XIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Решения. Финал. Первый день. 8 класс

1. (Д.Мухин, Д.Ширяев) Четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$ и $AD = CD$, вписан в окружность. Точка M лежит на меньшей дуге CD этой окружности. Прямые BM и CD пересекаются в точке P, а прямые AM и BD — в точке Q. Докажите, что $PQ \parallel AC$.

   Решение. Углы MPD и MQD равны, так как первый опирается на дуги MD и BC, а второй — на дуги MD и AB. Следовательно, четырехугольник $MPQD$ — вписанный (рис.8.1), а поскольку $\angle DMP = \angle DMB = 90°$, то $PQ \perp BD$ и, значит, $PQ \parallel AC$.

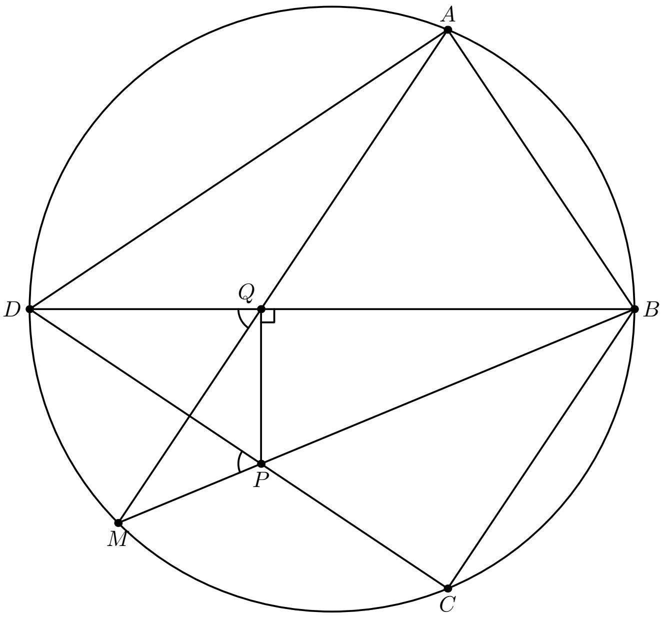

Рис. 8.1

2. (А.Соколов) Дан остроугольный треугольник ABC. Точки H и O — его ортоцентр и центр описанной окружности соответственно. Серединный перпендикуляр к BH пересекает стороны AB и BC в точках A_1 и C_1. Докажите, что OB — биссектриса угла A_1OC_1.

   Первое решение. Так как $\angle HBC = \angle ABO = 90° - \angle C$, равнобедренные треугольники HBC_1 и ABO подобны. Поэтому треугольники OBC_1 и ABH также подобны, т.е. $\angle C_1OB = \angle HAB = 90° - \angle B$ (рис.8.2). Аналогично $\angle A_1OB = \angle HCB = 90° - \angle B$.

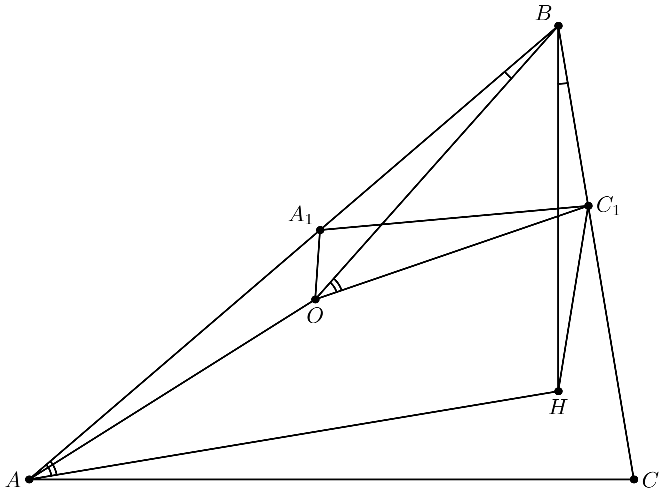

Рис. 8.2

Второе решение. Воспользуемся следующим утверждением

Пусть точки A', B', C' симметричны точке P относительно сторон треугольника ABC. Тогда центр описанной окружности треугольника $A'B'C'$ изогонально сопряжен точке P относительно треугольника ABC.

Рассмотрим треугольник A_1BC_1. При отражении H относительно BA_1 и BC_1 точки попадают на описанную окружность (свойство ортоцентра), а при отражении относительно A_1C_1 H попадет в точку B, значит, точки O и H изогонально сопряжены относительно треугольника A_1BC_1. Тогда $\angle AA_1O = \angle HA_1C = \angle C_1A_1B$, что означает, что C_1B – внешняя биссектриса угла OA_1C_1. Аналогично, A_1B – внешняя биссектриса угла C_1OA_1. Значит B – центр вневписанной окружности треугольника A_1OC_1 и тогда OB – биссектриса угла A_1OC_1.

3. (М.Кыранбай, Казахстан) В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Точки X и Y симметричны F относительно AD и BE соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BEX и ADY совпадают.

   Решение. Поскольку $AFDE$ — параллелограмм, середины отрезков FE и AD совпадают, следовательно, $EX \parallel AD$. Так как треугольник FEX прямоугольный, серединный перпендикуляр к EX проходит через середину EF и, значит, совпадает с серединным перпендикуляром к AD (рис.8.3). Аналогично совпадают серединные перпендикуляры к DY и BE.

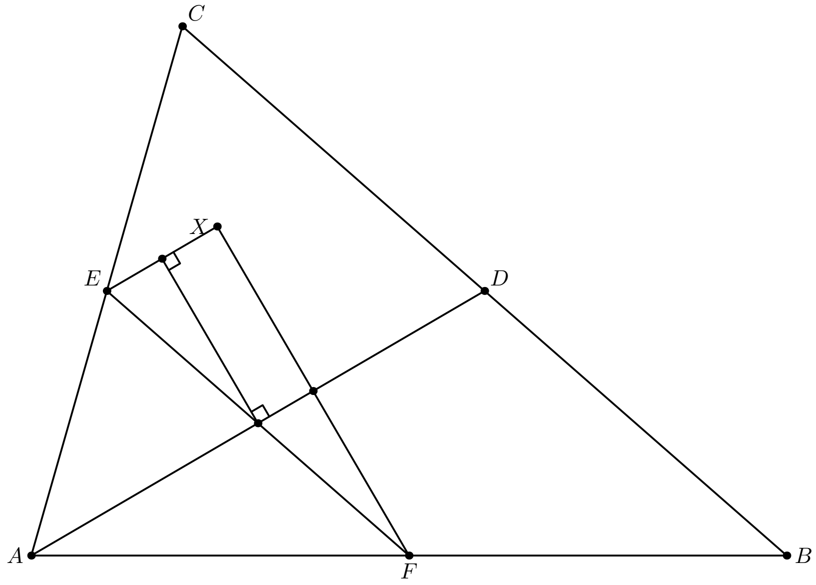

Рис. 8.3

4. (А.Шаповалов) Саша разрезал бумажный треугольник на два треугольника. Затем он каждую минуту резал на два треугольника один из полученных ранее треугольников. Через некоторое время, не меньшее часа, все полученные Сашей треугольники оказались равными. Укажите все исходные треугольники, для которых возможна такая ситуация.

   Ответ. Равнобедренные или прямоугольные.

   Решение. Достаточность. Равнобедренный треугольник можно разрезать по медиане на два равных прямоугольных треугольника, а прямоугольный — по медиане, проведенной к гипотенузе, на два равнобедренных. Если каждый из них разрезать на два равных треугольника, получим 4 равных прямоугольных треугольника. Аналогично, превратим каждый из них в 4 меньших равных прямоугольных треугольника и т.д.

   Необходимость. Последнее разрезание на две части даст два равных треугольника, у которых есть смежные углы. Такой угол больше не смежных с ним углов другого треугольника, значит, он равен смежному, то есть прямой. Таким образом, в итоге исходный треугольник разбился на прямоугольные треугольники. Пусть их углы α, $\beta = 90° - \alpha$ и $90°$, где $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha = 45°$ или $\alpha = 30°$, все углы исходного треугольника кратны α и несложный перебор показывает, что возможны только наборы $(45°, 45°, 90°)$, $(30°, 60°, 90°)$, $(30°, 30°, 120°)$, $(60°, 60°, 60°)$, т.е. треугольник прямоугольный или равнобедренный.

