Одиннадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Т.Казицына) Таня вырезала из бумаги выпуклый многоугольник и несколько раз его согнула так, что получился двухслойный четырехугольник. Мог ли вырезанный многоугольник быть семиугольником?

   Решение. Да, например, возьмем четырехугольник $ABCD$, в котором угол B тупой, а остальные острые. Пусть K — точка на стороне CD такая, что $\angle CBK < 180° - \angle B$, точки B_1, K_1 симметричны B, K относительно AD, а K_2 симметрична K относительно BC. Тогда семиугольник $ABK_2CDK_1B_1$ выпуклый, и, согнув его по прямым BC и AD, получим двухслойный четырехугольник $ABCD$ (рис.1).

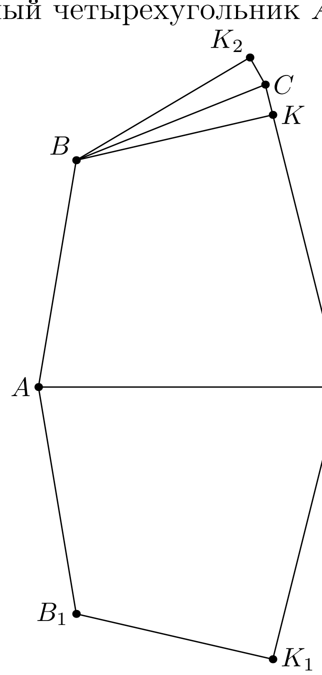

Рис.1

2. (М.Рожкова, Украина) В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Через середину OH параллельно BC проведена прямая, пересекающая стороны AB и AC в точках D и E. Оказалось, что O — центр вписанной окружности треугольника ADE. Найдите углы треугольника ABC.

   Ответ. $\angle A = 36°$, $\angle B = \angle C = 72°$.

   Решение. Из условия следует, что AO — биссектриса угла A, т.е. $AB = AC$. Тогда $ODHE$ — ромб, $\angle ODH = 2\angle ODE = \angle B$, $\angle DOH = \angle DHO = 90° - \frac{\angle B}{2} = \angle BHD$.

   Проведем через H прямую, параллельную AC, и найдем точку K ее пересечения с AB. Так как $\angle HKB = \angle A = \angle HOB$, точки H, O, K, B лежат на одной окружности. Поскольку угол KHB прямой, центр этой окружности лежит на прямой AB и, значит, совпадает с точкой D (рис.2). Следовательно, $\angle HBD = \angle BHD = 90° - \frac{\angle B}{2}$. С другой стороны, этот угол равен $\angle B - \frac{\angle A}{2}$, откуда и следует ответ.

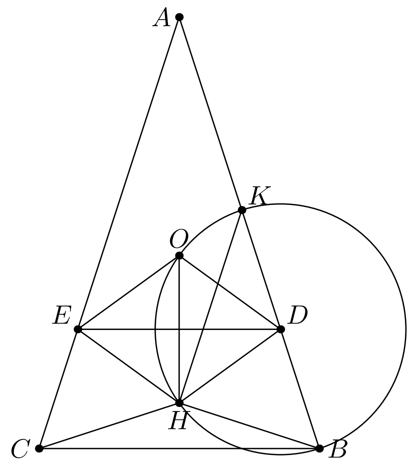

Рис.2

3. (Н.Москвитин) На стороне AD квадрата $ABCD$ во внутреннюю сторону построен тупоугольный равнобедренный треугольник AED. Вокруг него описана окружность и проведен ее диаметр AF, на стороне CD выбрана точка G так, что $CG = DF$. Докажите, что угол BGE меньше половины угла AED.

   Решение. Очевидно, что F лежит на прямой CD. Так как $CG = DF$, то $FG = CD = AB$, т.е. $ABGF$ — параллелограмм, и $\angle BGD = 180° - \angle AFD = \angle AED$. Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что $\angle BGE < \angle EGD$ или, что расстояние от точки E до прямой BG меньше, чем до прямой CD. Но, расстояние от E равно расстоянию до AF, поскольку FE — биссектриса угла DFA, так что достаточно доказать, что E лежит ближе к BG, чем к AF.

   Проведем через E прямую, параллельную AB. Она пересечет AF в центре O окружности AED (рис.3). Следовательно, $EO > AD/2 = AB/2$, что равносильно искомому неравенству.

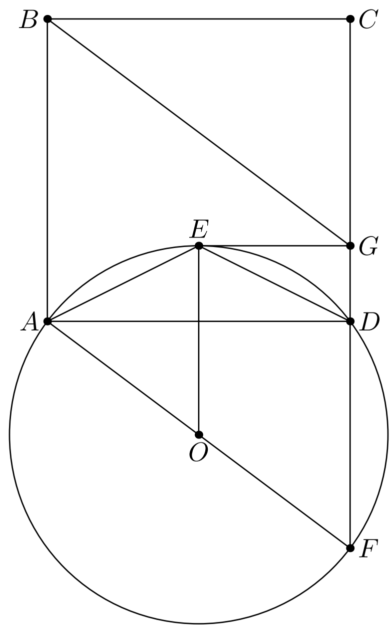

Рис.3

4. (Л.Штейнгарц, Израиль) В параллелограмме $ABCD$ провели трисектрисы углов A и B. Трисектрисы, ближние к стороне AB, пересекаются в точке O. Обозначим пе-

ресечение трисектрисы AO со второй трисектрисой угла B через A_1, а пересечение трисектрисы BO со второй трисектрисой угла A через B_1. Пусть M — середина отрезка A_1B_1 . Проведем прямую MO, которая пересекает сторону AB в точке N. Докажите, что треугольник A_1B_1N — равносторонний.

