XI Олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс. Решения

Ратмино, 30 июля 2015 г.

1. (В. Ясинский) Пусть $ABCD$ — трапеция, в которой углы A и B прямые, $AB = AD$, $CD = BC + AD$, $BC < AD$. Докажите, что угол ADC в два раза больше угла ABE, где E — середина AD.

   Первое решение. Пусть K — такая точка на стороне CD, что $CK = CB$, M — точка пересечения AB с перпендикуляром из K к CD. Тогда прямоугольные треугольники BCM и KCM равны по катету и гипотенузе, т.е. $BM = MK$, а CM — биссектриса угла C. Кроме того, из условия следует, что $KD = AD$, откуда аналогично получаем, что $AM = MK$, а DM — биссектриса угла D. Поэтому $AM = AB/2 = AE$ и, значит, равны треугольники ABE и ADM. Следовательно, $\angle ADC = 2\angle ADM = 2\angle ABE$ (рис. 8.1).

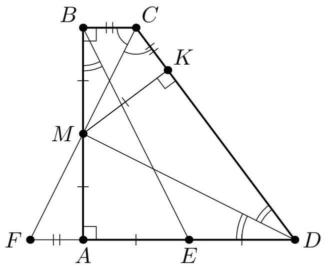

Рис. 8.1

   Второе решение. Отложим на продолжении DA за точку A отрезок $AF = BC$, тогда $DF = DC$. Пусть M — точка пересечения AB и CF, то есть середина AB. Тогда прямоугольные треугольники ABE и ADM равны, DM — медиана треугольника CDF, поэтому она — биссектриса угла CDA, т.е. $\angle CDA/2 = \angle ABE$.

2. (А. Блинков) Окружность, проходящая через вершины A, B и точку пересечения высот треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC во внутренних точках. Докажите, что $60^\circ < \angle C < 90^\circ$.

   Первое решение. Пусть A' и B' — точки пересечения окружности со сторонами BC и AC соответственно. Тогда угол C равен полуразности дуг AB и $A'B'$. Поскольку на дугу AB опирается угол между высотами треугольника, равный $180^\circ - \angle C$, получаем, что $180^\circ - \angle C > \angle C$, т.е. $\angle C < 90^\circ$.

   С другой стороны, угол C больше угла между касательными к окружности в точках A и B, который по теореме о вписанном и центральном углах равен $180^\circ - 2\angle C$. Следовательно, $\angle C > 60^\circ$.

Второе решение. Пусть угол C не меньше прямого, тогда H лежит вне треугольника или совпадает с C. В обоих случаях точки пересечения не лежат внутри сторон.

Поскольку $\angle AA'B = \angle BB'A = \angle AHB = 180^\circ - \angle C$, то $\angle AA'C = \angle BB'C = \angle C$, но эти углы больше углов A и B как внешние углы треугольников $AA'B$ и $BB'A$. Значит, C — наибольший угол треугольника ABC, то есть он больше 60°.

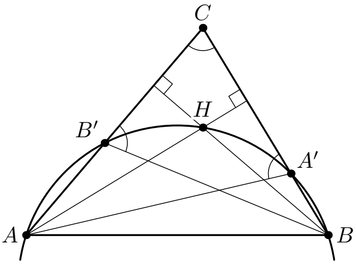

Рис. 8.2

3. (М.Евдокимов) В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle B = 20^\circ$. Точка M на основании AC такова, что $AM : MC = 1 : 2$, точка H — проекция C на BM. Найдите угол AHB.

Ответ. 100°.

Первое решение. Достроим треугольник до ромба $ABCD$. Пусть O — центр ромба. Тогда прямая BM делит медиану AO треугольника ABD в отношении $2 : 1$. Значит, эта прямая тоже является медианой, т.е проходит через середину K отрезка AD. Поскольку точки O и H лежат на окружности с диаметром BC, $\angle KHO = \angle BCO = \angle KAO$. Следовательно, четырехугольник $AHOK$ вписанный и $\angle AHK = \angle AOK = 80^\circ$, а $\angle AHB = 100^\circ$ (рис. 8.3).

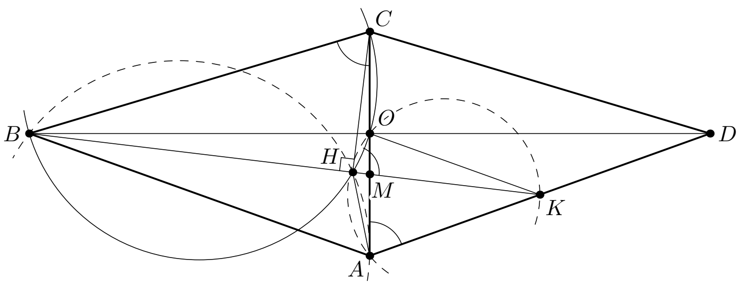

Рис. 8.3

Второе решение. Аналогично предыдущему решению заметим, что четырехугол $BCOH$ вписанный. Следовательно, $MH \cdot MB = MO \cdot MC = MA^2$. Поэтому окружность AHB касается прямой AC, откуда $\angle AHB = 180^\circ - \angle BAC = 100^\circ$.

4. (Н. Белухов) Докажите, что любой выпуклый четырехугольник можно разрезать на пять многоугольников, каждый из которых имеет ось симметрии.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник. Если $AB + CD = AD+BC$, то в него можно вписать окружность. Радиусы этой окружности, проведенные в точки касания со сторонами, разрезают четырехугольник на четыре симметричных четырехугольника. Разрезав затем один из этих четырехугольников на два равнобедренных треугольника, получим искомое разрезание.

Пусть теперь $AB+CD > AD+BC$. Построим окружность с центром O_1, касающуюся сторон AB, AD и CD в точках P_1, Q_1 и R_1 соответственно, и окружность с центром O_2, касающуюся AB, BC и CD в точках P_2, Q_2 и R_2. Радиусы, проведенные в эти точки, разрезают $ABCD$ на четырехугольники $AP_1O_1Q_1$, $BP_2O_2Q_2$, $CQ_2O_2R_2$, $DQ_1O_1R_1$ и шестиугольник $P_1P_2O_2R_2R_1O_1$, симметричные относительно биссектрис углов A, B, C, D и биссектрисы угла между прямыми AB и CD соответственно.