   Для остальных значений угла α список α, β, 2α, $90°$, 2β не содержит равных углов, и парой смежных углов из списка могут быть либо $(90^\circ, 90^\circ)$, либо $(2\alpha, 2\beta)$. Пусть в конце площадь каждой части равна 1, тогда площадь s исходного и любого из промежуточных треугольников натуральна. Докажем индукцией по s, что набор углов такого треугольника может быть одним из трех типов: $(\alpha, \beta, 90^\circ)$, $(\alpha, \alpha, 2\beta)$ или $(\beta, \beta, 2\alpha)$. База $s = 1$ уже доказана. Треугольник T с $s > 1$ был разбит на две части меньшей площади. По предположению индукции наборы углов в частях принадлежат списку и в них есть пара смежных углов. Если смежные углы прямые, то полученные части граничат по катету. Против этого катета могут лежать либо равные углы α, либо равные углы β, либо один α, а другой β. Во всех случаях треугольник T принадлежит к одному из трех типов. Если же смежные углы равны 2α и 2β, то треугольник T прямоугольный с углами $(\alpha, \beta, 90^\circ)$.

XIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Решения. Финал. Второй день. 8 класс

5. (Е.Бакаев) Дан квадрат $ABCD$. Первая окружность касается сторон угла A, а вторая окружность касается сторон угла B, причем сумма диаметров окружностей равна стороне квадрата. Докажите, что одна из общих касательных этих окружностей пересекает сторону AB в ее середине.

   Решение. Пусть O_a, O_b — центры окружностей, T_a, T_b — точки их касания с AB, M — середина AB (рис.8.5). Из условия следует, что $T_aM = MO_b$, $T_bM = MO_a$. Следовательно, $\angle O_aMT_a + \angle O_bMT_b = 90°$, т.е. $O_aM \perp O_bM$. Значит, прямая l, симметричная AB относительно O_aM, будет также симметрична AB относительно O_bM. Поскольку расстояния от центров окружностей до l равны их радиусам, l — общая касательная.

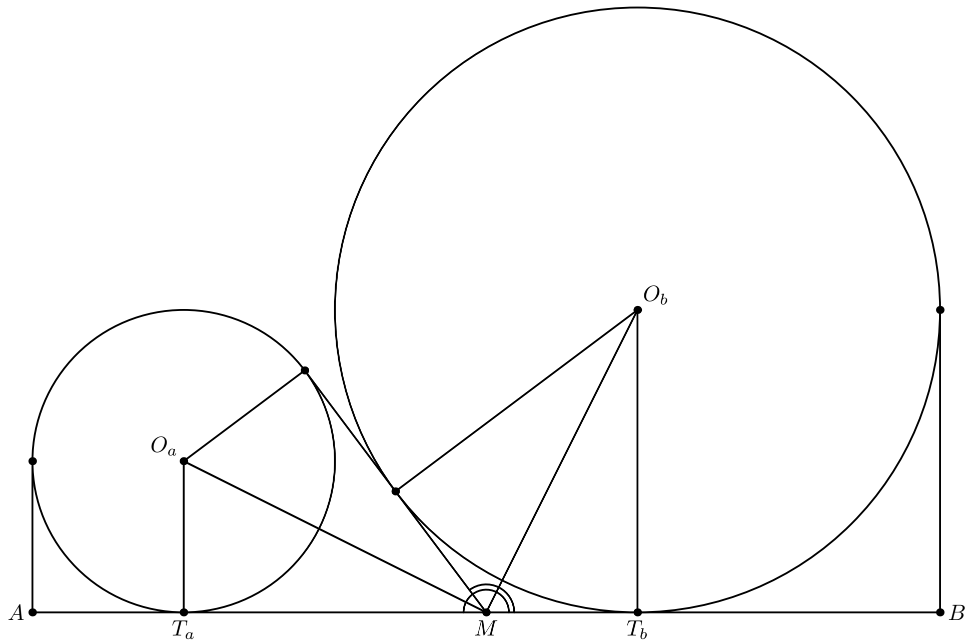

Рис. 8.5

6. (А.Шаповалов) Остроугольный треугольник разбили медианой на два меньших треугольника. Докажите, что каждый из них можно накрыть полукругом, равным половинке описанного круга исходного треугольника.

   Решение. Пусть CD — медиана треугольника ABC, угол ADC не острый, угол BDC не тупой. Тогда треугольник BDC лежит по одну сторону от серединного перпендикуляра к AB, который является диаметром описанной около треугольника ABC окружности, и, следовательно, содержится в полукруге. Треугольник же ACD можно накрыть полукругом с диаметром AC, а значит, и полукругом большего диаметра.

7. (Е.Бакаев) На плоскости даны два правильных тринадцатиугольника $A_1A_2\ldots A_{13}$ и $B_1B_2\ldots B_{13}$ такие, что точки B_1 и A_{13} совпадают и лежат на отрезке A_1B_{13}, а многоугольники лежат по одну сторону от этого отрезка. Докажите, что прямые A_1A_9, $B_{13}B_8$ и A_8B_9 проходят через одну точку.

   Решение. Рассмотрим правильный тринадцатиугольник $C_1C_2\ldots C_{13}$, где $C_1 = A_1$, $C_{13} = B_{13}$. Очевидно, прямые A_1A_9 и B_1B_8 совпадают с C_1C_9 и $C_{13}C_8$ соответственно. Кроме того, поскольку $C_1C_{13} = C_8C_9$, то C_1C_8 и $C_{13}C_9$ — основания равнобедренной трапеции. Точки A_8 и B_9 лежат на этих основаниях, причем $A_1A_8 : A_8C_8 = A_1A_{13} : B_1B_{13} = C_9B_9 : B_9B_{13}$. Следовательно, прямая A_8B_9 проходит через точку пересечения диагоналей трапеции (рис.8.7).

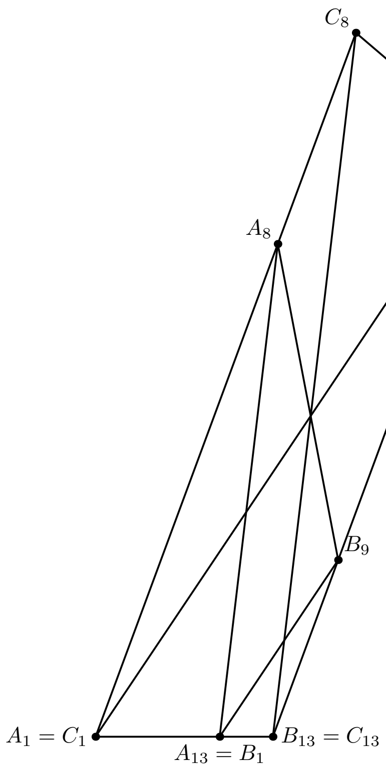

Рис. 8.7

8. (Tran Quang Hung, Вьетнам) Вокруг квадрата $ABCD$ описана окружность. Точка P лежит на дуге CD этой окружности, не содержащей других

вершин квадрата. Прямые PA, PB пересекают диагонали BD, AC соответственно в точках K, L. Точки M, N — проекции K, L соответственно на CD, а Q — точка пересечения прямых KN и ML. Докажите, что прямая PQ делит отрезок AB пополам.

Решение. Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма. К гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону восставлены перпендикуляры $AP = AC$ и $BQ = BC$. Прямые AQ и BP пересекаются в точке R, прямые CP и CQ пересекают AB в точках M и N соответственно. Тогда CR делит отрезок MN пополам.

Доказательство. Так как $\angle CAP = 90^\circ + \angle CAB = 180^\circ - \angle CBA$, $\angle ACP = \frac{\angle B}{2}$. Поэтому $BM = BC = BQ$ и аналогично $AN = AC = AP$. Пусть прямая, проходящая через R и параллельная AB, пересекает CP, CQ в точках X, Y соответственно, а Z — проекция R на AB (рис.8.8). Тогда $RX : BM = PR : PB = AR : AQ = RZ : QB$, следовательно, $RX = RZ$. Аналогично $RY = RZ$ (рис.8.8.1). Таким образом, CR делит пополам отрезок XY, а значит, и MN.