Решение. Пусть K — точка пересечения дальних трисектрис. Тогда в треугольнике ABK $\angle K = 60°$, а AA_1 и BB_1 — его биссектрисы. Так как $\angle A_1OB_1 = 120°$, четырехугольник A_1KB_1O вписанный и, поскольку KO — биссектриса угла K, то $OA_1 = OB_1$. Следовательно, $\angle MOA_1 = 60° = \angle A_1OB = \angle BON$. Отсюда получаем, что $ON = OA_1$ и $A_1N = A_1B_1 = B_1N$ (рис.4).

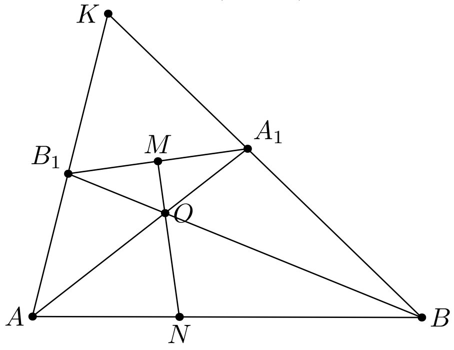

Рис.4

5. (В.Ясинский, Украина) Дан треугольник ABC. Две окружности, проходящие через вершину A, касаются стороны BC в точках B и C соответственно. Пусть D — вторая точка пересечения этих окружностей (A лежит ближе к BC, чем D). Известно, что $BC = 2BD$. Докажите, что $\angle DAB = 2\angle ADB$.

   Решение. По теореме о касательной и секущей прямая AD пересекает отрезок BC в его середине M. Тогда из условия получаем, что $BM = BD$ и $\angle ADB = \angle DMB$. С другой стороны, $\angle ABM = \angle ADB$ как угол между хордой и касательной. По теореме о внешнем угле $\angle DAB = \angle ABM + \angle AMB = 2\angle ADB$ (рис.5).

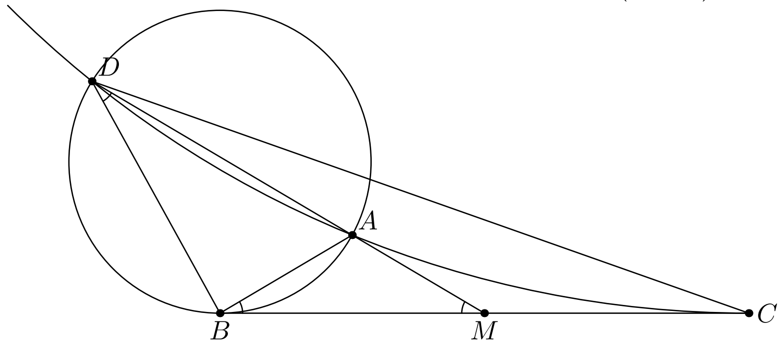

Рис.5

6. (А.Заславский) В остроугольном треугольнике ABC AA', BB' и CC' — высоты. Точки C_a, C_b симметричны C' относительно AA' и BB'. Аналогично определены точки A_b, A_c, B_c, B_a. Докажите, что прямые A_bB_a, B_cC_b и C_aA_c параллельны.

   Первое решение. Докажем сначала следующую лемму.

   На сторонах XZ, YZ треугольника XYZ взяли точки Y', X' такие, что $XY' = XY = X'Y$. Тогда $X'Y' \perp OI$, где O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника.

Для доказательства леммы достаточно убедиться, что $X'O^2 - Y'O^2 = X'I^2 - Y'I^2$. Пусть x, y, z — длины сторон YZ, ZX, XY; X_0 — середина YZ. Тогда $X'O^2 - OY^2 = X'X_0^2 - YX_0^2 = (z - x/2)^2 - (x/2)^2 = z(z - x)$. Аналогично $Y'O^2 - OX^2 = z(z - y)$. Кроме того, $X'I^2 = r^2 + (z-(p-y))^2 = r^2 + (p-x)^2$, $Y'I^2 = r^2 + (p-y)^2$. Следовательно, $X'O^2 - Y'O^2 = X'I^2 - Y'I^2 = z(y - x)$.

Теперь для решения задачи достаточно заметить, что прямые $A'A$, $B'B$, $C'C$ являются биссектрисами треугольника $A'B'C'$. Поэтому, например, точки A_b, B_a лежат на прямых $B'C'$, $A'C'$ соответственно и $B'A_b = A'B_a = A'B'$. По лемме прямая A_bB_a перпендикулярна прямой, соединяющей центры описанной и вписанной окружностей треугольника $A'B'C'$. Прямые B_cC_b и A_cC_a также перпендикулярны этой прямой, следовательно все три прямые параллельны.

Второе решение. Как показано в предыдущем решении, точка B_a лежит на $A'C'$, C_a — на $A'B'$, A_b и A_c — на $B'C'$. Поскольку $A'B_a = A'B'$ и $A'C_a = A'C'$, то $B'B_a \parallel C'C_a$, значит, $B'B_a/C'C_a = A'B'/A'C' = B'A_b/C'A_c$. Следовательно, треугольники $B'A_bB_a$ и A_cC_aC' подобны, $\angle B_aA_bB' = \angle C_aA_cC'$ и $A_bB_a \parallel A_cC_a$. Аналогично доказывается, что B_cC_b также параллельна этим прямым.