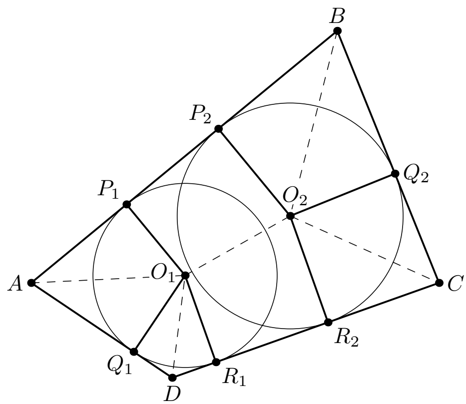

Рис. 8.4

XI Олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина

Финал. Второй день. 8 класс. Решения

Ратмино, 31 июля 2015 г.

5. (Е. Бакаев, А. Заславский) Есть два равных фанерных треугольника, один из углов которых равен α (эти углы отмечены). Расположите их на плоскости так, чтобы какие-то три вершины образовали угол, равный $\alpha/2$. (*Никакими инструментами, даже карандашом, пользоваться нельзя*).

   Решение. Требуемое расположение показано на рисунке 8.5. Заметим, что треугольник BCC' — равнобедренный и угол при его вершине есть $\angle C'CB = 180° - \alpha$. Следовательно, $\angle C'BC = \alpha/2$.

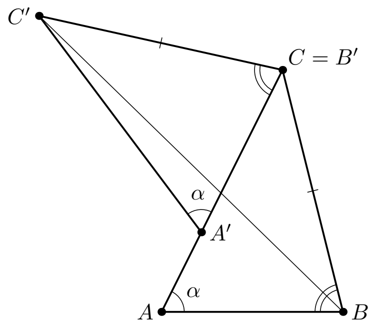

Рис. 8.5

6. (Д. Прокопенко) Через вершины B и C треугольника ABC провели перпендикулярно прямой BC прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB пересекают прямые b и c в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC.

   Первое решение. Пусть M — середина стороны BC. Достаточно доказать, что $AP^2 - AQ^2 = MP^2 - MQ^2$.

   Поскольку P и Q лежат на серединных перпендикулярах к AC и BC соответственно, $AP^2 - AQ^2 = CP^2 - BQ^2 = (BC^2 + BP^2) - (BC^2 + CQ^2) = (MB^2 + BP^2) - (MC^2 + CQ^2) = MP^2 - MQ^2$.

   Второе решение. Проведем окружность с центром P, проходящую через A. Она пересечет прямую BC в точке C и точке K, симметричной C относительно B. Аналогично, окружность с центром Q, проходящая через A, пересечет BC в точке B и точке L, симметричной B относительно C. Тогда степени точки M относительно этих окружностей равны, так что их радикальная ось — это AM и она перпендикулярна линии центров PQ (рис. 8.6).

7. (М. Кунгожин) На стороне AB четырехугольника $ABCD$ нашлась точка M такая, что четырехугольники $AMCD$ и $BMDC$ описаны около окружностей

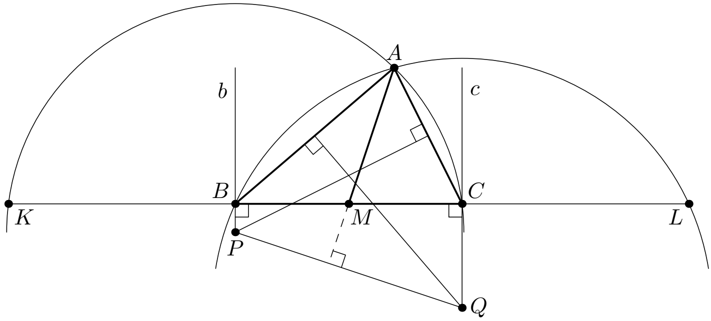

Рис. 8.6

с центрами O_1 и O_2 соответственно. Прямая O_1O_2 отсекает от угла CMD равнобедренный треугольник с вершиной M. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный.

Решение. Если прямые AB и CD параллельны, то окружности, вписанные в четырехугольники $AMCD$ и $BMDC$, равны; тогда из условия следует, что картинка симметрична относительно перпендикуляра, опущенного из M на O_1O_2, а значит. $ABCD$ — равнобокая трапеция (или прямоугольник).

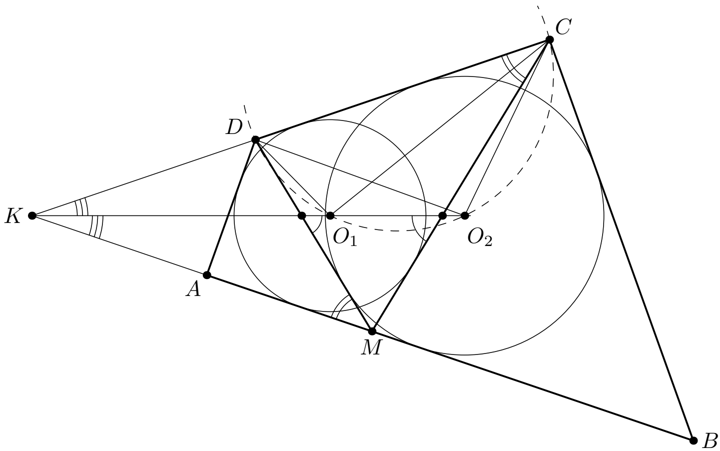

Рис. 8.7

Пусть теперь прямые AB и CD пересекаются в точке K; без ограничения общности, A лежит между K и B. Точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе угла BKC. По условию, прямые CM и DM образуют с этой биссектрисой равные углы: отсюда следует, что $\angle DMK = \angle KCM$ (рис. 8.7). Поскольку O_1 и O_2 — центры вписанной в $\triangle KMC$ и вневписанной в $\triangle KDM$ окружностей соответственно, имеем $\angle DO_2K = \angle DMK/2 = \angle KCM/2 = \angle DCO_1$; это значит. что четырехугольник CDO_1O_2 вписан. Те же окружности являются вневписанной в $\triangle AKD$ и вписанной в $\triangle KBC$ соответственно, так что $\angle KAD = 2\angle KO_1D = 2\angle DCO_2 = \angle KCB$, откуда и следует вписанность четырёхугольника $ABCD$.

8. (А. Антропов, А. Якубов) На сторонах AB, AC треугольника ABC взяли такие точки C_1, B_1 соответственно, что $BB_1 \perp CC_1$. Точка X внутри треугольника такова, что $\angle XBC = \angle B_1BA$, $\angle XCB = \angle C_1CA$. Докажите, что $\angle B_1XC_1 = 90^\circ - \angle A$.