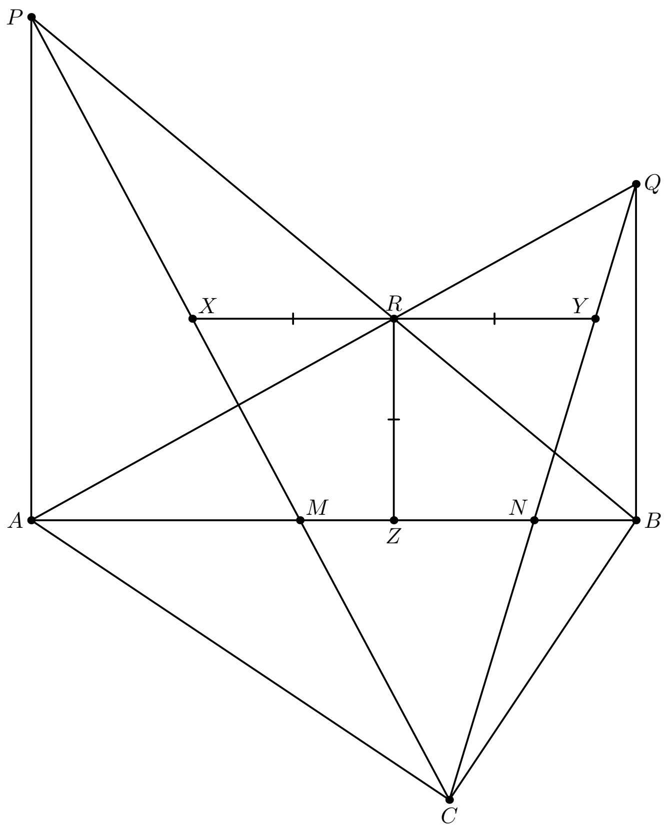

Рис. 8.8.1

Примечание. Нетрудно убедиться, что CZ — биссектриса треугольника

ABC, а CR проходит через точку касания его вписанной окружности с гипотенузой.

Вернемся к задаче. Так как треугольник KMD — равнобедренный прямоугольный, а $\angle KPD = 45^\circ$, точка M — центр окружности KPD. Аналогично N — центр окружности PCL. При этом $\angle MPN = 45^\circ + (90^\circ - \frac{\angle BDP}{2}) + (90^\circ - \frac{\angle ACP}{2}) = 90^\circ$. Применяя лемму к точкам P, M, N, K, L, получаем утверждение задачи (рис.8.8.2).

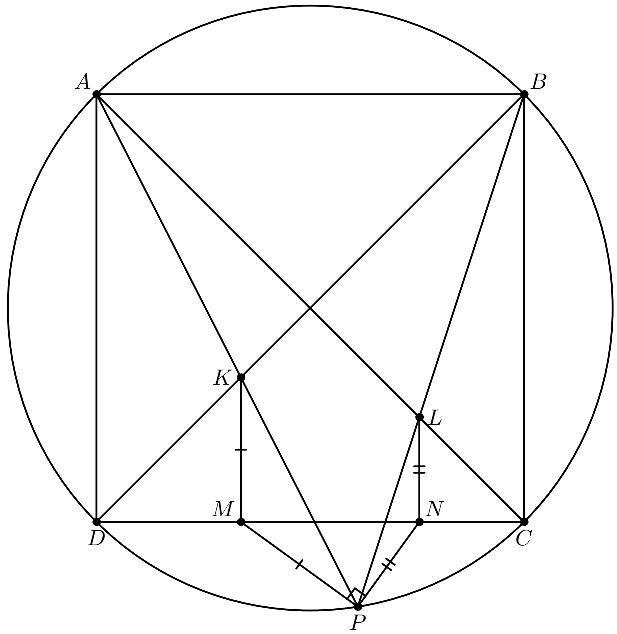

Рис. 8.8.2

XIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Решения. Финал. Первый день. 9 класс

1. (А.Заславский) Правильный треугольник ABC вписан в окружность. Прямая, проходящая через середину AB и параллельная AC, пересекает дугу AB, не содержащую C, в точке K. Докажите, что отношение AK/BK равно отношению стороны правильного пятиугольника к его диагонали.

   Решение. Пусть L — вторая точка пересечения прямой с окружностью (рис.9.1). Так как треугольник ABC правильный, $AL = BL + CL = BK + AK$. С другой стороны, так как KL делит AB пополам, площади треугольников AKL и BKL равны, т.е. $AK \cdot AL = BK \cdot BL = BK^2$. Поэтому отношение $t = AK/BK$ удовлетворяет уравнению $t^2+t-1 = 0$, корнем которого является отношение стороны правильного пятиугольника к его диагонали.

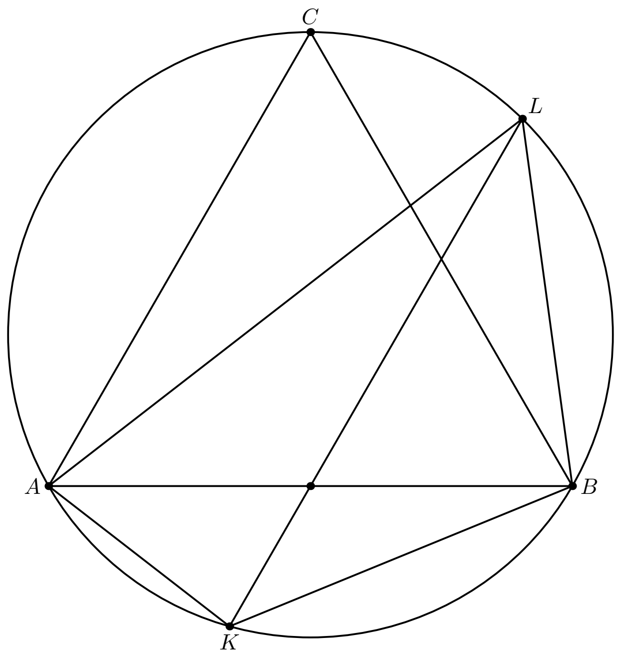

Рис. 9.1

2. (С.Берлов, А.Полянский) Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина дуги AB описанной окружности, не содержащей C. Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении I делит отрезок CW?

   Ответ. $2:1$.

   Решение. Пусть I_c — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB. Так как $AI_c \perp AI$, получаем, что $IM \parallel AI_c$, т.е. IM —

средняя линия треугольника ACI_c. По теореме о трезубце W — середина II_c, следовательно, $CI = II_c = 2IW$ (рис.9.2).

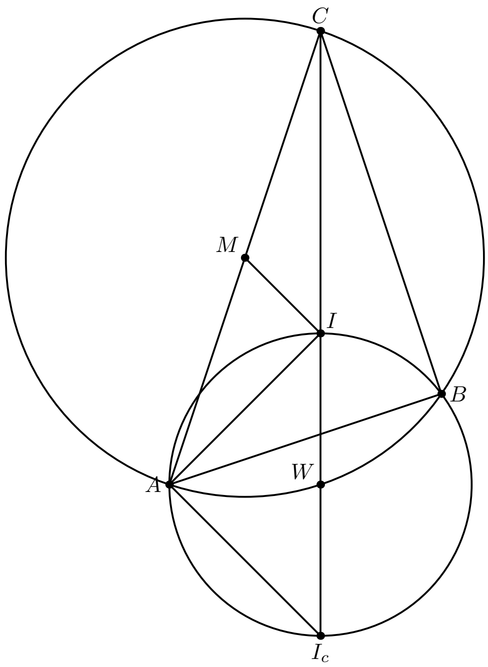

Рис. 9.2

3. (A.Mudgal, Индия) В остроугольном треугольнике ABC углы B и C больше $60°$. Точки P, Q на сторонах AB, AC таковы, что A, P, Q и ортоцентр треугольника H лежат на одной окружности; K — середина отрезка PQ. Докажите, что $\angle BKC > 90°$.