7. (Д.Швецов) Высоты AA_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. H_A – точка симметричная H относительно A. H_AC_1 пересекает прямую BC в точке C'; аналогично определяется точка A'. Докажите, что $A'C'||AC$.

Решение. Так как треугольники AHC_1 и CHA_1 подобны, треугольники AH_AC_1 и CH_CA_1 также подобны т.е. $\angle A'C_1B = \angle C'A_1B$. Следовательно, точки A_1, C_1, A', C' лежат на одной окружности и прямые A_1C_1 и $A'C'$ антипараллельны относительно угла B. Поскольку A_1C_1 и AC также антипараллельны, $A'C' \parallel AC$ (рис.7).

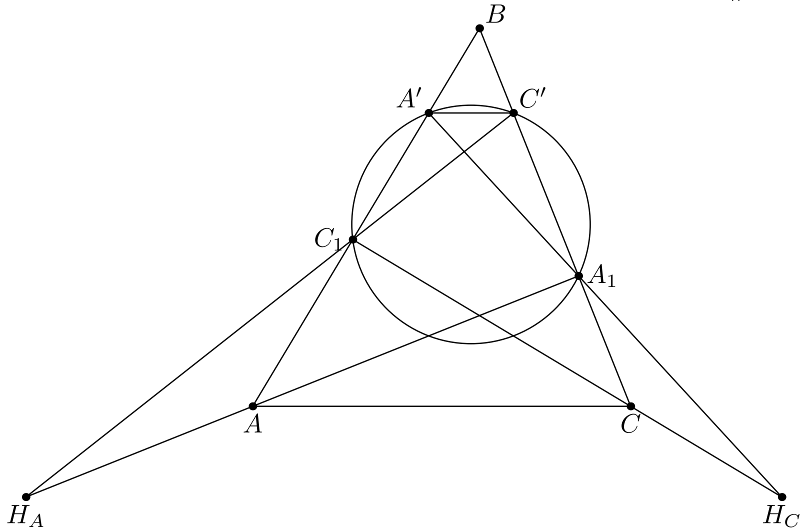

Рис.7

8. (Н.Москвитин) (8–9) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали AC и BD перпендикулярны. Из точки D опущен перпендикуляр DE на сторону AB, а из точки C — перпендикуляр CF на прямую DE. Докажите, что угол DBF равен половине угла FCD.

Решение. Из условия задачи следует, что $\angle EDB = 45° - (90° - \angle A) = \angle A - 45° = \angle BDC$. Значит точка B равноудалена от прямых DE и DC. Поскольку трапеция равнобокая, расстояние от B до DC равно расстоянию от C до AB, которое, в свою очередь, равно расстоянию от B до параллельной AB прямой CF. Следовательно, BF — биссектриса угла CFE и $\angle BFC = 45°$. Пусть перпендикуляр к BF из точки F пересекает BD в точке K. Тогда $\angle CFK = \angle CBK = 45°$, значит, четырехугольник $BFKC$ вписанный и $CK \perp BC$. Так как $CF \parallel AB$, высота CK является биссектрисой угла FCD, а из вписанности четырехугольника $BFKC$ получаем, что $\angle DBF = \angle KCF = \angle FCD/2$ (рис.8).

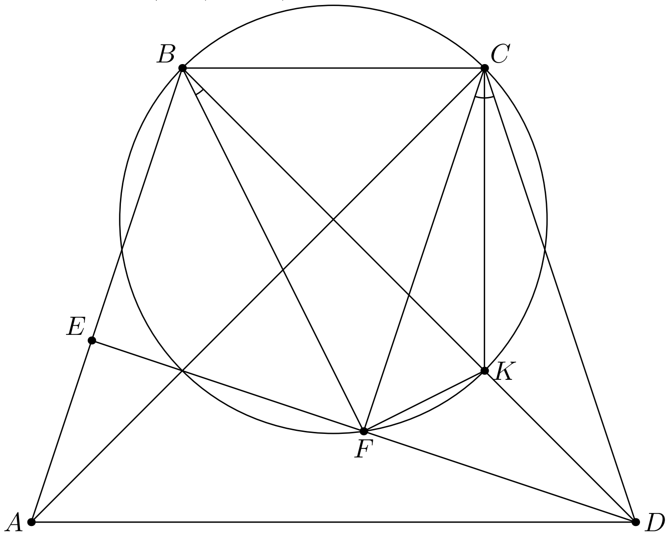

Рис.8

9. (А.Заславский) Дан остроугольный треугольник ABC. Постройте на сторонах BC, CA, AB точки A', B', C' так, чтобы выполнялись следующие условия:
- $A'B' \parallel AB$;
- $C'C$ — биссектриса угла $A'C'B'$;
- $A'C' + B'C' = AB$.

Решение. Пусть L — точка пересечения отрезков CC' и $A'B'$. Тогда $BC'/AC' = A'L/B'L = A'C'/B'C'$ и из равенства $A'C' + B'C' = AB$ получаем, что $BC' = C'A'$, $AC' = C'B'$. Поэтому точки, симметричные C' относительно AC и BC лежат на $A'B'$ и, значит, прямая CC' симметрична высоте треугольника из вершины C относительно биссектрисы из той же вершины, т.е. CC' проходит через центр описанной окружности треугольника (рис.9). Теперь построение очевидно.