Первое решение. Пусть X_1 — проекция точки X на прямую BC, а O — точка пересечения прямых BB_1 и CC_1. Тогда $\triangle C_1BO$ подобен $\triangle XBX_1$ по двум углам, значит, $\frac{BC_1}{BX} = \frac{BO}{BX_1}$. Тогда подобны и треугольники BC_1X и BOX_1 — по углу и отношению прилежащих к нему сторон. Значит, $\angle BXC_1 = \angle BX_1O$.

Аналогично, $\angle B_1XC = \angle OX_1C$ (рис. 8.8). Но тогда $\angle BXC_1 + \angle CXB_1 = \angle BX_1O + \angle OX_1C = 180^\circ$. Отсюда $\angle C_1XB_1 = 180^\circ - \angle BXC = \angle XBC + \angle XCB = \angle ABB_1 + \angle ACC_1 = \angle BOC - \angle BAC = 90^\circ - \angle A$, а это и требовалось.

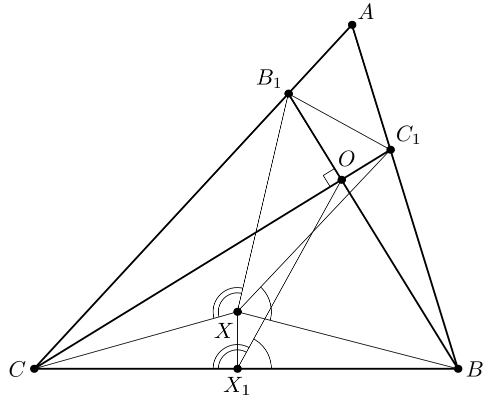

Рис. 8.8

Второе решение. Докажем два вспомогательных утверждения (они используются также в задаче 9.6).

Лемма 1. Если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то проекции точки их пересечения на стороны четырехугольника лежат на одной окружности.

Доказательство. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и пусть K, L, M и N — проекции точки O на AB, BC, CD и DA соответственно. Так как четырехугольники $OKBL$, $OLCM$, $OMDN$ и $ONAK$ вписанные, $\angle LKN + \angle LMN = \angle OBC + \angle OCB + \angle OAD + \angle ODA = 180^\circ$.

Лемма 2. Если проекции точки P на стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на одной окружности, то прямые, симметричные прямым AP, BP,

CP и DP относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Так как проекции P на стороны лежат на одной окружности, точки K, L, M и N, симметричные P относительно AB, BC, CD и DA соответственно, также лежат на одной окружности. Поскольку $AK = AP = AN$, серединный перпендикуляр к отрезку KN совпадает с биссектрисой угла KAN, которая симметрична AP относительно биссектрисы угла BAD. Следовательно, все четыре таких прямых проходят через центр окружности $KLMN$.

Теперь для решения задачи достаточно применить эти леммы к четырехугольнику BCB_1C_1. Действительно, так как прямые BX и CX симметричны прямым BB_1 и CC_1 относительно биссектрис углов B и C соответственно, то прямые B_1X и C_1X симметричны B_1B и C_1C относительно биссектрис углов CB_1C_1 и BC_1B_1 соответственно. Отсюда получаем $\angle B_1XC_1 = 180° - \angle XB_1C_1 - \angle XC_1B_1 = 180° - \angle CB_1O - \angle BC_1O = 180° - (90° + \angle A) = 90° - \angle A$.

XI Олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

Ратмино, 30 июля 2015 г.

1. (Д.Мухин) Пусть C — одна из точек пересечения окружностей α и β. Касательная в этой точке к α пересекает β в точке B, а касательная в C к β пересекает α в точке A, причем A и B отличны от C, и угол ACB тупой. Прямая AB вторично пересекает α и β в точках N и M соответственно. Докажите, что $2MN < AB$.

   Решение. По теореме об угле между касательной и хордой, $\angle ACM = \angle CBA$ и $\angle BCN = \angle CAB$. Поскольку угол ACB тупой, точки A, M, N, B лежат на прямой AB именно в таком порядке. По теореме о касательной и секущей имеем $AM = AC^2/AB$ и $BN = BC^2/AB$. Применив сначала неравенство о средних, а затем неравенство треугольника, получаем, что $2(AM + BN) \geqslant \frac{(AC+BC)^2}{AB} > AB$, что равносильно искомому неравенству.

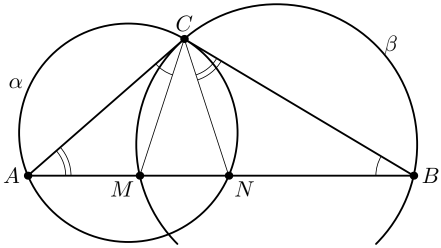

Рис. 9.1

2. (А. Заславский) Дан выпуклый четырехугольник. Постройте циркулем и линейкой точку, проекции которой на прямые, содержащие его стороны, являются вершинами параллелограмма. (*Исследование проводить не нужно.*)

   Решение. Все углы в решении предполагаются ориентированными.

   Пусть K, L, M и N — проекции искомой точки P на стороны AB, BC, CD и DA соответственно. Условие $KL \parallel MN$ равносильно тому, что $\angle BKL + \angle MND = \angle BAD$. В силу вписанности четырехугольников $PKBL$ и $PMDN$ имеем $\angle BKL = \angle BPL$ и $\angle MND = \angle MPD$. Следовательно, условие $KL \parallel MN$ равносильно тому, что

$$\angle BPD = \angle BPL + \angle MPD + \angle LPM = \angle BAD + (180^\circ - \angle DCB).$$

   Значит, мы можем построить окружность, проходящую через B и D, на которой лежит точка P (рис. 9.2).

   Аналогично, условие $KN \parallel LM$ равносильно тому, что $\angle CPA = 180^\circ + \angle CBA - \angle ADC$, и можно построить окружность, проходящую через A и C и содержащую P. Одной из точек пересечения полученных двух окружностей будет точка Микеля четвёрки прямых AB, BC, CD и DA

(её проекции на стороны четырехугольника лежат на одной прямой по теореме Симсона). Вторая точка пересечения — искомая.

