Двенадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (А.Тригуб, Украина, 8) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такая, что $AB = BD$. Пусть M — середина стороны DC. Докажите, что $\angle MBC = \angle BCA$.

   Решение. Продлим BM до пересечения с прямой AD в точке K. Из условия следует, что $BCKD$ — параллелограмм, следовательно, $CK = BD = AB$. Тогда в равнобедренной трапеции $ABCK$ $\angle BCA = \angle CBK = \angle MBC$ (рис.1).

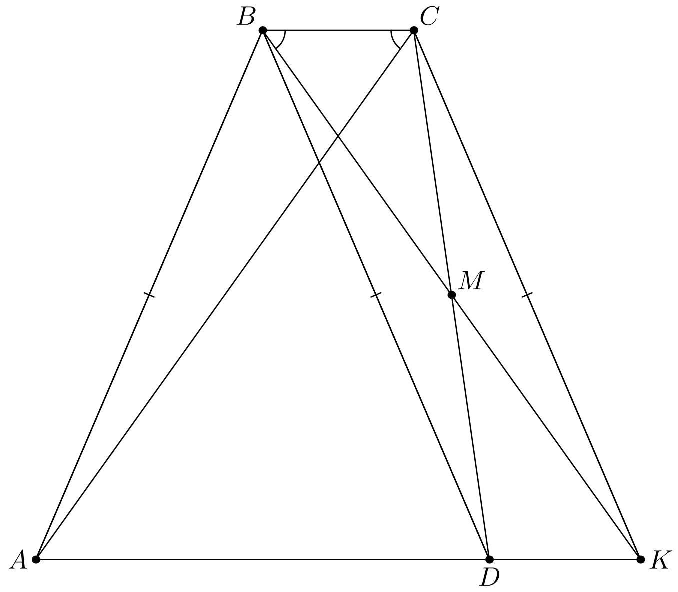

Рис.1

2. (Л.Емельянов, 8) На клетчатой бумаге отметьте три узла так, чтобы в образованном ими треугольнике сумма двух меньших медиан равнялась полупериметру.

   Решение. Отметим точки A, B, C, образующие прямоугольный треугольник с катетами $AC = 6$, $BC = 4$. Его медиана из вершины C равна половине гипотенузы AB, а медиана из вершины B по теореме Пифагора равна $\sqrt{BC^2 + (AC/2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 = (AC + BC)/2$, т.е. треугольник ABC — искомый.

3. (Е.Диомидов, Украина, 8) В остроугольном треугольнике ABC AH_1, BH_2 — высоты, D — проекция H_1 на AC, E — проекция D на AB, F — точка пересечения ED и AH_1. Докажите, что $H_2F \parallel BC$.

   Решение. Обозначив точку пересечения высот через H и применив несколько раз теорему Фалеса, получаем (рис.3)

$$\frac{AF}{AH_1} = \frac{AF}{AH} \cdot \frac{AH}{AH_1} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AH_2}{AD} = \frac{AH_2}{AC}.$$

Отсюда, также по теореме Фалеса, получаем утверждение задачи.

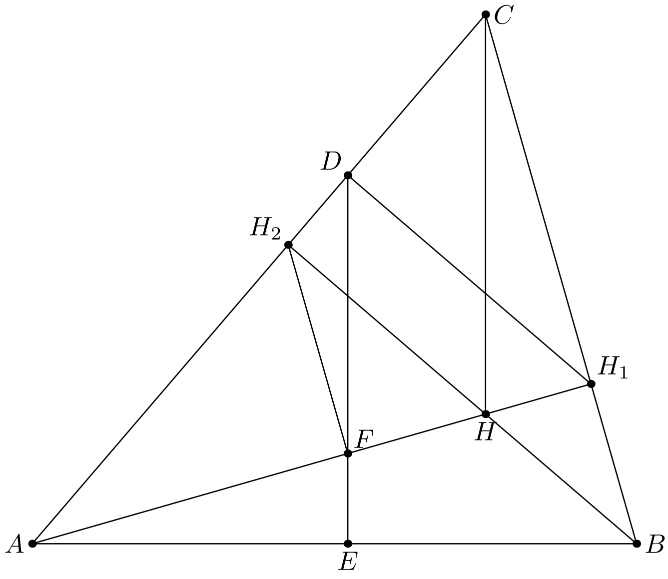

Рис.3

4. (А.Тригуб, Украина, 8) В четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle D = 90^\circ$ и $AC = BC + DC$. Точка P на луче BD такова, что $BP = AD$. Докажите, что прямая CP параллельна биссектрисе угла ABD.

   Решение. Из условия следует, что четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AC. Пусть K — такая точка на отрезке AC, что $AK{=}BC$ (рис.4). Тогда $CK = CD$, т.е. $\angle CKD = \angle CDK$. Кроме того, треугольники BCP и AKD равны, поскольку $AK = BC$, $AC = BP$ и $\angle KAD = \angle CAD = \angle CBD = \angle CBP$. Следовательно, $\angle BCP = \angle AKP = 180^\circ - \angle CKD = 90^\circ + \frac{\angle ACD}{2} = 90^\circ + \frac{\angle ABD}{2}$. С другой стороны, $\angle CBP = 90^\circ - \angle ABD$, поэтому $\angle CPB = 180^\circ - \angle BCP - \angle CBP = \frac{\angle ABD}{2}$, что равносильно утверждению задачи.