   Решение. Пусть BB', CC' — высоты треугольника. Так как $\angle PHQ = 180° - \angle A = \angle B'HC'$, треугольники $HB'Q$ и $HC'P$ подобны. Значит, когда точка P равномерно движется по отрезку AB, точка Q также равномерно движется по AC, а тогда и точка K движется по некоторому отрезку. Поскольку $\angle AHC' > \angle CHB'$ и $\angle AHB' > \angle BHC'$, крайние точки этого отрезка соответствуют совпадению точки P с B или Q с C, рассмотрим для определенности последний случай (рис.9.3).

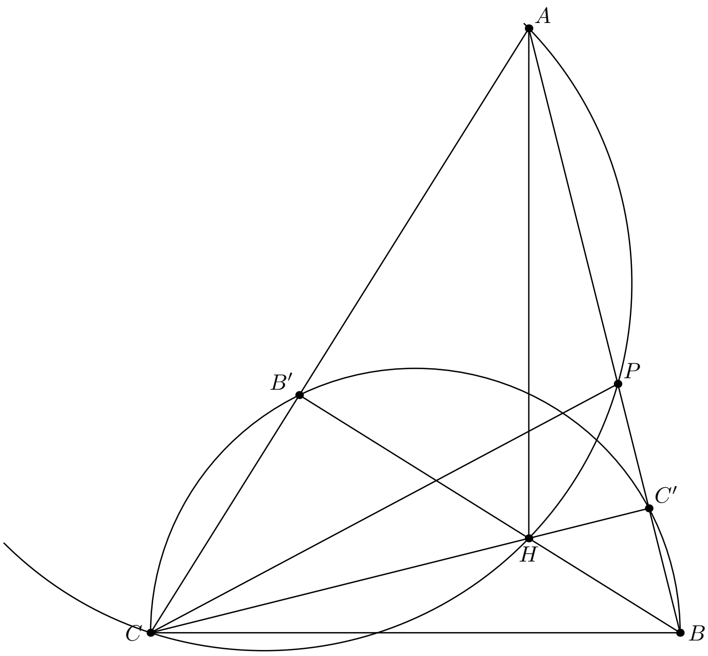

Рис. 9.3

Если $Q = C$, то $\angle HCP = \angle HAP = \angle HCB$, т.е. треугольник BCP равнобедренный и расстояние от K до середины BC равно BC'. Поскольку $\angle B > 60^\circ$, $BC' < BC/2$ и K лежит внутри окружности с диаметром BC. Аналогично внутри этой окружности лежит второй конец отрезка, по которому движется точка K, а следовательно, и весь этот отрезок.

4. (M.Etesamifard, Иран) Точка D лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC, а точки M и K — на его боковых сторонах AB и AC соответственно так, что $AMDK$ — параллелограмм. Прямые MK и BC пересекаются в точке L. Перпендикуляр к BC, проходящий через D, пересекает прямые AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что окружность с центром L, проходящая через D, касается описанной окружности треугольника AXY.

   Решение. Очевидно, что описанные окружности треугольников ABC и AXY перпендикулярны. Пусть E — вторая точка их пересечения. Так как E — центр поворотной гомотетии, переводящей X в B, а Y — в C, треугольники EXB и EYC подобны, т.е. $EB : EC = XB : YC = BD : CD$. С другой стороны, $LB : LD = LM : LK = LD : LC$. Поэтому точки B и C инверсны относительно окружности с центром L и радиусом LD и эта окружность также перпендикулярна описанной окружности треугольника ABC. Кроме того, для всех точек этой окружности отношение расстояний до B и C одно и то же (окружность Аполлония), а значит, она проходит через E (рис.9.4). Таким образом, обе окружности перпендикулярны описанной окружности треугольника ABC и пересекают ее в одной точке. Следовательно, они касаются.

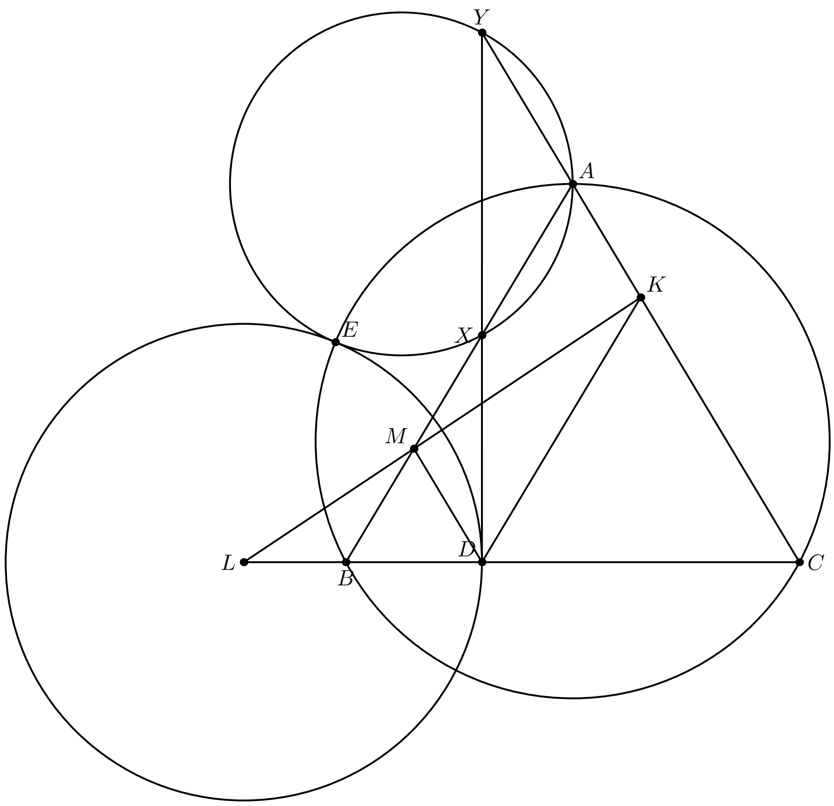

Рис. 9.4

XIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Решения. Финал. Второй день. 9 класс

5. (П.Кожевников) Пусть BH_b, CH_c — высоты треугольника ABC. Прямая H_bH_c пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Точки P и Q симметричны X и Y относительно AB и AC соответственно. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

   Решение. Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Так как прямая AO симметрична высоте треугольника из вершины A относительно биссектрисы из той же вершины, а $\angle AH_bH_c = \angle ABC$, то $AO \perp H_bH_c$, т.е. AO — серединный перпендикуляр к отрезку XY. Следовательно, $AP = AX = AY = AQ$ и четырехугольник $XPQY$ вписанный (рис.9.5). Поэтому прямые XY и PQ антипараллельны относительно прямых XP и YQ, которые параллельны высотам треугольника. Но BC и H_bH_c также антипараллельны относительно высот, значит, $PQ \parallel BC$.

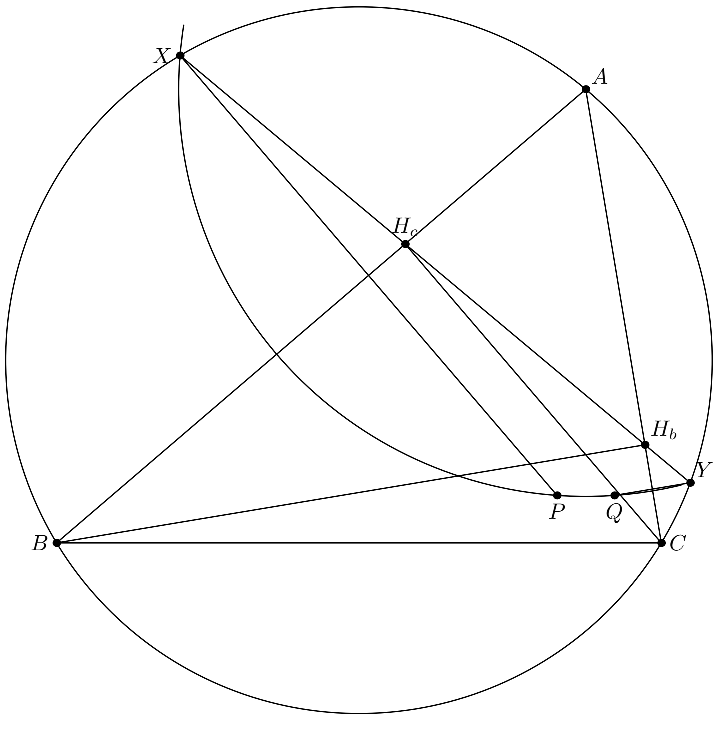

Рис. 9.5

6. (M.Etesamifard, Иран) В прямоугольном треугольнике ABC точка D — середина высоты, опущенной на гипотенузу AB. Прямые, симметричные AB относительно AD и BD, пересекаются в точке F. Найдите отношение площадей треугольников AFB и ABC.