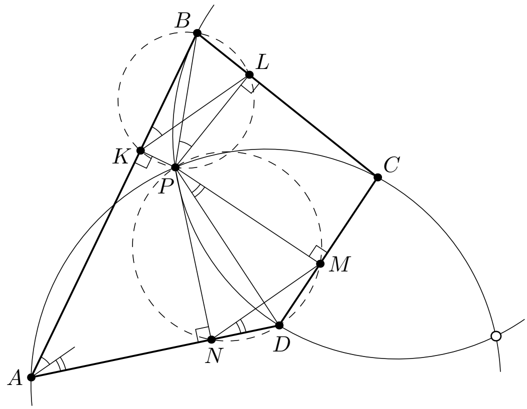

Рис. 9.2

3. (М. Харитонов, А. Полянский) На плоскости нарисованы 100 кругов, любые два из которых имеют общую точку (возможно, граничную). Докажите, что найдётся точка, принадлежащая не менее, чем 15 кругам.

   Решение. Пусть K — наименьший из данных кругов (будем считать, что его радиус равен 1), O — центр K, $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — правильный шестиугольник с центром O и стороной $\sqrt{3}$. Докажем, что каждый из данных кругов содержит одну из точек $O, A_1, \ldots, A_6$; из этого, по принципу Дирихле, будет следовать утверждение задачи.

   Пусть O' — центр некоторого круга K'. Если O' лежит в K, то круг K' содержит O, так как его радиус не меньше 1. Поэтому будем считать, что $OO' > 1$.

   Луч OO' образует с одним из лучей OA_i угол, не больший $30°$. Пусть это луч OA_1, тогда

$$O'A_1^2 = O'O^2 + OA_1^2 - 2O'O \cdot OA_1 \cos\angle O'OA_1 \leqslant O'O^2 + 3 - 3O'O.$$

   Если $1 < O'O \leqslant 2$, то $O'A_1 \leqslant 1$ и K' содержит A_1. Если же $O'O > 2$, то $O'A_1 < O'O - 1$. Но радиус K' не меньше, чем $OO' - 1$, так как этот круг пересекается с K; следовательно, и в этом случае K' содержит A_1.

4. (Р. Крутовский, А. Якубов) Дан фиксированный треугольник ABC. По описанной около него окружности движется точка P так, что хорды BC и AP пересекаются. Прямая AP разрезает треугольник BPC на два меньших, центры вписанных окружностей которых обозначим через I_1 и I_2 соответственно. Прямая I_1I_2 пересекает прямую BC в точке Z. Докажите, что все прямые ZP проходят через фиксированную точку.

Первое решение. Как известно, для любых двух окружностей их центры вместе с центрами внутренней и внешней гомотетий, переводящих одну окружность в другую, образуют гармоническую четверку. Для данных окружностей с центрами I_1 и I_2, центром внешней гомотетии является точка Z, а центр внутренней лежит на прямой AP (поскольку BZ и AP являются общими внешней и внутренней касательными к окружностям). Тогда при проекции прямой I_1I_2 из точки P на описанную окружность Ω треугольника ABC, центр внутренней гомотетии переходит в A, а точки I_1 и I_2 — в середины дуг AB и AC соответственно. Так как эти три проекции фиксированы, проекция точки Z также не зависит от P. Значит, все возможные прямые ZP проходят через фиксированную точку окружности Ω.

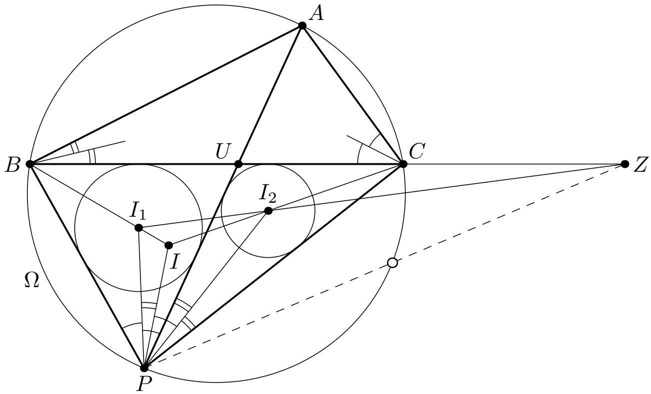

Рис. 9.4

Второе решение. Пусть U — точка пересечения AP и BC. Докажем, что двойное отношение $(BC;ZU)$ не зависит от P; отсюда проектированием прямой BC на описанную окружность Ω треугольника ABC получается, что прямая PZ пересекает окружность в фиксированной точке.

Пусть I, I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников PBC, PBU и PCU соответственно (рис. 9.4). Применяя теорему Менелая к треугольнику BIC, получаем

$$\frac{BZ}{CZ} = \frac{BI_1}{I_1I} \cdot \frac{II_2}{I_2C}.$$

Поскольку PI, PI_1 и PI_2 — биссектрисы углов BPC, BPU и UPC соответственно, имеем $\angle BPI_1 = \angle IPI_2 = \angle C/2$ и $\angle I_1PI = \angle I_2PC = \angle B/2$. Применяя теорему синусов к треугольникам BPI_1, I_1PI, IPI_2 и I_2PC, получаем теперь

$$\frac{BI_1}{I_1I} = \frac{BP}{IP} \cdot \frac{\sin(\angle C/2)}{\sin(\angle B/2)} \quad \text{и} \quad \frac{II_2}{I_2C} = \frac{IP}{CP} \cdot \frac{\sin(\angle C/2)}{\sin(\angle B/2)}.$$

Опять же применяя теорему синусов к треугольникам BPC, ABU и ACU, имеем

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle CBP} = \frac{\sin\angle BAU}{\sin\angle CAU} = \frac{BU}{AB} \cdot \frac{AC}{CU}.$$

Перемножая четыре полученных равенства, получаем

$$(BC; ZU) = \frac{\sin^2(\angle C/2)}{\sin^2(\angle B/2)} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{\operatorname{tg}(\angle C/2)}{\operatorname{tg}(\angle B/2)}.$$

Примечание. Из найденного значения $(BC; ZU)$ следует, что прямая PZ пересекает окружность в точке, лежащей на прямой, соединяющей центр вписанной окружности треугольника ABC и середину дуги CAB. Можно также показать, что в этой точке полувписанная окружность, касающаяся сторон AB и AC, касается описанной окружности.

XI Олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина

Финал. Второй день. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2015 г.

5. (Д. Швецов) В неравнобедренном прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AC, точки H_a, H_c — ортоцентры треугольников ABM, CBM соответственно. Докажите, что прямые AH_c, CH_a пересекаются на средней линии треугольника ABC.