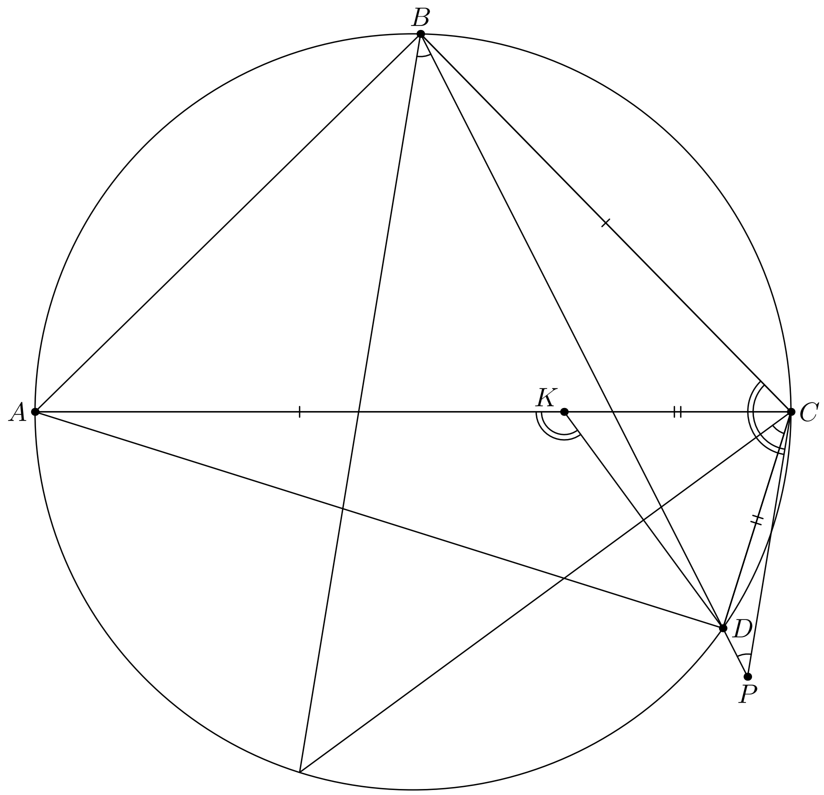

Рис.4

5. (М.Волчкевич, 8) В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, M и K — середины BC и AD. Докажите, что угол между MK и AC равен полусумме углов BAC и DCA.

Решение. Построим параллелограммы $ABMX$ и $DCMY$ (рис.5). Так как $AX = BM = MC = DY$ и $AX \parallel BC \parallel DY$, то треугольники AXK и DYK равны. Значит, $XK = KY$ и $\angle AKX = \angle DKY$, т.е. K — середина отрезка XY. Кроме того, $MX = AB = CD = MY$, следовательно, MK — биссектриса угла XMY, что равносильно утверждению задачи.

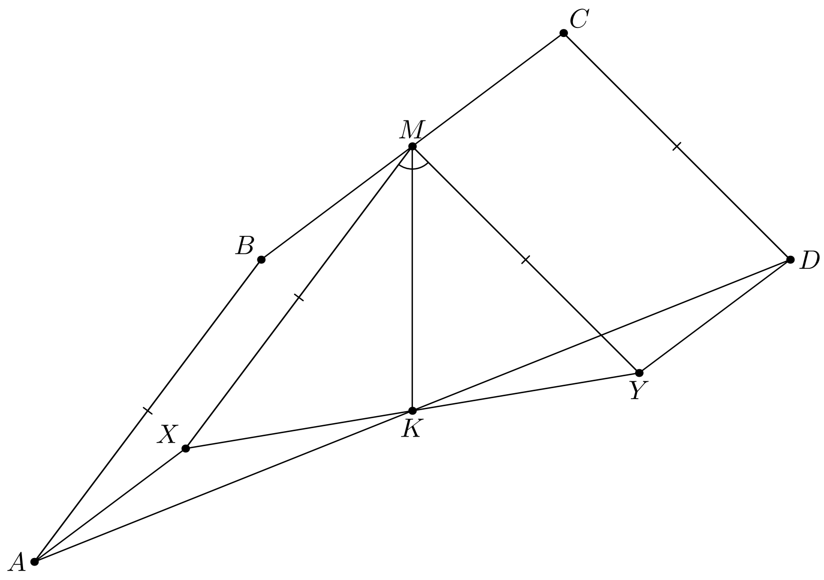

Рис.5

6. (М.Волчкевич, 8) Из середины M стороны AC треугольника ABC опущены перпендикуляры MD и ME на стороны AB и BC соответственно. Около треугольников ABE и BCD описаны окружности. Докажите, что расстояние между центрами этих окружностей равно $AC/4$.

   Решение. Отрезок между центрами окружностей является диагональю параллелограмма, образованного серединными перпендикулярами к отрезкам AB, BD, BE и BC. Поэтому проекции этого отрезка на прямые AB и BC равны соответственно $AD/2$ и $CE/2$, т.е. половинам проекций отрезка $AM = MC$. Следовательно, и сам этот отрезок равен $AM/2 = AC/4$.

   Примечание. Из решения следует также, что отрезок между центрами параллелен AC.

7. (Б.Френкин, 8–9) В некотором выпуклом n-угольнике ($n > 3$) все расстояния между верши- нами различны.

   а) Назовем вершину неинтересной, если самая близкая к ней вершина — соседняя с ней. Каково наименьшее возможное количество неинтересных вершин (при данном n)?

   б) Назовем вершину необычной, если самая дальняя от нее вершина — соседняя с ней. Каково наибольшее возможное количество необычных вершин (при данном n)?

   Решение. а) **Ответ**. 2.

   Пример. Возьмем отрезок AB и близкую к нему выпуклую ломаную ℓ с теми же концами и со звеньями одинаковой длины. Ломаная ℓ и симметричная ей относительно AB образуют выпуклый многоугольник, в котором неинтересными вершинами будут только A и B. Таким образом можно получить многоугольник с любым четным числом вершин. Теперь заменим ℓ (лишь с одной стороны от AB) на аналогичную ломаную, у которой на одно звено больше. Так получается многоугольник с любым нечетным числом вершин, превосходящим 3, в котором неинтересными также будут только A и B. В обоих случаях малым шевелением вершин можно добиться, чтобы все расстояния между ними стали различными.

   Оценка. Пусть A — интересная вершина выпуклого n-угольника, B — ближайшая к ней вершина. Отрезок AB разрезает многоугольник на "правую" и "левую" части. В правой части есть некоторая вершина C, отличная от A и B. Пусть она интересная, и пусть D — ближайшая к ней вершина. Если D находится в левой части многоугольника, то в выпуклом четырехугольнике $ACBD$ имеем $AB + CD < AD + CB$, т.е. сумма диагоналей меньше суммы двух противоположных сторон, что невозможно. Значит, D на границе или внутри правой части. Вместо вершин A, B можно рассмотреть C, D, и тогда в правой части станет меньше вершин. Можно повторять это рассуждение, и так как процесс не может продолжаться бесконечно, то мы найдем в правой части неинтересную вершину. Аналогично есть неинтересная вершина в левой части, поэтому всего их не меньше двух.

   б) **Ответ**. 3.

Пример. Возьмем треугольник ABC, в котором $AB > BC > AC$, и немного "поломаем" сторону AC таким образом, чтобы получился выпуклый n-угольник. Тогда необычны вершины A, B, C и только они.