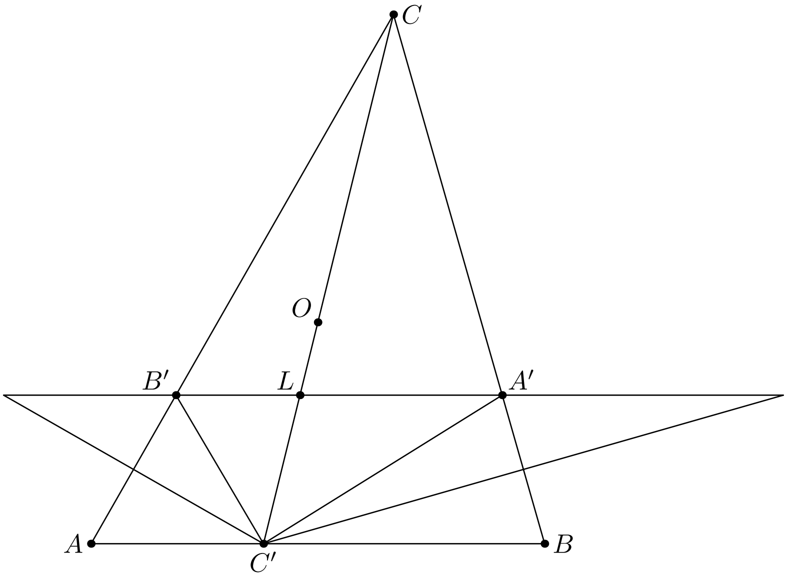

Рис.9

10. (Б.Френкин) Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что в него можно вписать окружность.

    Решение. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке L. Если, например, угол ALB тупой, то он больше любого из углов треугольника BLC и треугольники ALB и BLC не подобны. Следовательно, диагонали четырехугольника перпендикулярны. Если при этом, например, углы ABL и CBL равны, то BL в треугольнике ABC является высотой и биссектрисой, а следовательно и медианой, и $AB = BC$. Тогда DL — высота и медиана в треугольнике ADC, поэтому $AD = DC$. Так как суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то он описанный.

    Если же углы ABL и CBL не равны, то в сумме они составляют прямой угол. Если равны аналогичные углы при другой вершине, то рассуждаем как выше. В противном случае $ABCD$ — прямоугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями и, следовательно, квадрат. Поэтому в него можно вписать окружность.

11. (А.Соколов) Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку BH пересекает стороны BA, BC в точках A_0, C_0 соответственно. Докажите, что периметр треугольника A_0OC_0 (где O — центр описанной окружности $\triangle ABC$) равен AC.

    Решение. Известно, что точки, симметричные H относительно сторон треугольника, лежат на его описанной окружности, т.е. расстояние от них до O равно радиусу R этой окружности. Следовательно, расстояние от H до точек O_a, O_c, симметричных O относительно BC и BA, также равно R. Поскольку и $BO_a = BO_c = R$, точки O_a, O_c лежат на прямой A_0C_0. Кроме того, $BOCO_a$ и $BOAO_c$ — ромбы, поэтому $CO_a \parallel OB \parallel AO_c$, т.е. ACO_aO_c — параллелограмм и $O_aO_c = AC$. Но O_aO_c по построению равно периметру треугольника A_0OC_0 (рис.11).

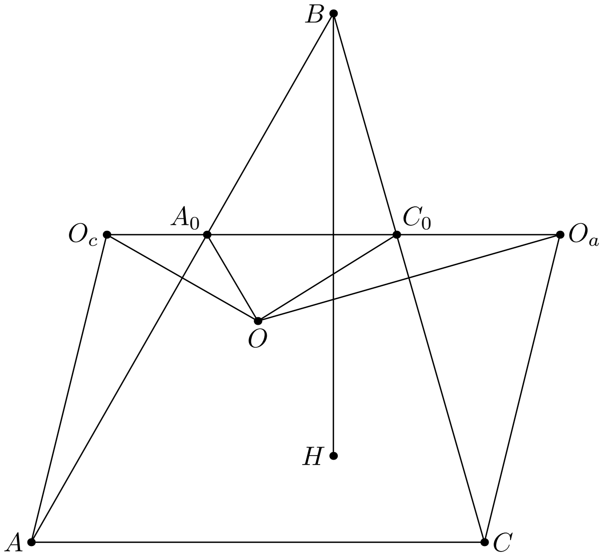

Рис.11

12. (А.Заславский) Сколько (максимум) кругов можно расположить на плоскости так, чтобы любые два из них пересекались, а никакие три — нет?

    Ответ. 4.

    Решение. Рассмотрим какой-нибудь из n кругов. Пусть A_iB_i — его общие хорды с остальными кругами. Так как никакие три круга не пересекаются, для любой из хорд A_iB_i одна из стягиваемых ею дуг не содержит концов остальных хорд. Отрежем от каждого круга сегменты, ограниченные этими дугами, и получим n выпуклых областей, любые две из которых граничат друг с другом. Известно, что таких областей на плоскости может быть не больше четырех. Очевидно, что четыре круга расположить требуемым образом можно.

13. (А.Руденко, Д.Хилько, Украина) В треугольнике ABC проведены высоты AH_1, BH_2 и CH_3. Точка M — середина отрезка H_2H_3. Прямая AM пересекает отрезок H_2H_1 в точке K. Докажите, что точка K принадлежит средней линии треугольника ABC, проведенной параллельно AC.