   Решение. Пусть A' и C' — середины сторон AB и BC соответственно. Так как треугольники AMB и CBM равнобедренные, их высоты из точки M проходят через A' и C' соответственно. Тогда $AA' \perp BC \perp H_cC'$, $AH_a \perp BM \perp H_cC$ и $A'H_a \perp AB \perp C'C$. Итак, соответственные стороны треугольников $AA'H_a$ и $H_cC'C$ параллельны, то есть эти треугольники гомотетичны. Значит, прямые AH_c, H_aC и $A'C'$ пересекаются в центре соответствующей гомотетии, и он лежит на средней линии $A'C'$ (рис. 9.5).

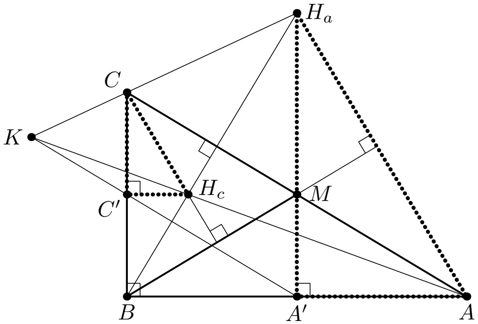

Рис. 9.5

6. (А. Заславский) Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярн Точки A', B', C', D' — центры описанных окружностей треугольников ABD, BCA, CDB, DAC соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC', DD' пересекаются в одной точке.

   Решение. Утверждение задачи следует из двух лемм (они используются также в задаче 8.8).

   Лемма 1. Если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то проекции точки их пересечения на стороны четырехугольника лежат на одной окружности.

   Доказательство. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и пусть K, L, M и N — проекции точки O на AB, BC, CD и DA соответственно. Так как четырехугольники $OKBL$, $OLCM$, $OMDN$ и $ONAK$ вписанные, $\angle LKN + \angle LMN = \angle OBC + \angle OCB + \angle OAD + \angle ODA = 180°$.

Лемма 2. Если проекции точки P на стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на одной окружности, то прямые, симметричные прямым AP, BP, CP и DP относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Так как проекции P на стороны лежат на одной окружности, точки K, L, M и N, симметричные P относительно AB, BC, CD и DA соответственно, также лежат на одной окружности. Поскольку $AK = AP = AN$, серединный перпендикуляр к отрезку KN совпадает с биссектрисой угла KAN, которая симметрична AP относительно биссектрисы угла BAD. Следовательно, все четыре таких прямых проходят через центр окружности $KLMN$.

Перейдём к решению задачи. Так как, например, прямая AC является высотой треугольника DAB, прямая AA' симметрична ей относительно биссектрисы угла A; аналогичные рассуждения работают для остальных вершин. Поэтому четыре таких прямых проходят через одну точку.

Примечание. Можно показать, что, если три из четырех прямых AA', BB', CC', DD' пересекаются в одной точке, то четырехугольник $ABCD$ либо вписанный, либо его диагонали перпендикулярны. В обоих случаях четвертая прямая проходит через ту же точку.

7. (Д. Креков) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M. Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C.

Ответ. $45°$.

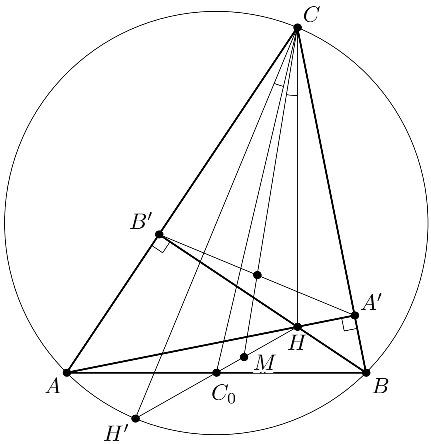

Рис. 9.7

Решение. Пусть C_0 — середина AB, а H' — точка, симметричная H относительно C_0 (как известно, H' — точка описанной окружности треугольника A диаметрально противоположная C). Медианы CC_0 и CM подобных треугольников ABC и $A'B'C$ симметричны относительно биссектрисы угла C. Также симметричны относительно этой биссектрисы высота CH и диаметр описанной окружности CH'. Следовательно, $\angle H'CC_0 = \angle MCH$, а значит, CM — симедиана треугольника CHH' (рис. 9.7). Отсюда получаем $(CH'/CH)^2 = H'M/MH = 2$, а поскольку $CH = CH' \cos \angle C$, то $\angle C = 45^\circ$.

8. (И. Фролов) В треугольнике ABC серединный перпендикуляр к BC пересекает прямые AB и AC в точках A_B и A_C соответственно. Обозначим через O_a центр окружности, описанной около треугольника AA_BA_C. Аналогично определим O_b и O_c. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $O_aO_bO_c$, касается описанной окружности исходного треугольника.

Решение. Пусть касательные к описанной окружности треугольника ABC в его вершинах пересекаются в точках A', B', C' (A' — точка пересечения касательных в точках B и C, и т.п.).

Рассмотрим треугольник, образованный прямыми CA, CB и произвольной прямой ℓ, перпендикулярной AB. Все такие треугольники гомотетичны друг другу с центром в C. Более того, при равномерном движении ℓ центр описанной окружности этого треугольника движется прямолинейно и равномерно.

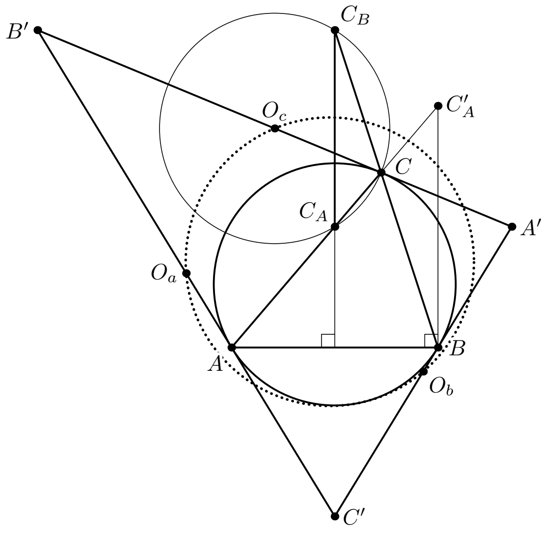

Рис. 9.8

Рассмотрим два положения ℓ, когда она проходит через B и A. В первом положении центром описанной окружности полученного треугольника CC'_AB является точка A', так как $CA' = BA'$ и $\angle CA'B = 180^\circ - 2\angle A = 2\angle CC'_AB$ (рис. 9.8). Аналогично, во втором положении центром будет точка B'. Тогда центр O_c окружности CC_AC_B — это середина отрезка $A'B'$. (Случаи расположения точек, отличные от показанного на рисунке, разбираются аналогично.)