Оценка. Пусть X — необычная вершина, Y — самая дальняя от нее вершина, Z — другая соседняя с Y вершина. Тогда $XZ < XY$, поэтому угол XYZ — не наибольший в треугольнике XYZ и, следовательно, острый.

Предположим, что необычных вершин больше трех. В выпуклом многоугольнике не больше трех острых углов. Поэтому для каких-то двух необычных вершин A и C одна и та же вершина B является самой дальней (и соседней). Какая-то вершина D, отличная от A, B, C, — необычная, а соседняя с ней вершина E — самая дальняя от нее. Можно считать без ограничения общности, что вершины A, B, E, D образуют выпуклый многоугольник (в таком порядке). В нем $AB > AE, DE > BD$, т.е. сумма диагоналей меньше, чем сумма противоположных сторон, что невозможно.

8. (Б.Френкин, 8–9) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность, причем $\angle B + \angle E = \angle C + \angle D$. Докажите, что $\angle CAD < \pi/3 < \angle A$.

   Решение. Из условия следует, что $\smile AEDC + \smile ABCD = \smile BAED + \smile CBAE$, т.е. $\smile BAE = 2 \smile CD$. Поскольку сумма этих двух дуг меньше 2π, то $\smile CD < 2\pi/3$ и $\angle CAD > \pi/3$. С другой стороны, так как $\smile BAE < 4\pi/3$, то $\smile BCDE > 2\pi/3$ и $\angle A > \pi/3$.

9. (М. Панов, 8–9) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CH. В треугольники ACH и BCH вписали окружности; O_1 и O_2 — их центры; P_1 и P_2 — их точки касания с AC и BC. Докажите, что прямые O_1P_1 и O_2P_2 пересекаются на AB.

   Решение. Пусть O_1P_1 и O_2P_2 пересекают AB в точках K_1 и K_2. Тогда по теореме Фалеса $AK_1/K_1B = AP_1/P_1C$, $AK_2/K_2B = CP_2P_2B$. Но эти отношения равны в силу подобия треугольников AHC и CHB.

   Примечание. Из решения следует также, что точка пересечения является точкой касания вписанной в треугольник ABC окружности с гипотенузой (рис.9).

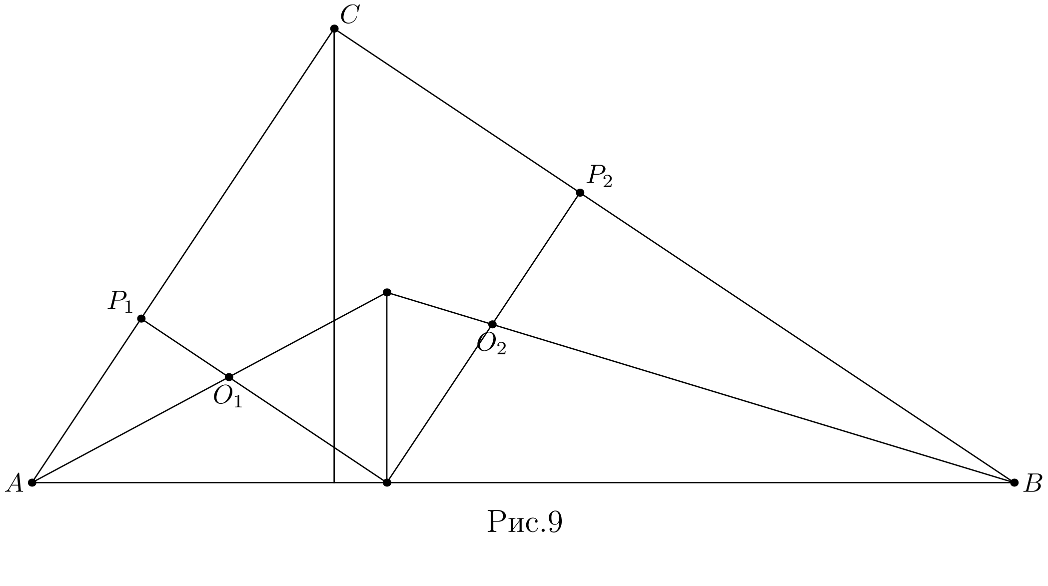

Рис.9

10. (Д.Швецов, 8–9) По стороне AB треугольника ABC движется точка X, а по описанной около треугольника окружности — точка Y так, что прямая XY проходит через середину дуги AB. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников IXY, где I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение. Пусть U — середина дуги AB. Так как $\angle AYU = \angle ABU = \angle UAB$, то треугольники AUX и YUA подобны, т.е. $UX \cdot UY = UA^2$. По теореме о трезубце $UA = UI$, следовательно, UI — касательная к окружности IXY (рис.10). Поэтому центр окружности лежит на прямой, проходящей через I перпендикулярно CI. При этом окружность IXY не может лежать внутри окружности ABC, поэтому искомое ГМТ состоит из двух лучей. Началами этих лучей будут центры двух окружностей, касающихся изнутри окружности ABC и прямой AB, т.е. точки пересечения указанной прямой с биссектрисами углов между прямыми AB и CU.