Ответ. 4/3.

Решение. Пусть CH — высота треугольника, K, L — точки пересечения прямой, проходящей через C и параллельной AB, с AF и BF соответственно (рис.9.6). Так как трапеция $AKLB$ описана около окружности с диаметром CH, то KD и LD — биссектрисы углов AKL и BLK соответственно. Поэтому $\angle CKD = 90° - \angle HAD$, т.е. треугольники KCD и DHA подобны, а $KC = CD^2/AH = CH^2/(4AH) = BH/4$. Аналогично $CL = AH/4$. Следовательно, отношение высот подобных треугольников FKL и FAB равно 1/4, а отношение высот треугольников AFB и ABC — 4/3.

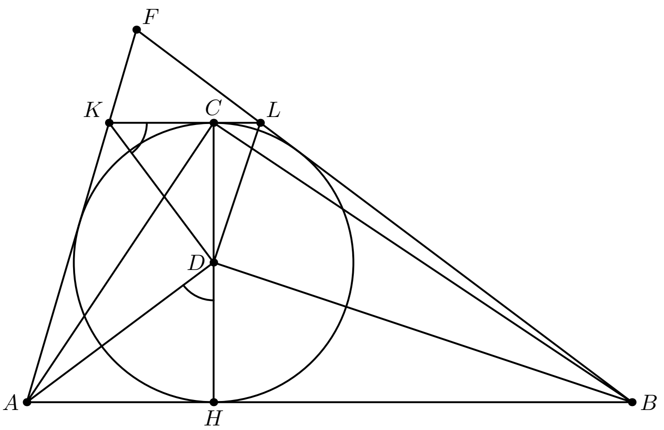

Рис. 9.6

7. (П.Кожевников) На каждой из двух параллельных прямых a и b отметили по 50 точек. Какое наибольшее количество треугольников с вершинами в этих точках может оказаться остроугольными?

Ответ. 41650.

Первое решение. Пусть $n = 50$.

Введем систему координат, в которой прямые a и b задаются уравнениями $y = 0$ и $y = 1$ соответственно. Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ отмеченные точки прямой a так, что их x-координаты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ упорядочены по возрастанию: $a_1 < \ldots < a_n$. Аналогично обозначим через $B_1, \ldots, B_n$ отмеченные точки прямой b с x-координатами $b_1 < \ldots < b_n$. Пусть A^- и A^+ точки на a с x-координатами, удовлетворяющими условиям $a^- < a_1$ и $a^+ > a_n$. Аналогично определим B^- и B^+.

Оценка. Общее число треугольников, образованных отмеченными точками, равно $T = 2\binom{n}{2}n = n^2(n-1)$. Число неостроугольных треугольников не меньше числа N неострых углов среди углов $A_iA_jB_k$ и $B_iB_jA_k$. Оценим N.

Зафиксируем $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $t \le s$, и рассмотрим отрезок A_tB_s (аналогично рассматривается B_tA_s). Отрезок A_tB_s образует две пары равных углов с прямыми a и b. Заметим, что либо оба угла $\angle A^-A_tB_s$ и $\angle A_tB_sB^+$, либо оба угла $\angle A^+A_tB_s$ и $\angle A_tB_sB^-$ — не острые. В первом случае все углы $\angle A_iA_tB_s$ и $\angle A_tB_sB_j$, где $i < t$ и $j > s$, — не острые; число таких углов равно $(t-1)+(n-s) = n-1-(s-t)$. Во втором случае неострыми будут углы $\angle A_iA_tB_s$ и $\angle A_tB_sB_j$ с $i > t$ и $j < s$; их число равно $(n-t)+(s-1) = n-1+(s-t)$. В любом случае число неострых углов вида $\angle A_iA_tB_s$ и $\angle A_tB_sB_j$ будет не меньше, чем $n-1-(s-t)$. Поэтому $N \ge n(n-1) + 2\sum\limits_{1\le t<s\le n}(n-1-(s-t)) = \frac{(n-1)(2n^2-n)}{3}$ (слагаемое $n(n-1)$ соответствует n отрезкам A_sB_t с $t = s$). Соответственно число остроугольных треугольников не превосходит $T - N \le \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = 41650$.

Пример. Отметим точки так, что $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n < 1/10$. Тогда все углы $\angle A_iB_kA_j$ и $\angle B_iA_kB_j$ будут острыми. Кроме того, для каждого отрезка A_tB_s (или A_sB_t) с $t \le s$ среди углов $\angle A_iA_tB_s$ и $\angle A_tB_sB_j$ неострыми будут ровно $n-(s-t)+1$. Следовательно, полученная оценка точна.

Второе решение. Очевидно, максимум достигается, когда точки на обеих прямых расположены достаточно близко, так, что любой отрезок с отмеченными концами на одной из прямых из любой точки другой прямой виден под острым углом. Покрасим точки одной из прямых в синий цвет, а проекции на эту прямую точек второй прямой — в красный. Теперь задачу можно переформулировать следующим образом.

На прямой отмечены 50 синих и 50 красных точек. Найти максимально возможное число троек точек, в которых средняя одного цвета, а крайние другого.

Пусть $A_1, \ldots, A_{50}$, $B_1, \ldots, B_{50}$ — красные и синие точки, упорядоченные слева направо. Рассмотрим пару соседних точек A_i и B_j. Если A_i лежит левее B_j, то эти точки образуют хорошую тройку с точками $B_1, \ldots, B_{j-1}$ и $A_{i+1}, \ldots, A_{50}$, т.е. $n-1+(j-i)$ хороших троек. При $i > j$ мы можем, поменяв A_i и B_j местами, увеличить число таких троек, а остальные хорошие тройки при этом останутся хорошими. Поэтому оптимальным будет расположение точек, при котором любая точка A_i лежит правее

B_{i-1}, но левее B_{i+1} (порядок точек A_i и B_i может быть произвольным). В частности, оптимальное расположение получится при чередовании цветов точек. Число остроугольных треугольников для этого расположения посчитано в предыдущем решении.

8. (И.Фролов) Пусть AK и BL — высоты остроугольного треугольника ABC, а ω — вневписанная окружность треугольника ABC, касающаяся отрезка AB. Общие внутренние касательные к окружностям CKL и ω пересекают прямую AB в точках P и Q. Докажите, что $AP = BQ$.

   Первое решение. Пусть R — центр внутренней гомотетии окружностей CKL и ω, вписанная окружность треугольника ABC касается AB в точке C_1, вписанная окружность треугольника PQR — в точке C_1', ω — в точке C_2, и пусть C_2C_3 — диаметр ω. Тогда C, R, C_3 лежат на одной прямой и C, C_1, C_3 лежат на одной прямой (поскольку вписанная и вневписанная окружности гомотетичны относительно C). Аналогично R, C_1', C_3 лежат на одной прямой. Значит, C_1' совпадает с C_1. Следовательно, совпадают середины отрезков AB, C_1C_2, $C_1'C_2$ и PQ.

   Второе решение. Докажем, что утверждение задачи останется верным, если заменить окружность CKL любой окружностью с центром на высоте, проходящей через C. Как и в первом решении получаем, что точка R пересечения общих внутренних касательных к этой и вневписанной окружностям лежит на прямой CC_1. Таким образом, задачу можно переформулиров следующим образом.

   Из произвольной точки R на прямой CC_1 проводятся касательные к вневписанной окружности треугольника, пересекающие AB в точках P и Q. Доказать, что эти точки симметричны относительно середины AB.