Таким же образом мы получаем, что O_a и O_b — середины отрезков $B'C'$ и $A'C'$ соответственно. Тогда окружность $O_aO_bO_c$ — это окружность девяти точек треугольника $A'B'C'$, а окружность ABC — либо вписанная (если $\triangle ABC$ остроугольный), либо вневписанная окружность этого треугольника. В любом случае эти две окружности касаются по теореме Фейербаха.

XI Олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

Ратмино, 30 июля 2015 г.

1. (А. Карлюченко) Пусть K — точка на стороне BC треугольника ABC, KN — биссектриса треугольника AKC. Прямые BN и AK пересекаются в точке F, а прямые CF и AB — в точке D. Докажите, что KD — биссектриса треугольника AKB.

   Решение. По свойству биссектрисы, $\frac{CN}{NA} = \frac{CK}{KA}$. Теперь по теореме Чевы
$$\frac{BD}{DA} = \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{BK}{KA},$$
   что и означает, что KD — биссектриса треугольника AKB (рис. 10.1).

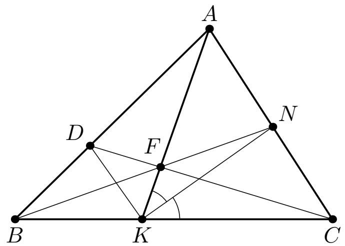

Рис. 10.1

2. (А. Шаповалов) Докажите, что всякий треугольник площади 1 можно накрыть равнобедренным треугольником площади менее $\sqrt{2}$.

   Решение. Пусть ABC — данный треугольник ($AB \geqslant AC \geqslant BC$). Пусть CH — его высота, точка A' симметрична A относительно H, а точка B' симметрична B относительно биссектрисы угла A (рис. 10.2). Тогда ACA' и ABB' — равнобедренные треугольники, накрывающие ABC, причем $S_{ACA'}/S_{ABC} = AA'/AB = 2AH/AB$, а $S_{ABB'}/S_{ABC} = AB'/AC = AB/AC$. Произведение этих отношений есть $2AH/AC < 2$, значит, какое-то из них меньше $\sqrt{2}$.

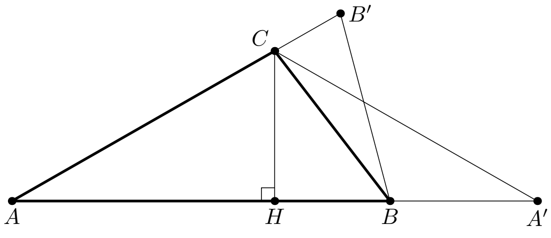

Рис. 10.2

3. (А. Акопян) В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB соответственно. Точки B_2 и C_2 — середины отрезков BA_1

и CA_1 соответственно. Точка B_3 симметрична C_1 относительно B, а точка C_3 симметрична B_1 относительно C. Докажите, что одна из точек пересечения окружностей, описанных около треугольников BB_2B_3 и CC_2C_3 лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

Первое решение. На описанной окружности Ω треугольника ABC отметим точку X так, что $\angle XA_1C = \angle CA_1A$. Тогда X симметрична второй точке пересечения прямой AA_1 с Ω относительно серединного перпендикуляра к BC, так что $A_1X \cdot A_1A = A_1B \cdot A_1C = A_1C^2$. Отсюда следует, что треугольники XA_1C и CA_1A подобны.

Пусть T — середина AA_1. Тогда XC_2 и CT — соответственные медианы в подобных треугольниках, откуда $\angle CXC_2 = \angle ACT$ (рис. 10.3.1). С другой стороны, CTC_2C_3 — параллелограмм, так что $\angle CC_3C_2 = \angle ACT = \angle CXC_2$. Это значит, что X лежит на окружности, описанной около треугольника CC_2C_3.

Аналогично, X лежит на окружности, описанной около BB_2B_3. Поэтому X и есть требуемая точка.

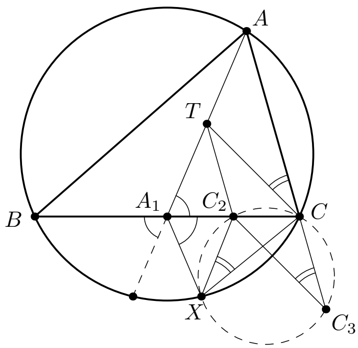

Рис. 10.3.1

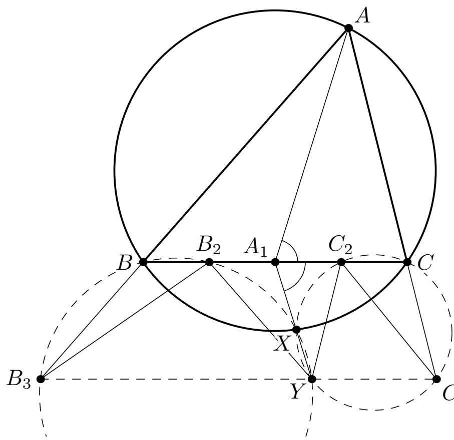

Рис. 10.3.2

Второе решение. Построим треугольник YB_2C_2, подобный треугольнику ABC и лежащий с ним в разных полуплоскостях относительно BC (рис. 10.3.2). Так как $B_2C_2 = BC/2$, точки B_3, Y и C_3 находятся на одном и том же расстоянии от BC (равном половине расстояния от A до BC). Кроме того, $YB_2 = AB/2 = BB_3$ и $YC_2 = AC/2 = CC_3$. Значит, BB_2YB_3 и CC_2YC_3 — равнобокие трапеции, и Y — одна из общих точек окружностей BB_2B_3 и CC_2C_3.

Так как степени точки A_1 относительно этих окружностей равны, вторая точка их пересечения лежит на прямой A_1Y. Пусть луч A_1Y пересекает описанную около ABC окружность в точке X. Так как AA_1 и YA_1 — соответственные медианы в подобных треугольниках ABC и YB_2C_2, получаем

$\angle XA_1C = \angle CA_1A$, а значит, как и в первом решении, $A_1X \cdot A_1A = A_1B \cdot A_1C$. Поэтому $A_1X \cdot A_1Y = A_1X \cdot A_1A/2 = A_1B^2/2 = A_1B \cdot A_1B_2$, то есть X и есть вторая точка пересечения окружностей.