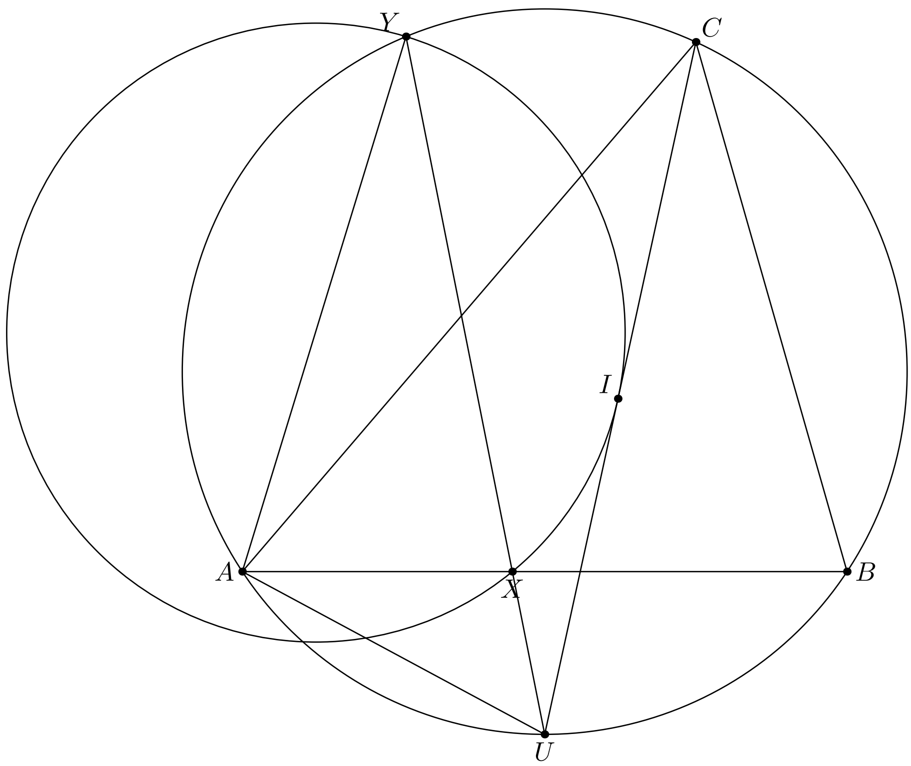

Рис.10

11. (А.Блинков, 8–10) Восстановите треугольник ABC по вершине B, центру тяжести и точке пересечения симедианы из B с описанной окружностью.

Решение. Пусть K, L — точки пересечения медианы и симедианы из B с описанной окружностью. Так как $\angle ABK = \angle CBL$, точки K и L равноудалены от середины M стороны AC (рис.11). Отсюда получаем следующее построение.

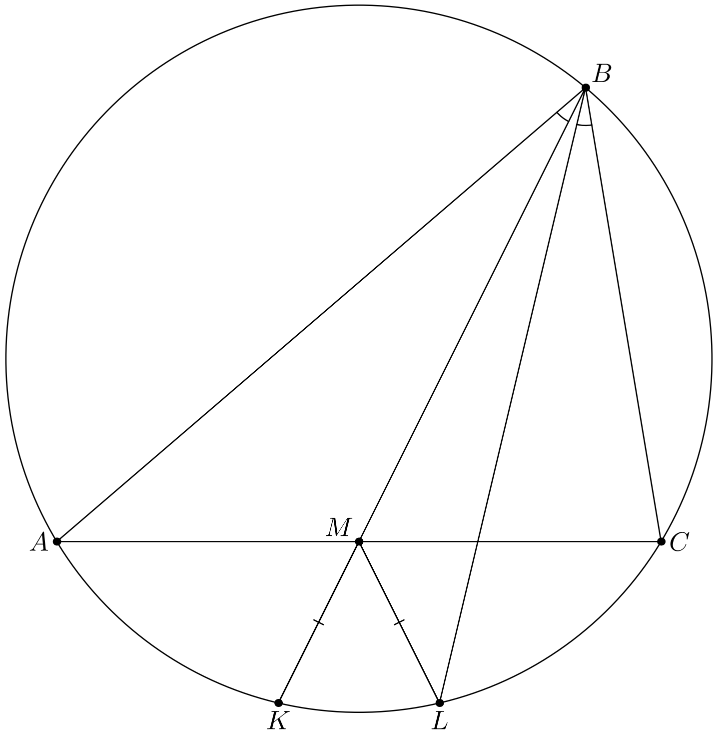

Рис.11

Продолжим отрезок от B до центра тяжести на половину его длины, построив тем самым точку M. Проведем окружность с центром M через точку L и найдем точку K ее пересечения с BM, лежащую вне луча MB. Построим окружность BKL и найдем точки A, C ее пересечения с прямой, проходящей через M параллельно KL. Треугольник ABC искомый.

12. (С.Новиков, 9–10) Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Пусть BB_1 — его симедиана. Луч BB_1 вторично пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке L. Пусть H_A, H_B, H_C — основания высот треугольника ABC. Луч BH_B вторично пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке T. Докажите, что H_A, H_C, T, L лежат на одной окружности.

    Первое решение. Так как точки A, C, H_A, H_C лежат на одной окружности, достаточно доказать, что прямые AC, H_AH_C и TL пересекаются в одной точке. Проецируя вершины гармонического четырехугольника $ABCL$ из точки T на прямую AC, получаем, что точка пересечения TL с AC образует гармоническую четверку с точками A, C, H_B. Прямая H_AH_C пересекает AC в этой же точке.

    Второе решение. Пусть M — середина AC. Обозначим описанные окружности треугольников ABC, AHC, BH_AH_C и четырехугольника AH_CH_AC соответственно ω, ω_1, ω_2, ω_3. По свойству ортоцентра точки H и T симметричны относительно прямой AC. Следовательно, окружности ω_1 и ω тоже симметричны. Пусть окружности ω_2 и ω повторно пересекаются в точке P, а ω_2 и ω_1 — в точке N.

    Известно (см., например, статью Ю.Блинкова "Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и еще одна точка" , Квант, №1, 2014), что точки M, H и P лежат на одной прямой, а $\angle BPH = 90°$.

Пусть прямые BP и AC пересекаются в точке S. Заметим, что H — ортоцентр треугольника BMS. Следовательно, $SH \perp BM$. Поскольку $SH \perp BN$ (т.к. $\angle BNH = 90°$), то точка N лежит на медиане BM.

Пусть прямая BM пересекает окружность ω в точке D, точки N и N' симметричны относительно AC. Поскольку M — середина AC и дуги ANC и $AN'C$ симметричны, то дуги AD и CN' окружности ω равны. Прямая BD содержит медиану из вершины B. Следовательно, BN' содержит симедиану треугольника ABC, т.е. точки N' и L совпадают.

Прямые NH и LT симметричны относительно AC, поэтому они пересекаются в точке S. Поскольку S — радикальный центр окружностей $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, то S лежит на H_CH_A (рис.12). Степени точки S относительно ω и ω_2 равны, т.е. $SH_A \cdot SH_C = ST \cdot SL$. Следовательно, точки H_A, H_C, T, L лежат на одной окружности.