   Можно показать, что соответствие между P и Q сохраняет двойные отношения. Поэтому для решения задачи достаточно найти две пары точек P, Q, симметричных относительно середины AB. При $R = C$ точки P, Q совпадают с A, B, а при $R = C_1$ — с C_1, C_2. В обоих случаях условие симметричности выполнено.

   Примечание. В условии задачи можно заменить вневписанную окружность на вписанную и общие внутренние касательные на внешние. Более того, рассуждая, как во втором решении, получим, что точки пересечения с AB в обоих случаях одни и те же.

XIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Решения. Финал. Первый день. 10 класс

1. (Д.Швецов) Две окружности пересекаются в точках A и B. Пусть CD — их общая касательная (C и D — точки касания), а O_a, O_b — центры описанных окружностей треугольников CAD, CBD соответственно. Докажите, что середина отрезка O_aO_b лежит на прямой AB.

   Решение. Пусть C', D' — точки касания окружностей с второй общей касательной. Углы ACD и ADC равны половинам дуг AC и AD соответствующих окружностей, а углы BCD и BDC — половинам дуг BC и BD, которые равны дугам $C'A$ и $D'A$. Следовательно, сумма всех четырех углов равна полусумме дуг $C'AC$ и $D'AD$. Поскольку последняя дуга гомотетична дуге $C'C$, эта полусумма равна π. Значит, центры окружностей CAD и CBD симметричны относительно CD, т.е. середина отрезка O_aO_b совпадает с серединой CD, которая лежит на радикальной оси окружностей — прямой AB (рис.10.1).

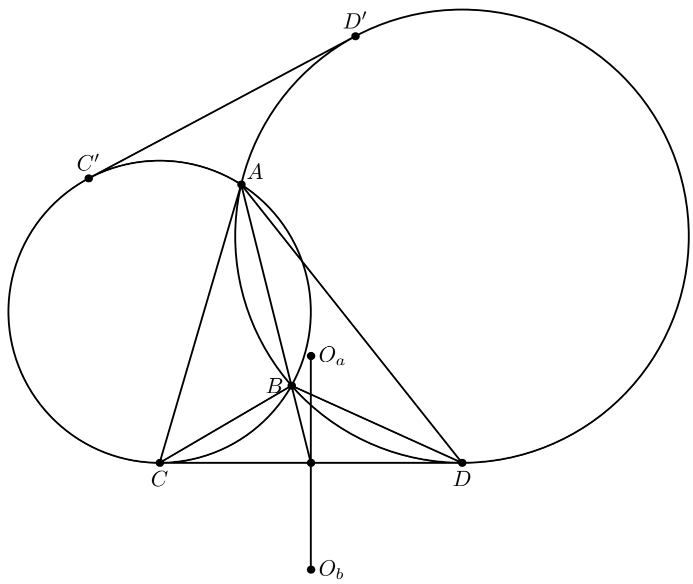

Рис. 10.1

2. (А.Пешнин) Докажите, что в остроугольном треугольнике расстояние от любой вершины до соответствующего центра вневписанной окружности меньше чем сумма двух наибольших сторон треугольника.

   Решение. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$, причем $\alpha \geq \beta \geq \gamma$; I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей; p — полупериметр. Тогда из неравенств $2\alpha < 90^\circ < 2\beta + 2\gamma$ и $\beta \geq \gamma$ следует, что $2\beta > \alpha$. Кроме того, так как $AI_a \cos\alpha = BI_b \cos\beta = CI_c \cos\gamma = p$, то $AI_a \geq BI_b \geq CI_c$ и достаточно доказать неравенство $AI_a < AC+BC$. Это можно сделать разными способами.

Первый способ. Заметим, что точка K, симметричная B относительно внешней биссектрисы CI_a, лежит на прямой AC, причем $CK = CB$. Так как BI_a — внешняя биссектриса угла B, имеем $\angle I_aKA = \angle I_aBC = \alpha+\gamma$, а так как $\angle I_aAK = \alpha$, то $\angle AI_aK = 2\beta + \gamma$ (рис.10.2.1). Поскольку $2\beta > \alpha$, получаем, что $\angle AKI_a < \angle AI_aK$, т.е. $AI_a < AK = AC + BC$.

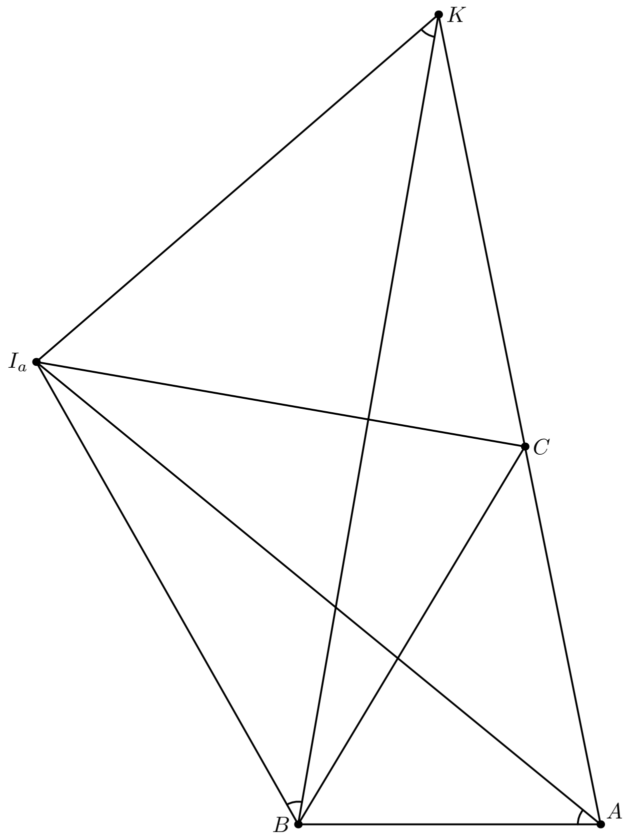

Рис. 10.2.1

Второй способ. Пусть T — точка касания вневписанной окружности с прямой AB, U — точка симметричная B относительно T. Так как $AT = p$, $AU = 2p-AB = AC+BC$. При этом в треугольнике AUI_a $\angle UAI_a = \alpha$, $\angle AUI_a = \angle I_aBT = \pi/2 - \beta$ и, значит, $\angle AI_aU = \pi/2 - \alpha + \beta$. Поскольку $2\beta > \alpha$, получаем, что $\angle AI_aU > \angle AUI_a$ и $AU > AI_a$ (рис.10.2.2).

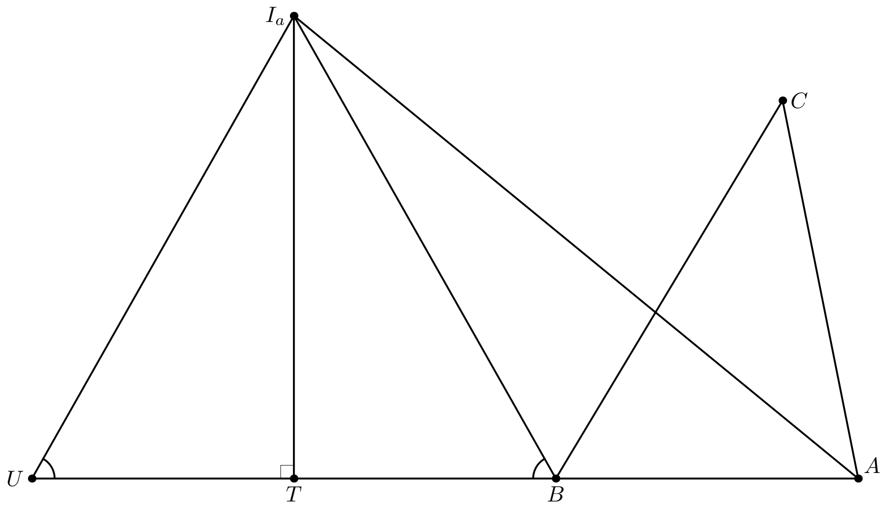

Рис. 10.2.2

Третий способ. Будем использовать следующие факты.

1. **Теорема о трезубце.** Центром окружности BCI_a является середина W дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC.

