугольный треугольник с гипотенузой AC, проведена биссектриса треугольника BD; отмечены середины E и F дуг BD окружностей, описанных около треугольников ADB и CDB соответственно (сами окружности не проведены). Постройте одной линейкой центры окружностей.

    Решение. Будем пользоваться следующими известными фактами.

    1.) Если даны две параллельные прямые, то, пользуясь только линейкой, можно разделить отрезок на одной из этих прямых пополам.

    2.) Если даны две параллельные прямые, то, пользуясь только линейкой, можно провести через не лежащую на них точку параллельную им прямую.

    Заметим теперь, что прямая EF является серединным перпендикуляром к BD. Поэтому точки K, L ее пересечения с AB и BC являются вершинами квадрата $BKDL$. Используя параллельные прямые BC и KD, разделим отрезок BC пополам. Используя параллельные прямые AB и DL, построим параллельную им прямую, проходящую через середину BC. Эта прямая является серединным перпендикуляром к BC и, значит, пересекает EF в центре описанной окружности треугольника BCD. Аналогично строится центр описанной окружности треугольника ABD.

18. (А.Заславский) (10–11) Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Касательные к окружности AIC в точках A, C пересекаются в точке X. Касательные к окружности BID в точках B, D пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, I, Y лежат на одной прямой.

    Решение. Пусть J — вторая точка пересечения окружностей AIC и BID. При инверсии относительно вписанной в $ABCD$ окружности точки A, B, C, D перейдут в вершины параллелограмма, а J — в его центр. Следовательно, $AJ/CJ = AI/CI$, т.е прямая IJ является симедианой треугольника AIC и, значит, проходит через X. Аналогично получаем, что эта прямая проходит через Y.

19. (В.Ясинский) (10–11) Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке P. Из точки A окружности ω_2, не лежащей на линии центров окружностей, проведены касательные AB, AC к ω_1. Прямые BP, CP вторично пересекают ω_2 в точках E и F. Докажите, что прямая EF, касательная к ω_2 в точке A и общая касательная к окружностям в точке P пересекаются в одной точке.

    Решение. При гомотетии с центром P точки B, C переходят в E, F. Значит, A переходит в полюс прямой EF относительно ω_2, т.е. полюс EF лежит на прямой AP, что равносильно утверждению задачи.

20. (Н.Белухов) (10–11) Дан четырехугольник $KLMN$. Окружность с центром O пересекает его сторону KL в точках A и A_1, сторону LM в точках B и B_1, и т.д. Докажите что

    а) если описанные окружности треугольников KDA, LAB, MBC и NCD пересекаются в одной точке P, то описанные окружности треугольников KD_1A_1, LA_1B_1, MB_1C_1 и NC_1D_1 также пересекаются в одной точке Q;

    б) точка O лежит на серединном перпендикуляре к PQ.

    Решение. Пусть $A_1'B_1'$ — переменная хорда окружности, равная A_1B_1, т.е. полученная из A_1B_1 поворотом вокруг центра O. Легко видеть, что окружность (LAB) будет геометрическим местом точек $K' = AA_1' \cap BB_1'$ при вращении хорды $A_1'B_1'$. Тогда, так как точка P является пересечением четырех таких ГМТ, прямые AP, BP, CP и DP пересекают окружность в точках A', B', C', D', образующих четырехугольник, равный $A_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим поворот вокруг O, переводящий $A'B'C'D'$ в $A_1B_1C_1D_1$, а P в некоторую точку Q. Прямые A_1Q, B_1Q, C_1Q и D_1Q пересекают окружность в четырех точках, образующих четырехугольник, равный $ABCD$. Применив аналогичные рассуждения к описанным окружностям треугольников KD_1A_1, LA_1B_1, MB_1C_1 и NC_1D_1, получим, что все они проходят через Q. Кроме того, так как OQ — образ OP при повороте, то $OP = OQ$, что равносильно п.б).

21. (Н.Полянский, Д.Скробот) (10–11) В четырехугольнике $ABCD$ вписанная окружность ω касается сторон BC и DA в точках E и F соответственно. Оказалось, что прямые AB, FE и CD пересекаются в одной точке. Окружности, описанные около треугольников AED и BFC, вторично пересекают окружность ω в точках E_1 и F_1. Докажите, что прямые EF и E_1F_1 параллельны.

    Решение. Рассмотрим точку пересечения BC и AD. Обозначим еҷ через R. Тогда R лежит на одной прямой с двумя другими точками касания (P и Q) окружности со сторонами четырехугольника.

    Пусть EE_1 пересекает AD в точке M. Рассмотрим три окружности: вписанную в четырехугольник, AED и AID, где I — центр вписанной окружности. Легко видеть, что радикальная ось AID и вписанной окружности является средней линией треугольника FPQ. Так как две другие радикальные оси пересекаются в точке M, получаем, что $RM = MF$ (рис.21).