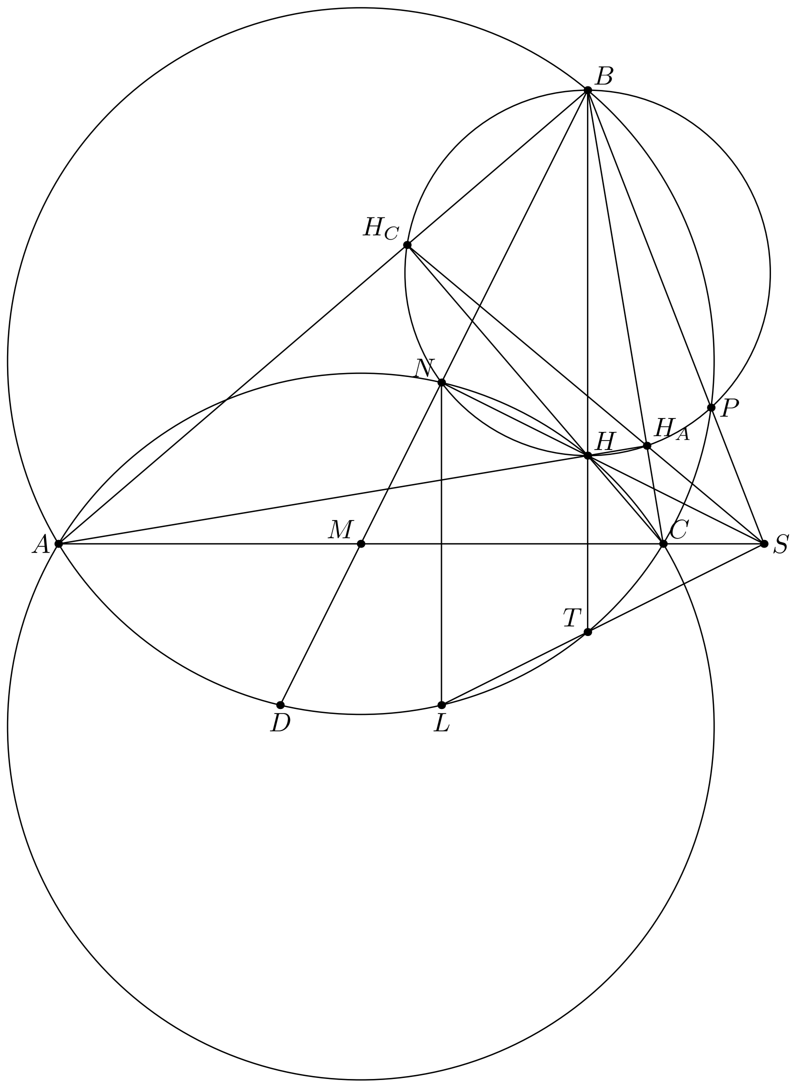

Рис.12

13. (Р.Крутовский, И.Фролов, 9–10) Дан треугольник ABC и прямая ℓ, пересекающая BC, AC, AB в точках L_a, L_b, L_c. Перпендикуляр из L_a к BC пересекает AB и AC

в точках A_B и A_C соответственно. Точка O_a — центр окружности, описанной около треугольника AA_bA_c. Аналогично определим O_b и O_c. Докажите, что O_a, O_b и O_c лежат на одной прямой.

Решение. Пусть Z — произвольная точка на прямой AB, X, Y — точки пересечения перпендикуляра из Z к AB с BC и CA соответственно, Z' — центр описанной окружности треугольника CXY. Тогда $\angle Z'CA = \pi/2 - \angle CXY = \angle B$, т.е. $Z'C$ касается описанной окружности треугольника ABC. При этом, если Z равномерно движется по AB, то Z' также движется равномерно, а когда Z совпадает с A или B, то Z' лежит на касательной в той же точке к описанной окружности. Таким образом, если $A'B'C'$ — треугольник, образованный касательными, то Z' делит отрезок $A'B'$ в таком же отношении, в каком Z делит AB. Применив это утверждение к точкам O_a, O_b, O_c и воспользовавшись теоремой Менелая, получаем утверждение задачи.

14. (А.Мякишев) Дан треугольник ABC. Рассмотрим три окружности, первая из которых касается описанной в вершине A, а вписанной внешним образом в какой-то точке A_1. Аналогично определяются точки B_1 и C_1.

    а) (9–10) Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

    б) (10–11) Пусть A_2 — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Докажите, что прямые AA_1 и AA_2 симметричны относительно биссектрисы угла A.

    Решение. а) Обозначим первую из указанных окружностей через α. Так как точка A является центром положительной гомотетии α и описанной окружности треугольника, а точка A_1 — центром отрицательной гомотетии α и вписанной окружности, то прямая AA_1 проходит через центр отрицательной гомотетии описанной и вписанной окружностей. Через эту же точку проходят две другие прямые.

    б) Известно, что центр отрицательной гомотетии описанной и вписанной окружностей изогонально сопряжен точке Жергонна, в которой пересекаются прямые AA_2, BB_2 и CC_2. Отсюда сразу следует утверждение задачи.

15. (Л.Емельянов, 9–11) В треугольнике O, M, N — центр описанной окружности, центр тяжести и точка Нагеля соответственно. Докажите, что угол MON прямой тогда и только тогда, когда один из углов треугольника равен 60°.

    Решение. Пусть I, H — соответственно центр вписанной окружности и ортоцентр треугольника. При гомотетии с центром M и коэффициентом $-1/2$ точки N и H переходят в I и O соответственно. Поэтому $\angle MON = \pi/2$ тогда и только тогда, когда $IO = IH$. Пусть прямая OH пересекает стороны AC и BC треугольника ABC. Тогда, так как AI, BI — биссектрисы углов HAO, HBO, точки A, B, O, I, H лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle AOB = 2\angle C = \angle AHB = \pi - \angle C$ и $\angle C = 60^\circ$. Обратное утверждение доказывается аналогично.

16. (А.Доледенок, 9–11) Пусть BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Касательные к описанной окружности треугольника AB_1C_1 в точках B_1 и C_1 пересекают прямые AB и AC в точках M и N соответственно. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников AMN и AB_1C_1 лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

    Решение. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины BC, CA, AB; O, H — центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC. Проекция Z точки A на прямую OH

лежит на окружностях AB_1HC_1 и AB_0OC_0, т.е. Z является центром поворотной гомотетии, переводящей C_0 в B_0, а C_1 в B_1. Осталось доказать, что эта поворотная гомотетия переводит M в N, отсюда будет следовать, что окружность AMN проходит через Z.

Заметим, что точка A_0 и центр окружности AB_1HC_1 диаметрально противоположными на окружности девяти точек треугольника ABC. Поэтому прямые A_0B_1 и A_0C_1 касаются окружности AB_1HC_1, т.е. совпадают с прямыми B_1M и C_1N (рис.16). Спроецировав прямую AC на AB из точки A_0, получаем равенство двойных отношений $(N, B_1, B_0, \infty) = (C_1, M, \infty, C_0)$ или $NB_0/NB_1 = MC_0/MC_1$, что и требовалось.