    Решение. Проведем перпендикуляр из точки H_3 на прямую AC. Пускай основание перпендикуляра — P. Так как треугольник H_3PH_2 прямоугольный, а M — середина гипотенузы, $MP = MH_2$ и $\angle MPH_2 = \angle MH_2A$. Как известно, $\angle ABC = \angle H_1H_2P = \angle H_3H_2A$, значит $MP \parallel KH_2$. Это значит, что $\frac{AM}{AK} = \frac{AP}{AH_2}$. Треугольник AH_2H_3 подобен ABC, поэтому $\frac{AP}{AH_2} = \frac{AH_3}{AB}$, так как соответствующие элементы подобных треугольников подобны. Тогда $\frac{AM}{AK} = \frac{AP}{AH_2} = \frac{AH_3}{AB}$, а значит $H_3M \parallel BK$ (рис.13). Заметим, что $\angle H_3H_2B = 90^\circ - H_3H_2A = 90^\circ - H_1H_2C = \angle BH_2K$. Значит $\angle H_2BK = \angle H_3H_2B = \angle BH_2K$, поэтому треугольник BH_2K равнобедренный. Как известно, средняя линия, проведенная параллельно AC, является серединным перпендикуляром к BH_2. Тогда точка K принадлежит ей.

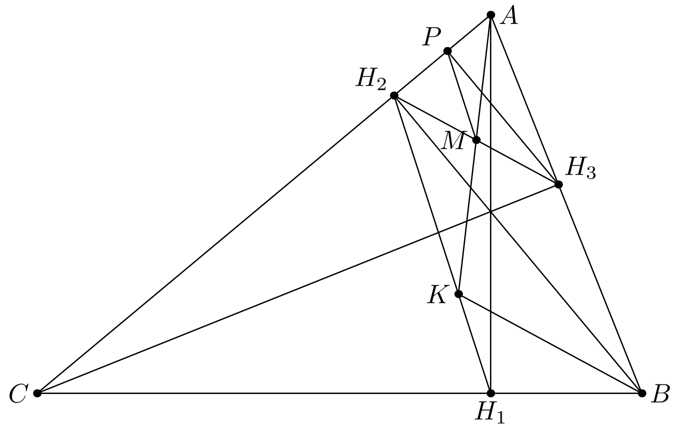

Рис.13

14. (А.Мякишев) Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Точки A_1, A_2 симметричны основаниям внутренней и внешней биссектрис угла A относительно середины стороны BC. На отрезке A_1A_2 как на диаметре построена окружность α. Аналогично определяются окружности β и γ. Докажите, что эти три окружности пересекаются в двух точках.

   Решение. Известно, что окружности, противоположными точками которых являются основания внешней и внутренней биссектрис, перпендикулярны описанной окружности треугольника. Значит, окружности α, β, γ, симметричные им относительно диаметров, также перпендикулярны описанной окружности, т.е. степени центра O описанной окружности относительно всех трех окружностей равны. Кроме того, поскольку середины отрезков между основаниями внешних и внутренних биссектрис лежат на одной прямой, симметричные им центры окружностей по теореме Менелая также лежат на одной прямой. Перпендикуляр из O на эту прямую является общей радикальной осью окружностей, которые, следовательно, имеют две общих точки.

15. (В.Ясинский) Длины сторон треугольника ABC не превышают 1. Докажите, что $p(1-2Rr)$ не превышает 1, где p — полупериметр, R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

   Решение. Так как площадь треугольника со сторонами a, b, c равна $abc/4R = pr$, искомое неравенство можно переписать в виде $a+b+c-abc \leq 2$. Но

   $$a+b+c-abc = a+b+c(1-ab) \leq a+b+1-ab = 1+a+b(1-a) \leq 1+a+1-a = 2.$$

16. (Б.Френкин) (9–11) Выпуклый четырехугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Восстановите четырехугольник по центрам описанных окружностей двух соседних треугольников и центрам вписанных окружностей двух противоположных друг другу треугольников.

   Первое решение. Пусть L — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$; O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника LAB; O' — центр описанной окружности треугольника LAD; I' — центр вписанной окружности треугольника LCD. Тогда OO' — серединный перпендикуляр к LA, а II' — биссектриса угла LAB. Таким образом, мы можем определить направления прямых LA, LB и, значит, построить серединный перпендикуляр к отрезку LB.

Пусть X, Y, Z — середины дуг LA, LB, AB окружности, описанной около треугольника LAB. Тогда I — ортоцентр треугольника XYZ и, поскольку нам известен угол ALB, мы можем найти угол XIY. Обозначим этот угол через φ. Теперь задача сводится к следующей.

Дан угол с вершиной O и точка I. Найти на сторонах угла точки X, Y такие, что $OX = OY$ и $\angle XIY = \varphi$.

Возьмем на сторонах угла произвольные точки X_1, Y_1 такие, что $OX_1 = OY_1$ и найдем на луче OI такую точку I_1, что $\angle X_1I_1Y_1 = \varphi$. Гомотетия с центром O, переводящая I_1 в I, переводит точки X_1, Y_1 в искомые. Дальнейшее построение очевидно.

Второе решение. В обозначениях предыдущего решения нам достаточно найти точку L. Действительно, OO' — серединный перпендикуляр к AL, а II' — биссектриса угла ALB. Найдя точку L и опустив из нее перпендикуляр на OO', получаем прямую AL. Зная II', находим прямую BL. Проведя через L окружность с центром O до пересечения с AL и BL, находим A и B. Проведя через L окружность с центром O' до пересечения с BL, находим D. Проведя окружность с центром I', касательную к AL и BL, а затем проведя касательную к ней из D до пересечения с AL, находим C.