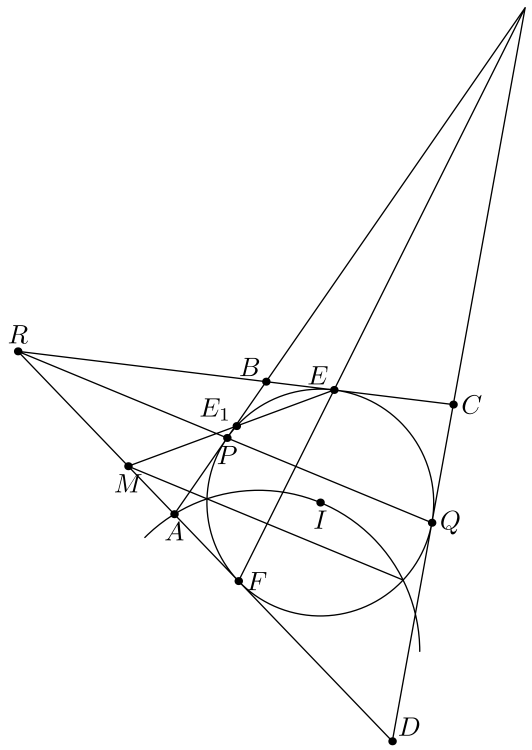

Рис.21

Аналогично, FF_1 пересекает BC в точке N, такой, что $RN = NE$. Следовательно, прямые EE_1 и FF_1 симметричны относительно биссектрисы угла ERF. Значит, точки E_1 и F_1 также симметричны и EFF_1E_1 — равнобокая трапеция.

22. (А. Блинков) (10–11) Существует ли выпуклый многогранник, у которого есть диагонали и любая диагональ меньше любого ребра?

    Решение. Да, возьмем правильный треугольник ABC со стороной 1 и две точки S_1, S_2, симметричные относительно его плоскости и такие, что $S_1S_2 < S_1A = S_1B = S_1C < 1$. Очевидно, что единственная диагональ S_1S_2 полученного многогранника меньше любого из его ребер.

23. (А.Акопян) (11) Дана тригармоническая четверка точек A, B, C и D, то есть такая, что
$$AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$
    Пусть A_1 — отличная от A точка такая, что четверка точек A_1, B, C и D тригармоническая. Точки B_1, C_1 и D_1 определяются аналогично. Докажите, что

    а) A, B, C_1, D_1 лежат на одной окружности;

    б) точки A_1, B_1, C_1, D_1 образуют тригармоническую четверку.

    Решение. а) Рассмотрим три сферы, касающиеся плоскости в точках A, B, C и друг друга внешним образом. Легко видеть, что, если радиусы этих сфер равны x, y, z, то $AB = 2\sqrt{xy}$ и т.д. Поэтому две сферы, касающиеся трех данных и плоскости, будут касаться плоскости в точках D и D_1. Таким образом можно построить восемь сфер a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1, касающихся плоскости в точках A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, причем сферы a и a_1 касаются b, c, d и т.д.

Сделаем инверсию пространства с центром в точке касания сфер c и d. Тогда эти сферы перейдут в две параллельные плоскости, а исходная плоскость, a и b — в три равных сферы, расположенных между этими плоскостями и попарно касающихся. Сферы c_1 и d_1 перейдут в две сферы, касающиеся этих трех, кроме того каждая из этих сфер касается одной из плоскостей, следовательно, они симметричны относительно плоскости центров трех остальных сфер. Поэтому образы точек A, B, C_1, D_1 лежат в одной плоскости, а сами эти точки на одной окружности.

б) Сделаем теперь инверсию в центром в точке D. Тогда сфера d перейдет в плоскость, параллельную плоскости ABC, а сферы a, b, c — в три равных попарно касающихся сферы. Следовательно, точки их касания с плоскостью будут вершинами правильного треугольника, а точка D_1 перейдет в центр этого треугольника. Образы точек A_1, B_1, C_1 будут образовывать правильный треугольник с тем же центром, т.е. четверка A_1, B_1, C_1, D_1 тригармоническая.

24. (Ф.Нилов) (11) Дана описанная четырехугольная пирамида $ABCDS$. Противоположные стороны основания пересекаются в точках P и Q, причем точки A и B лежат на отрезках PD и PC. Вписанная сфера касается боковых граней ABS и BCS в точках K и L. Докажите, что если прямые PK и QL пересекаются, то точка касания сферы и основания лежит на BD.

Первое решение. Поскольку точки P, Q, K и L лежат в одной плоскости, то отрезки PL и QP пересекаются в точке R, принадлежащей прямой BS. Обозначим через T точку касания сферы и основания пирамиды. Заметим, что равны треугольники QBK и QB; PBL и PBT (равны соответствующие касательные к сфере). Аналогично равны треугольники RKB и RLB. Значит, $\angle QTB = \angle QKB = \angle PLB = \angle PTB$. Но в любой описанной пирамиде $\angle CTQ = \angle PTA$ и $\angle CTD + \angle ATB = 180^{circ}$, следовательно $\angle PTB = 180°$.

Второе решение. Сделаем проективное преобразование, сохраняющее сферу и переводящее плоскость PQS в бесконечно удаленную. Тогда пирамида перейдет в бесконечную четырехугольную призму, а условие пересечения прямых PK и QL будет равносильно тому, что грани этой призмы, проходящие через AB и BC, образуют равные углы с плоскостью $ABCD$. Но тогда призма будет симметрична относительно плоскости, проходящей через BD и перпендикулярной $ABCD$. Значит, точка касания сферы с основанием лежит в плоскости симметрии.