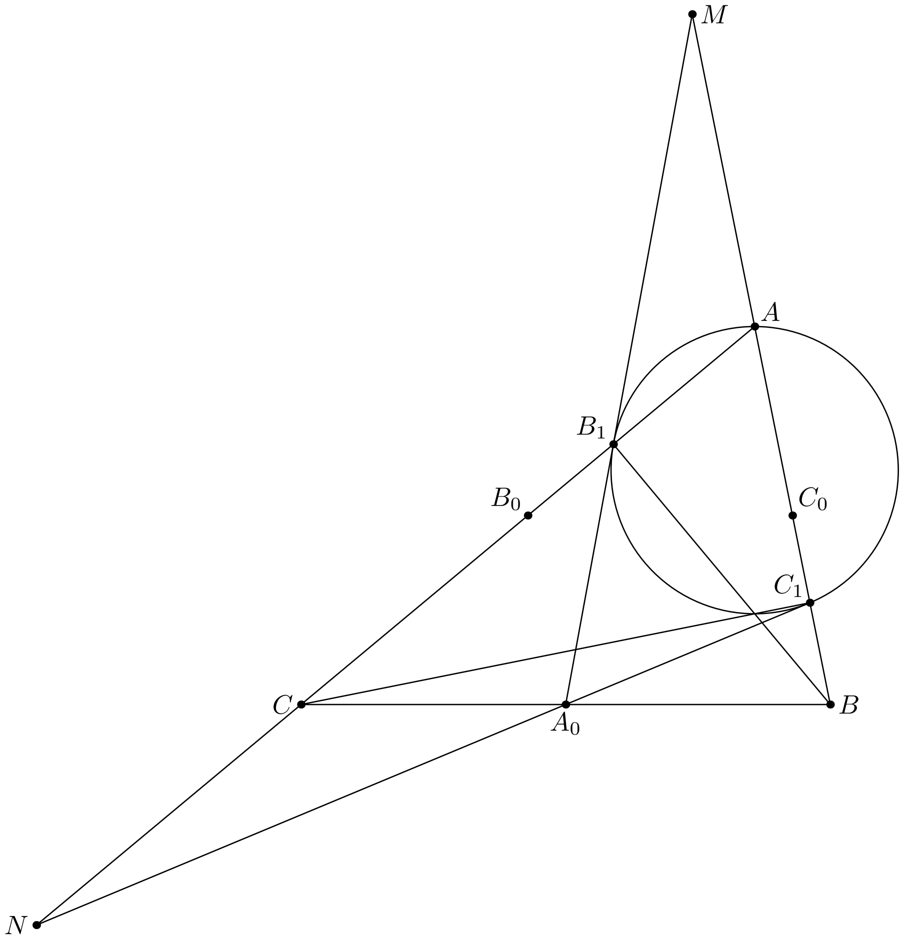

Рис.16

17. (Д.Хилько, Украина, 9–11) На стороне BC треугольника ABC взята произвольная точка D. Через D и A проведены окружности ω_1 и ω_2 так, что BA касается ω_1, CA касается ω_2 соответственно. BX — вторая касательная из точки B к окружности ω_1, CY — вторая касательная из точки C к окружности ω_2. Докажите, что описанная окружность треугольника XDY касается BC.

Решение. Сделаем инверсию относительно окружности с центром в точке D и произвольным радиусом. При построении конструкции после инверсии будем руководствоваться известными свойствами этого преобразования. Образы точек будем обозначать штрихами (рис.17).

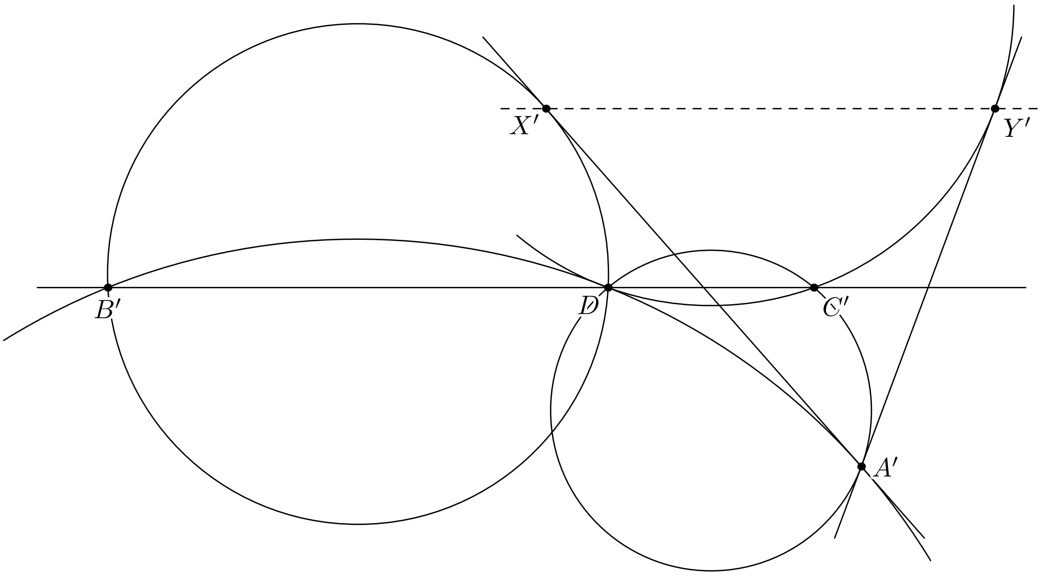

Рис.17

Описанная окружность треугольника XDA касалась BA и BX. Она перейдет в прямую $A'X'$, а прямые — в описанные окружности треугольников $B'DA'$ и $B'DX'$. Значит, они будут касаться прямой $X'A'$. Тогда радикальная ось этой пары окружностей, то есть $B'D$ будет делить пополам отрезок $X'A'$. Аналогично, описанные окружности треугольников $DC'Y'$ и $DC'A'$ касаются прямой $Y'A'$. Тогда их радикальная ось DC' будет делить пополам отрезок $A'Y'$. Значит, прямая $B'C'$ — средняя линия треугольника $X'A'Y'$, откуда $X'Y' \parallel B'D'$. Остается заметить, что прообраз прямой $X'Y'$ — окружность, проведенная через точки X, Y, D. Так как $X'Y' \parallel B'C'$, она будет касаться прямой BC в точке E.