Для нахождения точки L воспользуемся теоремой о трилистнике: точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне треугольника с описанной окружностью равноудалена от центра вписанной окружности и концов стороны. Проведем окружность ω_1 произвольного радиуса с центром O. Пусть она пересекает прямую OO' в точке K. Опустим из K перпендикуляр на II' и отразим ω_1 относительно него, получив окружность ω_2. Пусть прямая OI пересекает ω_2 в точке I_1. Отразив I_1 относительно указанного перпендикуляра, получим точку L' на ω_1. Гомотетия с центром O, переводящая I_1 в I, переводит L' в L.

17. (Ф.Нилов) Дан треугольник ABC, O — центр описанной окружности. Проекции точек D и X на стороны треугольника лежат на прямых l и L, причем $l \parallel XO$. Докажите, что прямая L образует равные углы с диагоналями четырехугольника $ABCD$.

Решение. Из условия следует, что точки D и X лежат на описанной окружности треугольника ABC, а прямые l и L являются их прямыми Симсона. Проведем хорды CC', DD' и XX', параллельные AB. По свойству прямых Симсона прямая l, а значит, и радиус OX перпендикулярны CD', а $L \perp CX'$. Поэтому утверждение задачи равносильно равенству дуг $X'D$ и $X'C'$. Но эти дуги равны соответственно дугам $D'X$ и CX, равенство которых очевидно (рис.17).

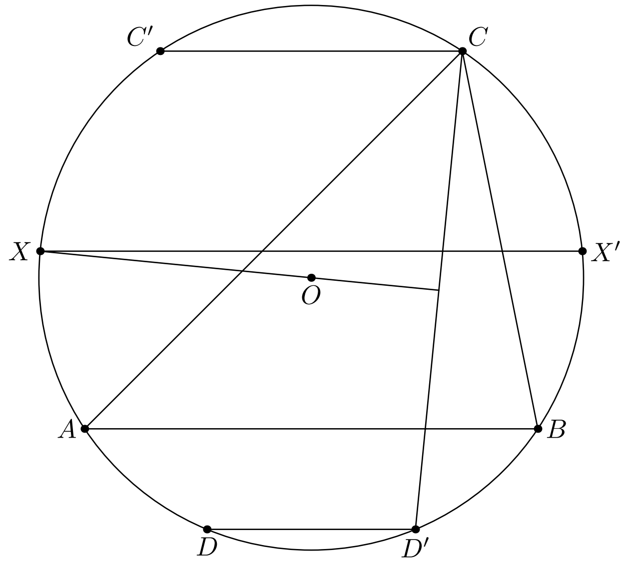

Рис.17

18. (В.Ясинский) В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. Точки K, L, M, N — точки пересечения пар прямых AB и CD, AC и BD, AF и DE, AE и DF. Докажите, что если три из этих точек лежат на одной прямой, то и четвертая точка лежит на этой прямой.

    Решение. Спроецируем точку L в центр окружности. Тогда $ABCD$ будет прямоугольником, а прямая KL его осью симметрии. Если одна из точек M, N лежит на этой оси, то точки E и F симметричны относительно нее, а значит, и вторая точка лежит на KL.

19. (Ф.Ивлев) Пусть L — основание внутренней биссектрисы угла A треугольника ABC, а K – внешней. Пусть P — точка пересечения касательных к описанной окружности в точках B и C. Перпендикуляр в точке L к BC пересекает AP в точке Q. Докажите, что Q лежит на средней линии треугольника LKP.

    Решение. Так как BC — поляра точки P относительно описанной окружности ω треугольника ABC, P лежит на поляре точки L. Так как точки B, C, L, K образуют гармоническую четверку, K тоже лежит на поляре L. Следовательно, прямая KP является полярой L относительно ω, а средняя линия треугольника KLP — радикальной осью ω и точки L. Докажем, что Q тоже лежит на этой оси.

    Пусть M — середина отрезка KL. Так как M — центр окружности AKL, перпендикулярной ω, M лежит на поляре точки A. Но M также лежит на поляре точки P, следовательно прямая AP является полярой M относительно ω и общей хордой ω и окружности AKL. Но прямая LQ является радикальной осью окружности AKL и точки L, значит, Q — точка пересечения трех радикальных осей.

20. (А.Заславский) Даны окружность и лежащий внутри нее эллипс с фокусом C. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников ABC, где AB — хорда окружности, касающаяся эллипса.

    Решение. Пусть CH — высота треугольника ABC. Тогда H лежит на окружности, диаметром которой является большая ось эллипса. Обозначим центр и радиус данной окружности через O и R, а центр окружности ABC через O'. Применяя теорему косинусов к треугольникам $AO'O$ и $AO'C$, получаем $R^2 = O'A^2 + O'O^2 - 2O'A \cdot O'O\cos\angle AO'O$, $OC^2 = O'C^2 + O'O^2 - 2O'C \cdot O'O\cos\angle CO'O$. Поскольку $O'O \parallel CH$ и $O'A = O'C$, то, вычитая из первого равенства второе, получаем $R^2 - OC^2 = 2O'O\cdot CH$.

Пусть H' — образ точки H при переносе на вектор CO. Тогда точки O, H' и O' лежат на одной прямой и $OH'\cdot OO' = (R^2 - OC^2)/2$ не зависит от выбора хорды AB. Следовательно, точки O' и H' инверсны относительно окружности, концентричной данной. Поскольку геометрическим местом точек H' является окружность, искомое ГМТ также будет окружностью.