4. (И. Яковлев) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 и отмечены точки A_2, B_2, C_2, в которых вневписанные окружности касаются сторон BC, CA, AB соответственно. Прямая B_1C_1 касается вписанной окружности треугольника. Докажите, что точка A_1 лежит на окружности $A_2B_2C_2$.

Первое решение. Пусть H, I и O — соответственно ортоцентр, центр вписанной окружности ω и центр описанной окружности Ω треугольника ABC, а r — радиус ω. Пусть A', B' и C' — точки касания сторон BC, AC и AB с вписанной окружностью, а I_A, I_B и I_C — центры вневписанных окружностей, касающихся тех же сторон соответственно. Наконец, пусть M_A — середина BC.

Из условия следует, что четырехугольник BC_1B_1C описан около ω. Также этот четырехугольник является вписанным в окружность с диаметром BC. Как известно, во вписанно-описанном четырехугольнике точка пересечения диагоналей лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей (это следует, например, из того факта, что точка пересечения диагоналей является полюсом прямой, соединяющей точки пересечения продолжений противоположных сторон, относительно обеих окружностей). Таким образом, точки H, I и M_A лежат на одной прямой.

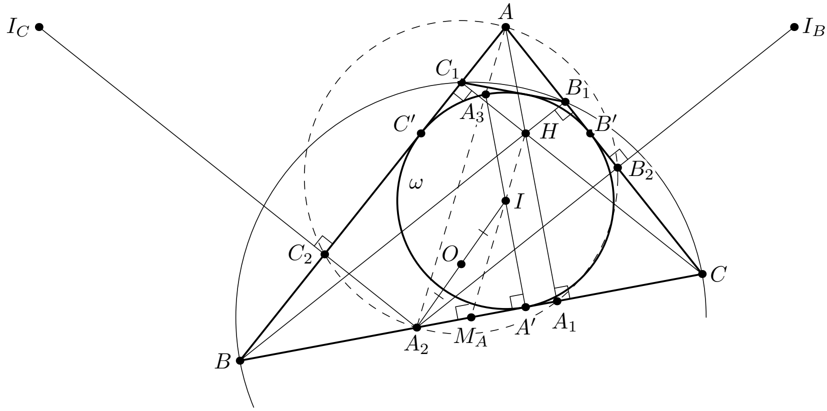

Рис. 10.4.1

Пусть A_3 — точка окружности ω, диаметрально противоположная точке A'. Как известно, точки A, A_3 и A_2 лежат на одной прямой. Также M_A — середина A_2A'. Тогда IM_A — средняя линия в треугольнике $A_2A'A_3$. Из этого следует, что $HI \parallel AA_3$, т.е. AA_3IH — параллелограмм, и $r = A_3I = AH = 2OM_A$ (невырожденность параллелограмма следует из неравнобедренности $\triangle ABC$). Но тогда отрезок M_AO является средней линией в треугольнике $IA'A_2$, поскольку он проходит через середину $A'A_2$, параллелен IA' и равен $r/2 = IA'/2$.

Итак, точка A_2 симметрична точке I относительно точки O. Прямые $I_C C_2$ и IC', а также $I_B B_2$ и IB', симметричны относительно O; значит, они обе проходят через A_2. Поэтому $\angle A_2B_2B = \angle A_2C_2C = 90° = \angle AA_1B$. Это значит, что все пять точек A, A_2, B_2, C_2 и A_1 лежат на окружности с диаметром AA_2.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что $OM_A = r/2$; дальше решение можно закончить так же, как и предыдущее. Мы используем те же обозначения. Кроме того, обозначим через T точку касания вневписанной окружности ω_A с AB.

По условию, окружность ω является вневписанной для $\triangle AB_1C_1$. Значит, при преобразовании подобия, переводящем $\triangle AB_1C_1$ в $\triangle ABC$, окружность ω переходит в ω_A. Отсюда $AB'/AT = \cos\angle A$, то есть $TB' \perp AC$, и TB' проходит через I. Поскольку $\angle TIC' = \angle A = \angle COM_A$, прямоугольные треугольники TIC' и COM_A подобны (рис. 10.4.2). Более того, $TC' = TB + BC' = BA_2 + CA_2 = BC = 2CM_A$, так что коэффициент подобия равен 2. Поэтому $OM_A = IC'/2 = r/2$.

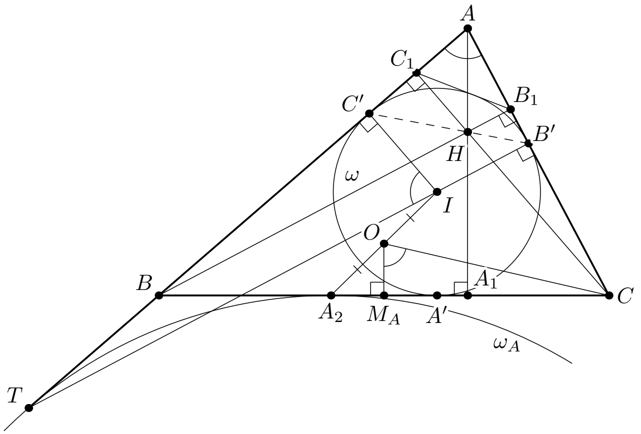

Рис. 10.4.2

Примечание 1. В любом треугольнике ABC окружность $A_2B_2C_2$ — педальная для точки K, симметричной I относительно O. Эта же окружность — педальная для точки K', изогонально сопряженной к K. Тем самым, A_1 лежит на окружности $A_2B_2C_2$ тогда и только тогда, когда K' лежит на AA_1, то есть когда либо K лежит на AO, либо $K' = A$. Первый случай приводит к равнобедренному треугольнику, а во втором случае $A_2 = K$.

Примечание 2. Можно показать также, что ортоцентр треугольника ABC лежит на прямой $B'C'$ (рис. 10.4.2), а вневписанная окружность, касающаяся BC, перпендикулярна описанной.

XI Олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина

Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2015 г.

5. (Д. Швецов) В прямоугольном неравнобедренном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AC, точки H_a, H_c — ортоцентры треугольников ABM, CBM соответственно, прямые AH_c, CH_a пересекаются в точке K. Докажите, что $\angle MBK = 90°$.