18. (Н.Москвитин, 9–11) Вокруг прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность, на меньших дугах AC и BC взяты их середины — K и P соответственно. Отрезок KP пересекает катет AC в точке N. Центр вписанной окружности треугольника ABC — I. Найти угол NIC.

    Ответ. $45°$.

    Решение. По теореме о трезубце точки K и P являются центрами описанных окружностей треугольников IAC, IBC соответственно. Значит, KP является серединным перпендикуляром к отрезку CI. Тогда N — точка касания AC с вписанной окружностью и $\angle NIC = 45°$ (рис.18).

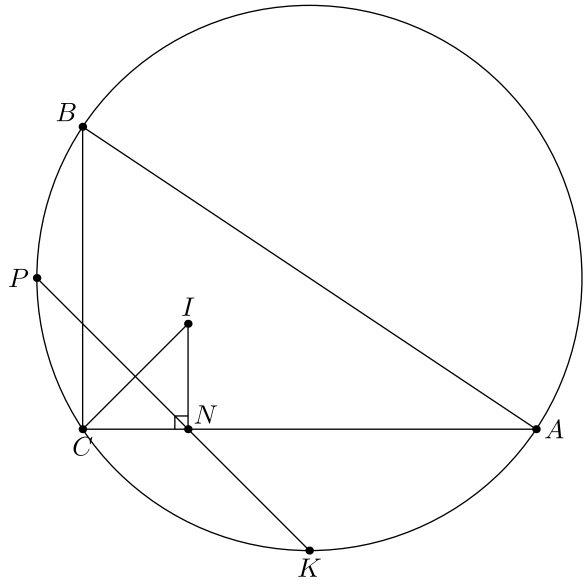

Рис.18

19. (А.Скутин, 9–11) Правильный шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Точки P и Q выбраны на касательных, проведенных к этой окружности в точках A и D соответственно, так, что PQ касается меньшей дуги EF этой окружности. Найдите угол между прямыми PB и QC.

Ответ. $30°$.

Решение. Пусть T — точка касания PQ с окружностью, M, N — середины отрезков AT, DT. Так как PB и CQ — симедианы треугольников ABT, CDT соответственно, то $\angle ABP = \angle MBT$, $\angle DCQ = \angle NCT$. Поскольку MN — средняя линия треугольника ADT, то $MN = AD/2 = BC$ и $MN \parallel BC$ (рис.19). Значит, угол между PB и QC равен $\angle PBM + \angle NCQ = \angle ABM + \angle NCD - \angle MBT - \angle TCN = 30°$.

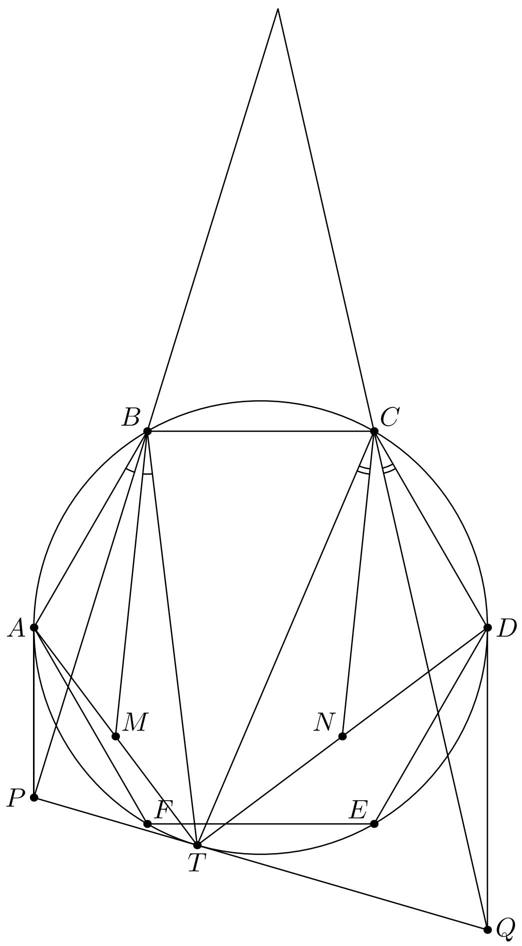

Рис.19

20. (Д.Прокопенко, 10–11) Окружность ω, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, AC и AB в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Биссектрисы углов B и C пересекают серединный перпендикуляр к отрезку AA_0 в точках Q и P соответственно. Докажите, что прямые PC_0 и QB_0 пересекаются на окружности ω.

Решение. Из определения точек P, Q следует, что они лежат на описанных окружностях треугольников ABA_0 и ACA_0 соответственно. Поэтому треугольник AA_0Q подобен треугольнику B_0A_0I, а треугольник AA_0P — треугольнику C_0A_0I (по трем углам). Значит, $A_0Q \cdot A_0B_0 = A_0I \cdot A_0A = A_0P \cdot A_0C_0$. Кроме того, $\angle PA_0Q = (\angle B + \angle C)/2 = \angle B_0A_0C_0$, откуда получаем, что треугольники A_0PQ и $A_0B_0C_0$ подобны (рис.20). Тогда треугольники A_0B_0P и A_0C_0Q тоже подобны, т.е. угол между прямыми B_0P и C_0Q равен углу $B_0A_0C_0$, что и доказывает утверждение задачи.