21. (А.Якубов) Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O; M_1 и M_2 — середины отрезков AB и CD соответственно; Ω – окружность, описанная около треугольника OM_1M_2; X_1 и X_2 – точки пересечения ω и Ω, а Y_1 и Y_2 – вторые точки пересечения окружностей, описанных около треугольников CDM_1 и ABM_2 соответственно, с Ω. Докажите, что $X_1X_2 || Y_1Y_2$.

    Решение. Пусть K — точка пересечения прямых AB и CD. Так как углы OM_1K и OM_2K прямые, OK — диаметр окружности Ω. Поскольку дуги OX_1 и OX_2 этой окружности равны, для решения задачи достаточно доказать, что дуги KY_1 и KY_2 тоже равны, т.е., что $\angle KM_1Y_1 = \angle KM_2Y_2$.

    Пусть N_1, N_2 — вторые точки пересечения окружностей CDM_1 и ABM_2 с AB и CD соответственно. Тогда $KM_1 \cdot KN_1 = KC \cdot KD = KA \cdot KB$, следовательно, $N_1K \cdot N_1M_1 = N_1A \cdot N_1B$. Таким образом степени точки N_1 относительно окружностей Ω и ABM_2 равны, т.е. N_1 лежит на прямой M_2Y_2. Аналогично N_2 лежит на прямой M_1Y_1 (рис.21). Но четырехугольник $M_1M_2N_2N_1$, очевидно, вписанный, откуда и следует требуемое равенство.

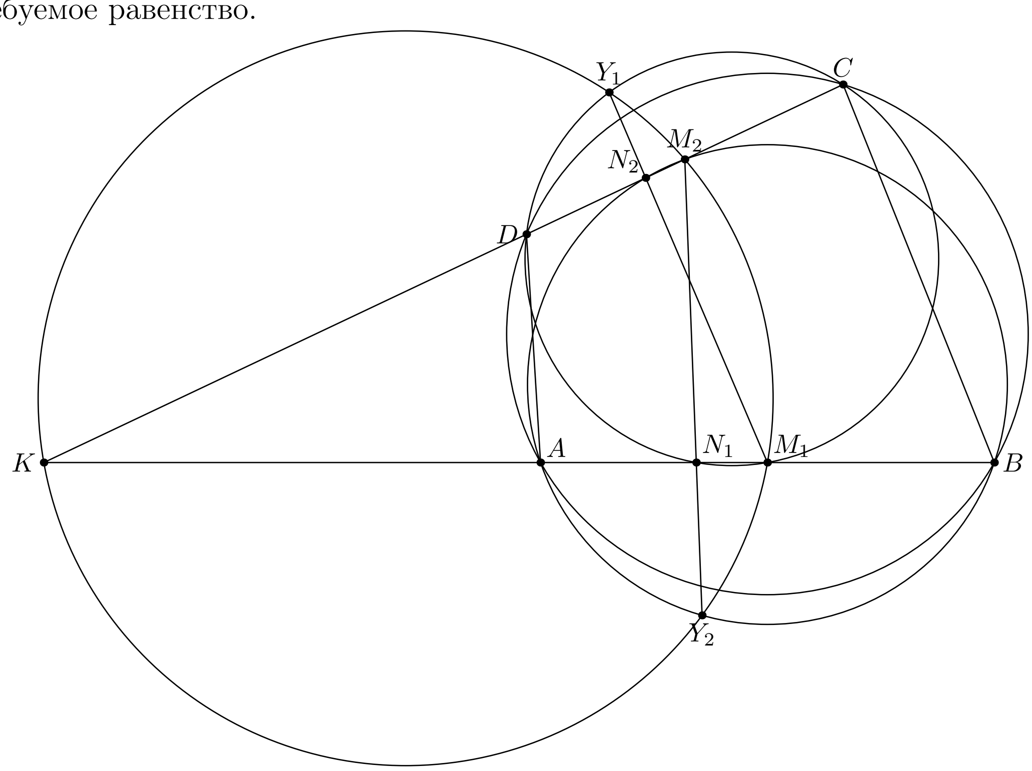

Рис.21

22. (А. Белов-Канель) Грани икосаэдра окрасили в 5 цветов так, что две грани, окра-

шенные в один цвет, не имеют общих точек, даже вершин. Докажите, что для любой точки внутри икосаэдра сумма расстояний от нее до красных граней равна сумме расстояний до синих граней.

Решение. Докажем, что с точностью до движений и перестановок цветов существует единственная раскраска, удовлетворяющая условию. Назовем расстоянием между двумя гранями минимальное число переходов через ребро, которое нужно сделать, чтобы пройти из одной грани в другую. Тогда расстояние от каждой грани до противоположной равно 5. Кроме того, по 3 грани находятся от данной на расстоянии 1 и 4, и по 6 граней на расстоянии 2 и 3.

Рассмотрим одну из красных граней. По условию грани, находящиеся от нее на расстоянии 1 или 2, красными быть не могут. Если раскрасить красным грань, противоположную рассматриваемой, то ни одна из остальных граней не может быть красной. Если красной будет одна из граней на расстоянии 4 от исходной, то остаются только две грани, не имеющие общих вершин с двумя красными гранями. Причем эти две грани — соседние, так что красной из них может быть лишь одна. Наконец, из шести граней, находящихся от выбранной на расстоянии 3, красными могут быть не более трех. Таким образом, красных граней не может быть больше четырех. Поскольку это верно и для остальных цветов, то в каждый цвет раскрашено ровно четыре грани. При этом плоскости одноцветных граней при продолжении образуют правильный тетраэдр. Но для любой точки внутри тетраэдра сумма расстояний от нее до его граней равна высоте тетраэдра. Отсюда, очевидно, следует утверждение задачи.