2. Пусть дана окружность, фиксирована ее хорда AB и точка X движется по одной из дуг AB. Тогда величина $AX + BX$ возрастает, когда X приближается к середине дуги.

Из теоремы о трезубце следует, что $AI_a = AW+WB$. Поскольку $\angle WBA - \angle WAB = 2\beta > 2(\alpha - \beta) = \angle CAB - \angle CBA$, точка C лежит ближе к середине дуги ACB, чем W. Следовательно, $AW + BW < AC + BC$.

Примечание. Фактически, мы доказали, что любой отрезок от вершины до центра соответствующей вневписанной окружности меньше суммы противолежащей стороны треугольника и наибольшей из прилежащих.

3. (А.Соколов) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ — окружности, описанные вокруг треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Обозначим через X_A произведение степени точки A относительно ω_A на площадь треугольника BCD. Аналогично определим X_B, X_C, X_D. Докажите, что $X_A + X_B + X_C + X_D = 0$.

Решение. Для вписанного четырехугольника утверждение очевидно. Заметим, что точка D лежит вне окружности ω_D тогда и только тогда, когда $\angle A + \angle C > \angle B + \angle D$, т.е. тогда и только тогда, когда C лежит внутри окружности ω_C. Таким образом, знаки чисел X_C и X_D противоположны.

Пусть прямая CD пересекает AB в точке P, а окружности ω_C, ω_D повторно — в точках C', D'. Тогда отношение площадей треугольников

ABC и ABD равно отношению их высот, которое, в свою очередь, равно $\frac{PC}{PD}$. Поскольку $PC \cdot PD' = PA \cdot PB = PC' \cdot PD$, это отношение равно $\frac{PC}{PD} = \frac{PC'}{PD'} = \frac{PC - PC'}{PD - PD'} = \frac{CC'}{DD'}$. С другой стороны, отношение абсолютных значений степеней точек C и D относительно соответствующих окружностей равно $\frac{CD \cdot CC'}{CD \cdot DD'} = \frac{CC'}{DD'}$ (рис.10.3). Следовательно, $|X_C| = |X_D|$ и $X_C + X_D = 0$. Аналогично $X_A + X_B = 0$.

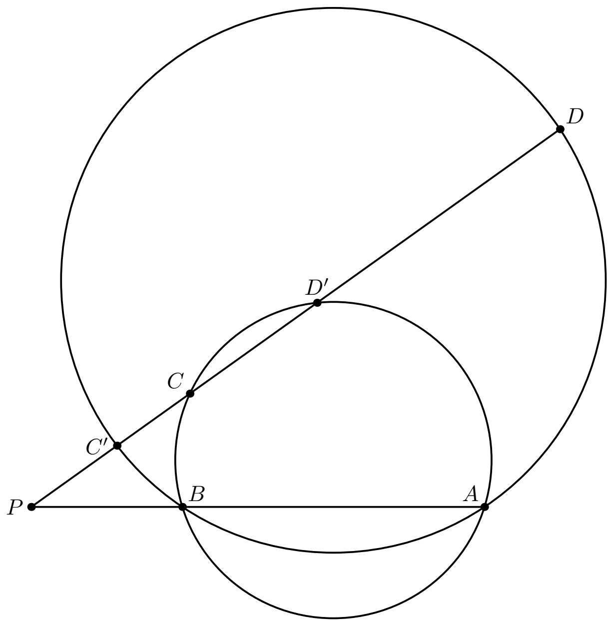

Рис. 10.3

Если $AB \parallel CD$, то $S_{ABC} = S_{ABD}$, $CC' = DD'$ и мы опять получаем, что $X_C + X_D = 0$.

Примечание. Равенство $|X_A| = |X_B| = |X_C| = |X_D|$ выполняется и для точек, не являющихся вершинами выпуклого четырехугольника.

4. (А.Заславский) На плоскости нарисованы неравнобедренный треугольник ABC и вписанная в него окружность ω. Пользуясь только линейкой и проведя не более восьми линий, постройте на ω такие точки A', B', C', что лучи $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ проходят через A, B, C соответственно.

Решение. Пусть A_0, B_0, C_0 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB. Тогда искомые точки A', B', C' таковы, что четырехугольники $A'A_0C'C_0$, $B'B_0A'A_0$ и $C'C_0B'B_0$ — гармонические. Сделаем проективное преобразование, сохраняющее ω и переводящее точку пересечения прямых AA_0, BB_0 CC_0 в ее центр. Оно переведет треугольник ABC в правильный. Тогда треугольники $A_0B_0C_0$ и $A'B'C'$

тоже будут правильными, а четырехугольник $A'A_0C'C_0$ будет равнобедренной трапецией. Пусть K — середина A_0C_0. Условие гармоничности $\angle C_0A'C' = \angle KA'A_0$ означает теперь, что $\angle KA'A_0 = \angle A_0C_0A'$, то есть что $\triangle KA'A_0 \sim \triangle A'C_0A_0$, откуда $\angle A'KA_0 = 2\pi/3$ и $A'K \parallel BC \parallel B_0C_0$ (рис.10.4).

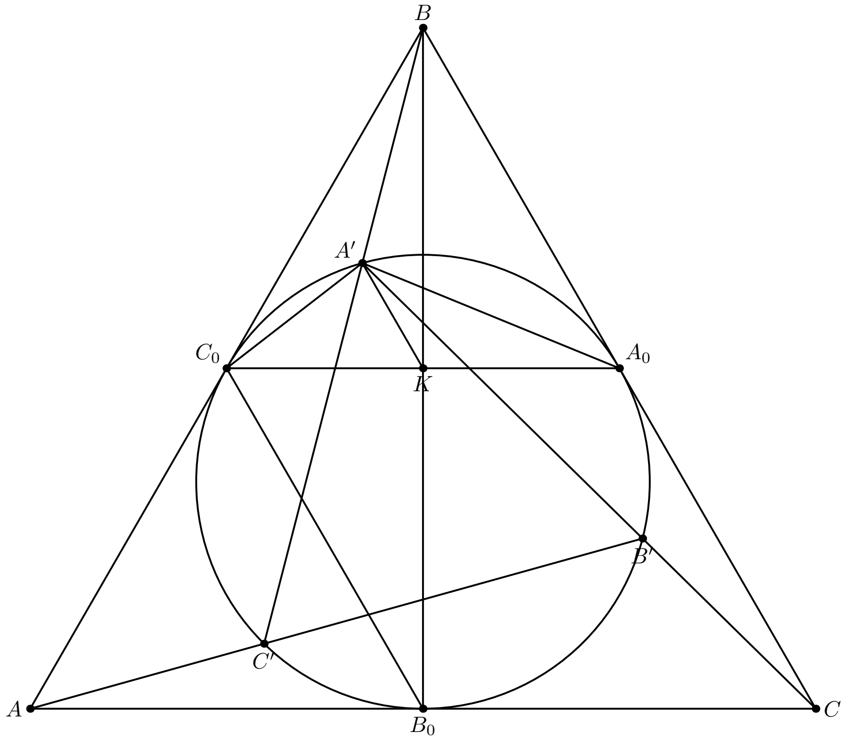

Рис. 10.4

Теперь, сделав обратное преобразование, получаем следующее построение.

1–2. Проведем прямые A_0C_0, BB_0 и найдем точку их пересечения K.

3–4. Проведем прямые BC и B_0C_0 и найдем точку их пересечения L.

5. Проведем прямую KL и найдем точку A' ее пересечения с дугой A_0C_0.

6. Проведем прямую CA' и найдем точку B' ее пересечения с ω.

7. Проведем прямую AB' и найдем точку C' ее пересечения с ω.

XIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Решения. Финал. Второй день. 10 класс

5. (А.Гаркавый) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB', CC'. Через A и C' проведены две окружности, касающиеся BC в точках P и Q. Докажите, что точки A, B', P, Q лежат на одной окружности.