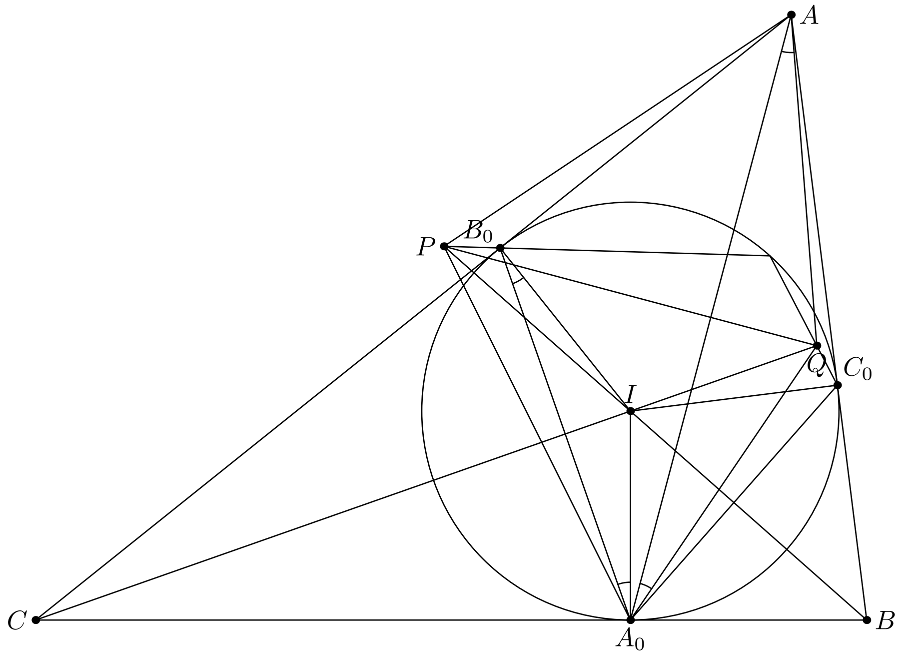

Рис.20

21. (А.Шаповалов, 10–11) Прямоугольники P и Q равновелики, но у P диагональ больше. Двумя копиями P можно накрыть Q. Докажите, что двумя копиями Q можно накрыть P.

    Решение. Будем называть шириной прямоугольника его меньшую сторону, а длиной — большую. Из условия следует, что ширина у P меньше, чем у Q, а длина больше. Если две копии P накрывают Q, то они накрывают и круг с диаметром, равным ширине Q, тем более этот круг можно накрыть двумя полосами, ширина которых равна ширине P. Но круг нельзя накрыть полосами, сумма ширин которых меньше его диаметра. Следовательно ширина P не меньше половины ширины Q. Тогда длина Q не меньше половины длины P и очевидно, что P можно накрыть двумя копиями Q.

22. (А.Якубов, 10–11) Пусть M_A, M_B, M_C — середины сторон неравнобедренного треугольника ABC, точки H_A, H_B, H_C, отличные от M_A, M_B, M_C, лежащие на соответственных сторонах, такие, что $M_AH_B = M_AH_C$, $M_BH_A = M_BH_C$, $M_CH_A = M_CH_B$. Докажите, что H_A, H_B, H_C — основания высот треугольника ABC.

    Решение. Отметим в пространстве такую точку X, что $XM_A = M_AH_B$, $XM_B = M_BH_A$, $XM_C = M_CH_A$. Рассмотрим тетраэдр $XM_AM_BM_C$. У него все грани равновелики, потому что треугольник XM_AM_B равен треугольнику $H_CM_AM_B$. Значит, все грани равны и точки H_C, M_A, M_B, M_C лежат на одной окружности. Следовательно, H_C — основание высоты.

23. (Ф.Ивлев, 10–11) Дан тетраэдр, в который можно вписать сферу, касающуюся всех его ребер. Пусть отрезки касательных из вершин равны a, b, c и d. Всегда ли можно из этих четырех отрезков сложить какой-нибудь треугольник? (Не обязательно использовать для этого все отрезки. Разрешается образовывать сторону треугольника из двух отрезков)

Ответ. Нет.

Решение. Возьмем на плоскости окружности β и γ с радиусами 2 и 1 соответственно, касающиеся внешним образом. Проведем к ним общую внешнюю касательную и построим окружность δ, вписанную в криволинейный треугольник, образованный обеими окружностями и касательной. Очевидно, что радиус этой окружности будет меньше 1, так что из радиусов трех окружностей треугольник составить нельзя. Теперь заменим прямую, касающуюся β и γ, окружностью α с радиусом больше чем 4, касающейся их внешним образом, и построим три шара, центры и радиусы которых совпадают с центрами и радиусами окружностей α, β, γ. Наконец, построим шар с радиусом, равным радиусу окружности δ, касающийся трех остальных. Центры этих шаров образуют тетраэдр, а точки их касаний лежат на сфере, касающейся всех ребер. При этом отрезки a, b, c, d равны радиусам окружностей α, β, γ, δ, из которых ни одного треугольника составить нельзя.

24. (И.И.Богданов, 11) В призму $ABCA'B'C'$ вписана сфера, касающаяся боковых граней $BCC'B'$, $CAA'C'$, $ABB'A'$ в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. При этом $\angle A_0BB' = \angle B_0CC' = \angle C_0AA'$.

а) Чему могут равняться эти углы (укажите все возможные значения)?

б) Докажите, что отрезки AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке.

в) Докажите, что проекции центра сферы на прямые $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ образуют правильный треугольник.

Решение. а) **Ответ.** 60°.

Обозначим значение этих углов через θ. Из равенства треугольников $CC'A_0$ и $CC'B_0$ следует, что угол A_0CC' также равен θ. Аналогично получаем, что $\angle B_0AA' = \angle C_0BB' = \theta$. Тогда $6\theta = 3\pi - (\angle C_0AB + \angle C_0AC + \angle A_0BC + \angle A_0CB + \angle B_0CA + \angle B_0AC)$. Но, например, $\angle C_0AB = \angle TAB$, где T — точка касания сферы с гранью ABC. Из этого и пяти аналогичных равенств получаем, что сумма шести углов в скобках равна сумме углов треугольника ABC, т.е. $\theta = 60^\circ$.

б) В предыдущем пункте было доказано, что $\angle AB_0C = \angle BA_0C = 2\pi/3$. Значит, прямые AB_0 и BA_0 пересекают ребро CC' в одной точке K такой, что $CK = CB_0 = CA_0$ (треугольники CB_0K и CA_0K правильные, поскольку у них по два угла равны $\pi/3$). Следовательно, точки A, B, A_0, B_0 лежат в одной плоскости, т.е. прямые AA_0 и BB_0 пересекаются. Аналогично получаем, что каждая из этих прямых пересекается с прямой CC_0. Поскольку эти три прямые не лежат в одной плоскости, точки пересечения совпадают.

в) Из проведенного в предыдущем пункте рассуждения следует, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 2\pi/3$, т.е. T — точка Торричелли треугольника ABC. Рассмотрим вторую сферу, касающуюся плоскостей боковых граней и касающуюся грани ABC с другой стороны в точке T'. Расстояния от T и T' до сторон треугольника ABC относятся как котангенсы и тангенсы половин соответствующих двугранных углов призмы, следовательно, эти точки изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Отсюда получаем, что сфера, вписанная в призму, касается грани $A'B'C'$ в ее точке Аполлония. Проекции этой точки, а значит, и центра сферы на прямые $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ образуют правильный треугольник.