23. (М.Ягудин) Дан тетраэдр $ABCD$. В грани ABC и ABD вписаны окружности с центрами O_1, O_2, касающиеся ребра AB в точках T_1, T_2. Плоскость π_{AB} проходит через середину отрезка T_1T_2 и перпендикулярна O_1O_2. Аналогично определяются плоскости π_{AC}, π_{BC}, π_{AD}, π_{BD}, π_{CD}. Докажите, что все эти шесть плоскостей проходят через одну точку.

    Решение. Рассмотрим четыре сферы, для которых данные окружности являются большими кругами. Тогда, например, плоскость π_{AB} будет радикальной плоскостью двух сфер, касающихся ребра AB, следовательно, она проходит через радикальный центр всех сфер. Остальные плоскости также проходят через эту точку.

24. (Н.Белухов) В тетраэдр $ABCD$ вписана сфера с центром O, касающаяся его граней в точках A_1, B_1, C_1 и D_1.

    а) Пусть P_a — такая точка, что точки, симметричные ей относительно прямых OB, OC и OD, лежат в плоскости BCD. Точки P_b, P_c и P_d определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1P_a, B_1P_b, C_1P_c и D_1P_d пересекаются в некоторой точке P.

    б) Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$; A_2 — точка пересечения прямой A_1I с плоскостью $B_1C_1D_1$; B_2, C_2, D_2 определены аналогично. Докажите, что P лежит внутри тетраэдра $A_2B_2C_2D_2$.

    Решение. а) Пусть B_a — второй конец диаметра A_1B_a описанной около $\triangle A_1C_1D_1$ окружности с центром O_b и радиусом R_B. Точки C_a, D_a, O_a и т.д. определим аналогично. Обозначим вписанную сферу $ABCD$ через ω, а ее радиус через r. Наконец обозначим через $d_a(X)$ расстояние от точки X до плоскости $(B_1C_1D_1)$, аналогично определим $d_b(X)$ и т.д.

Очевидно, B_a симметрична A_1 относительно BO. Поэтому, так как плоскость (BCD) касается ω, то и P_aB_a касается ω. Пусть Q — проекция P_a на плоскость $(A_1C_1D_1)$. Тогда $\angle P_aB_aO = 90 \Rightarrow \triangle P_aQB_a \sim \triangle B_aO_aO \Rightarrow d_b(P_a) : R_B = P_aB_a : r$. Аналогично $d_c(P_a) : R_C = P_aC_a : r$ и $d_d(P_a) : R_D = P_aD_a : r$. Поскольку $P_aB_a = P_aC_a = P_aD_a$ (как касательные к сфере), получаем, что расстояния от P_a до граней тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ относятся, как $d_b(P_a) : d_c(P_a) : d_d(P_a) = R_B : R_C : R_D$. Аналогично расстояния от P_b до соответствующих граней относятся, как $R_A : R_C : R_D$, и такие же пропорции верны для P_c и P_d.

Но геометрическим местом точек с фиксированным отношением расстояний до трех данных плоскостей является прямая, проходящая через общую точку этих плоскостей, а геометрическим местом точек с данным отношением расстояний до двух плоскостей — плоскость, проходящая через линию их пересечения. Следовательно, прямые A_1P_a и B_1P_b лежат в одной плоскости и пересекаются в некоторой точке P. Через эту же точку проходят прямые C_1P_c и D_1P_d.

б) Заметим, что внутренность тетраэдра $A_2B_2C_2D_2$ является ГМТ X, для которых верны неравенства $d_a(X)+d_b(X)+d_c(X) \geq 2d_d(X)$, $d_b(X)+d_c(X)+d_d(X) \geq 2d_a(X)$ и т.д. В этом легко убедиться, используя барицентрические координаты относительно тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$. Действительно, если α, β, γ и δ — координаты некоторой точки X, а d_A и т.д. — расстояния от A_2 до трех соответствующих граней $A_1B_1C_1D_1$, то $d_a(X) = \beta d_B+\gamma d_C+\delta d_D$ и т.д, значит $3\alpha d_A = d_b(X)+d_c(X)+d_d(X)-2d_a(X)$ и т.д. Поэтому неравенства выполнены тогда и только тогда, когда α, β, γ и δ положительны, т.е. X лежит внутри $A_2B_2C_2D_2$.

Таким образом, осталось показать, что $R_A + R_B + R_C > 2R_D$.

Заметим, что все грани $A_1B_1C_1D_1$ — остроугольные треугольники, а точки O_a, O_b лежат внутри них. Очевидно, $2R_A + 2R_B + 2R_C \geq B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1$ (диаметры больше хорд). Пусть K, L и M — середины сторон $\triangle A_1B_1C_1$. Точка O_d лежит внутри четырехугольника, A_1LKB_1 (так как она лежит внутри $\triangle KLM$), значит $A1L+LK+KB_1 > A_1O_d+O_dB_1$. Но $A_1L+LK+KB_1 = \frac{1}{2}B_1C_1+\frac{1}{2}C_1A_1+\frac{1}{2}A_1B_1$, откуда и вытекает нужное неравенство.