Первое решение. Так как $BP^2 = BQ^2 = BA{\cdot}BC'$, а четырехугольники $AC'A'C$ и $AB'A'B$ (AA' — третья высота) вписанные, получаем, что $CP \cdot CQ = CB^2 - BP^2 = CB^2 - BA \cdot BC' = BC^2 - BC \cdot BA' = BC \cdot CA' = CA \cdot CB'$. Это, очевидно, равносильно утверждению задачи.

Второе решение. Пусть C_0 симметрична C' относительно B. Тогда $BC_0 \cdot BA = BC' \cdot BA = BP^2 = BP \cdot BQ$, то есть точки A, P, C_0, Q лежат на одной окружности ω. Пусть H_0 — точка этой окружности, диаметрально противоположная A. Тогда $H_0C_0 \perp BC$. Тогда точка, симметричная H_0 относительно B (т.е. середины PQ), лежит на высоте CC'; кроме того, она лежит на высоте AA' треугольника APQ. Значит, точка H_0 симметрична ортоцентру H треугольника ABC относительно B. Значит, $BH_0{\cdot}BB' = BH{\cdot}BB' = BC'{\cdot}BA = BC_0{\cdot}BA$, что и означает, что B' также лежит на ω (рис.10.5).

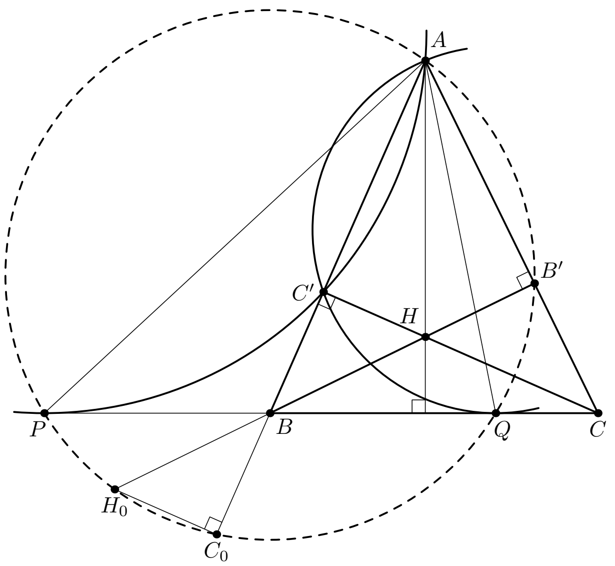

Рис. 10.5

Замечание. По сути, мы воспользовались тем известным фактом, что C' — проекция ортоцентра треугольника APQ на его медиану AB. Отсюда следует, что треугольники ABC и APQ имеют общий ортоцентр H.

6. (И.И.Богданов) Сфера, вписанная в пирамиду $SABC$, касается граней SAB, SBC, SCA в точках D, E, F соответственно. Найдите все возможные значения суммы углов SDA, SEB и SFC.

Ответ. 2π.

Решение. Поскольку треугольники SCE и SCF равны, $\angle SFC = \angle SEC$. Аналогично $\angle SEB = \angle SDB$ и $\angle SDA = \angle SFA$. Поэтому $\angle SDA + \angle SEB + \angle SFC = \angle SFA + \angle SDB + \angle SEC = \frac{6\pi - (\angle ADB + \angle BEC + \angle CFA)}{2}$. Но углы ADB, BEC, CFA равны углам, под которыми стороны грани ABC видны из точки ее касания с вписанной сферой, следовательно, их сумма равна 2π.

Примечание. Можно показать, что для любой грани пирамиды набор углов, под которыми ее ребра видны из точки касания, один и тот же.

7. (И.Фролов) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Γ. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые BC и AD пересекаются в точке Q. Докажите, что окружности PIQ и Γ перпендикулярны.

Решение. Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, биссектрисы углов между его противоположными сторонами перпендикулярны, т.е. $\angle PIQ = 90°$ и PQ — диаметр окружности PIQ. Пусть R — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Тогда окружность PIQ пересекает PR в такой точке S, что $PR \perp QS$. Поскольку PR — поляра Q относительно Γ, точки Q и S инверсны относительно этой окружности, а значит, проходящая через них окружность перпендикулярна Γ (рис.10.7).

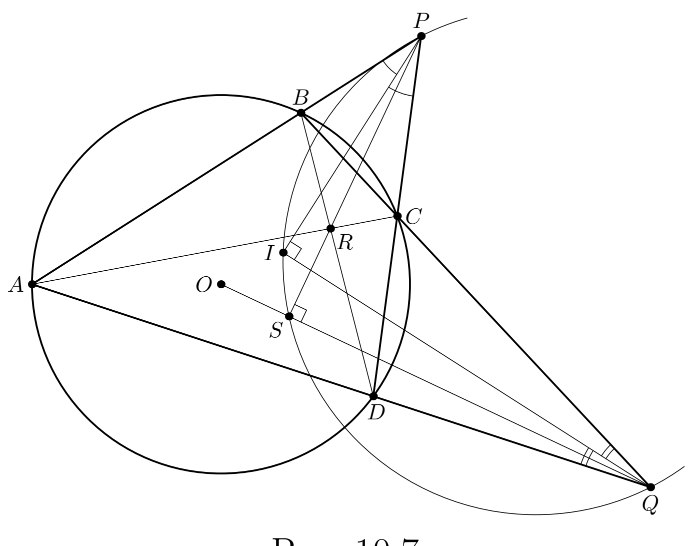

Рис. 10.7

Примечание. Утверждение задачи остается верным для любого вписанного четырехугольника, если определить точку I как пересечения биссектрис углов APC и AQC.

8. (M.Saghafian, Иран; И.И.Богданов) Дано конечное множество точек плоскости S такое, что $|S|$ четно и никакие три точки из S не лежат на одной прямой. Докажите, что S можно разбить на два множества X и Y так, что выпуклые оболочки $\operatorname{conv}(X)$ и $\operatorname{conv}(Y)$ имеют поровну вершин.

   Решение. Обозначим через $k(X)$ число вершин выпуклой оболочки $\operatorname{conv}(X)$ множества X.

   Пусть $A = A_1A_2\dots A_n = \operatorname{conv} S$, а T — множество всех точек из S, лежащих строго внутри A. Рассмотрим множества $X_i = \{A_1, \dots, A_i\} \cup T$, $Y_i = \{A_{i+1}, \dots, A_n\}$.

   Найдем наименьшее i, для которого $k(X_i) \geq k(Y_i)$. Очевидно, $i < n$. Если $i = 0$, можно выбрать такое подмножество $T' \subseteq T$, что $k(T') = n$ (исключая точки из T по одной). Тогда $T' \sqcup (S \setminus T')$ — искомое разбиение.

   Пусть теперь $1 \leq i \leq n-1$. В силу минимальности i имеем

$$k(X_i) - 1 \leq k(X_{i-1}) \leq k(Y_{i-1}) - 1 \leq k(Y_i).$$

   Значит, или $k(X_i) = k(Y_i)$ (и требуемое разбиение найдено), или

$$k(X_i) - 1 = k(X_{i-1}) = k(Y_{i-1}) - 1 = k(Y_i).$$

   Рассмотрим последний случай.

   Пусть $X = X_i$, $Y = Y_i$. Так как $k(X) + k(Y)$ нечетно, найдется хотя бы одна точка $M \in X$, не лежащая на границах множеств $\operatorname{conv} X$ и $\operatorname{conv} Y$. Если есть такая точка M, не лежащая внутри $\operatorname{conv} Y$, то, перенеся ее из X в Y, получим искомое разбиение. Пусть теперь все такие точки лежат внутри $\operatorname{conv} X \cap \operatorname{conv} Y$. Тогда это пересечение непусто.

   Положим $X' = X \setminus \operatorname{conv} Y$. Все точки X' лежат на границе $\operatorname{conv} X$ (поскольку все внутренние точки $\operatorname{conv} X$ лежат также внутри $\operatorname{conv} Y$), значит, $k(X') < k(X)$ и $k(X') \leq k(Y)$. Если $k(X') = k(Y)$, то X' и $S \setminus X'$ задают искомое разбиение. В противном случае будем добавлять к X' точки из $X \cap \operatorname{conv} Y$, пока не получим такое множество X'', что $k(X'') = k(Y)$. Множества X'' и $S \setminus X''$ задают искомое разбиение.