   Решение. Так как прямые AH_a и CH_c перпендикулярны BM, четырехугольник AH_cCH_a — трапеция, а K — точка пересечения продолжений ее боковых сторон. Кроме того, так как треугольники ABM и CBM равнобедренные, $H_aA = H_aB$ и $H_cC = H_cB$. Следовательно, $KC/KH_a = CH_c/AH_a = BH_c/BH_a$, т.е. $KB \parallel CH_c \perp BM$ (рис. 10.5).

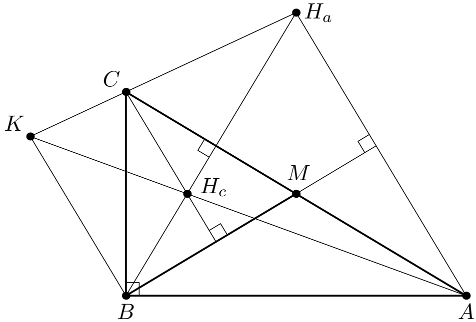

Рис. 10.5

6. (А. Соколов) Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AOH, пересекает серединный перпендикуляр к BC в точке A_1. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

   Решение. Нам понадобится следующий факт.

   Лемма. Если прямая ℓ проходит через ортоцентр треугольника, то прямые, симметричные ℓ относительно его сторон, пересекаются в одной точке.

   Доказательство. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда точки H_a, H_b и H_c, симметричные H относительно BC, CA и AB соответственно, лежат на описанной окружности треугольника. При этом угол, опирающийся, например, на дугу H_aH_b, равен $2\angle C$, т.е. он равен углу между прямыми, симметричными ℓ относительно BC и CA. Значит, эти прямые пересекаются на описанной окружности. Очевидно, третья прямая пересекает окружность в той же точке. Лемма доказана.

   Вернёмся к задаче. Рассмотрим треугольник $A'B'C'$, образованный отражениями точки O относительно сторон треугольника ABC. Его вершины — центры описанных окружностей треугольников HBC, HCA и HAB; значит, его стороны — серединные перпендикуляры к AH, BH и CH, и она параллельны сторонам $\triangle ABC$. Значит, O — ортоцентр треугольника $A'B'C'$ (рис. 10.6).

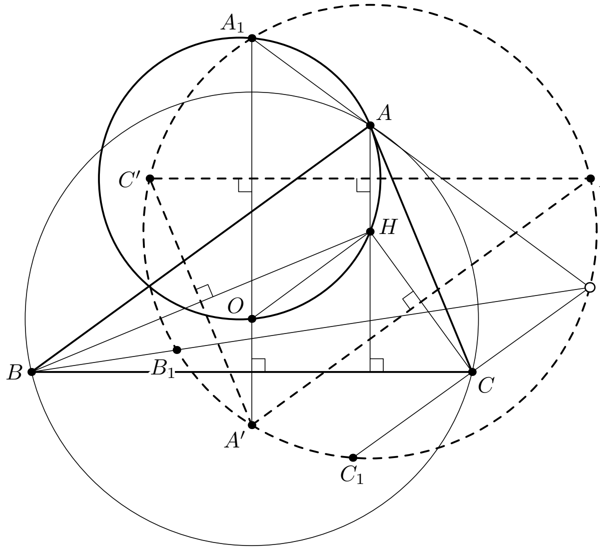

Рис. 10.6

С другой стороны, поскольку стороны AH и A_1O вписанного четырёхугольника $AHOA_1$ параллельны, прямые AA_1 и OH симметричны относительно серединного перпендикуляра к AH, т.е. относительно $B'C'$; аналогичное утверждение выполняется для BB_1 и CC_1. Значит, эти прямые пересекаются в одной точке согласно лемме, применённой к $\triangle A'B'C'$.

7. (И.И.Богданов) Четырёхугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу. Из вершин A, B, C, D опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA, SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости.

Решение. Так как AA_1 и CC_1 — высоты треугольника SAC, точки A, C, A_1 и C_1 лежат на одной окружности, т.е. $SC \cdot SA_1 = SA \cdot SC_1$. Тогда существует инверсия с центром S, переводящая A_1 в C, а C_1 в A. Так как $SB \cdot SD_1 = SD \cdot SB_1$, точки B_1 и D_1 при этой инверсии перейдут в точки B_2 и D_2, лежащие на лучах SD и SB соответственно, причем $B_2D_2 \parallel BD$.

С другой стороны, точки A, C, B_2, D_2 должны лежать в одной плоскости (как образы точек A_1, B_1, C_1, D_1, лежащих на сфере, содержащей S). Но, если прямая B_2D_2 не лежит в плоскости $ABCD$, то она скрещивается с AC. Значит, описанная ситуация возможна лишь при $B_2 = B$ и $D_2 = D$.

А тогда точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат в плоскости, являющейся образом сферы $SABCD$.

8. (М. Артемьев) Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на правильный шестиугольник со стороной 1 и несколько равных прямоугольных треугольников с катетами 1 и $\sqrt{3}$?

   Ответ. Нет, это невозможно.

   Решение. Предположим, что это возможно. Заметим, что площадь каждого треугольника разбиения равна $S = \sqrt{3}/2$, а площадь шестиугольника равна $3S$. Каждая сторона прямоугольника разбивается на отрезки длин 1, 2 и $\sqrt{3}$, то есть эти стороны равны $a + b\sqrt{3}$ и $c + d\sqrt{3}$ при целых неотрицательных a, b, c, d. Значит, площадь прямоугольника равна

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}.$$

   С другой стороны, эта площадь кратна S, что возможно лишь при $ac + 3bd = 0$, откуда $ac = 0$ и $bd = 0$.

   Отсюда следует, что одна сторона прямоугольника (скажем, вертикальная) — целая, а другая (горизонтальная) — целое кратное $\sqrt{3}$. Тогда его площадь кратна $2S$. Поскольку площадь шестиугольника равна $3S$, число треугольников в разбиении нечётно. Покажем, что это невозможно.

   Каждый (непродолжаемый) отрезок разбиения, лежащий внутри прямоугольника покрыт отрезками целых длин и отрезками длины $\sqrt{3}$ с обеих сторон. Поскольку представление его длины в виде $x + y\sqrt{3}$ единственно, к нему примыкает чётное число отрезков длины $\sqrt{3}$. К вертикальным сторонам прямоугольника таких отрезков не прилегает, а горизонтальные стороны из них состоят, так что к горизонтальным сторонам таких отрезков прилегает поровну. Значит, общее число таких отрезков чётно, а в каждом треугольнике ровно по одному такому отрезку. Противоречие.