Тринадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (А.Заславский) (8) Нарисуйте на клетчатой бумаге четырехугольник с вершинами в узлах, длины сторон которого — различные простые числа.

   Решение. Условию удовлетворяет, например, четырехугольник с вершинами в точках $A(-3,0)$, $B(0,4)$, $C(12,-1)$, $D(12,-8)$. Его стороны $AB=5$, $BC=13$, $CD=7$, $DA=17$.

2. (Л.Штейнгарц, Израиль) (8) Окружность отсекает от прямоугольника $ABCD$ четыре прямоугольных треугольника, середины гипотенуз которых A_0, B_0, C_0 и D_0 соответственно. Докажите, что отрезки A_0C_0 и B_0D_0 равны.

   Решение. Пусть окружность пересекает стороны AB, BC, CD, DA в точках K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2. Тогда $K_1K_2M_2M_1$ — равнобокая трапеция, т.е. $AK_1-DM_1=BK_2-CM_2$ или $AK_1+CM_2=BK_2+DM_1$. Значит, проекции отрезков A_0C_0 и B_0D_0 на AB, равные соответственно $AB-(AK_1+CM_2)/2$ и $AB-(BK_2+DM_1)/2$, равны между собой. Аналогично равны проекции этих отрезков на BC, а следовательно и сами отрезки.

3. (М.Плотников, Украина) (8) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC; H_B, H_C — ортоцентры треугольников ACI и ABI соответственно; K — точка касания вписанной окружности треугольника со стороной BC. Докажите, что точки H_B, H_C и K лежат на одной прямой.

   Решение. Так как прямые BH_B и CH_C перпендикулярны AI, четырехугольник BH_BCH_C — трапеция и ее диагонали делят друг друга в отношении $BH_B:CH_C$. Поскольку проекции M, N точек H_B, H_C на AB и AC соответственно совпадают с проекциями I на эти прямые, то $BM=BK$ и $CN=CK$. Кроме того, так как $\angle H_BBM=\angle H_CCN=90^\circ-\angle A/2$, то прямоугольные треугольники H_BBM и H_CCN подобны. Следовательно, $BH_B:CH_C=BK:CK$ и точка пересечения диагоналей трапеции совпадает с K (рис. 3).

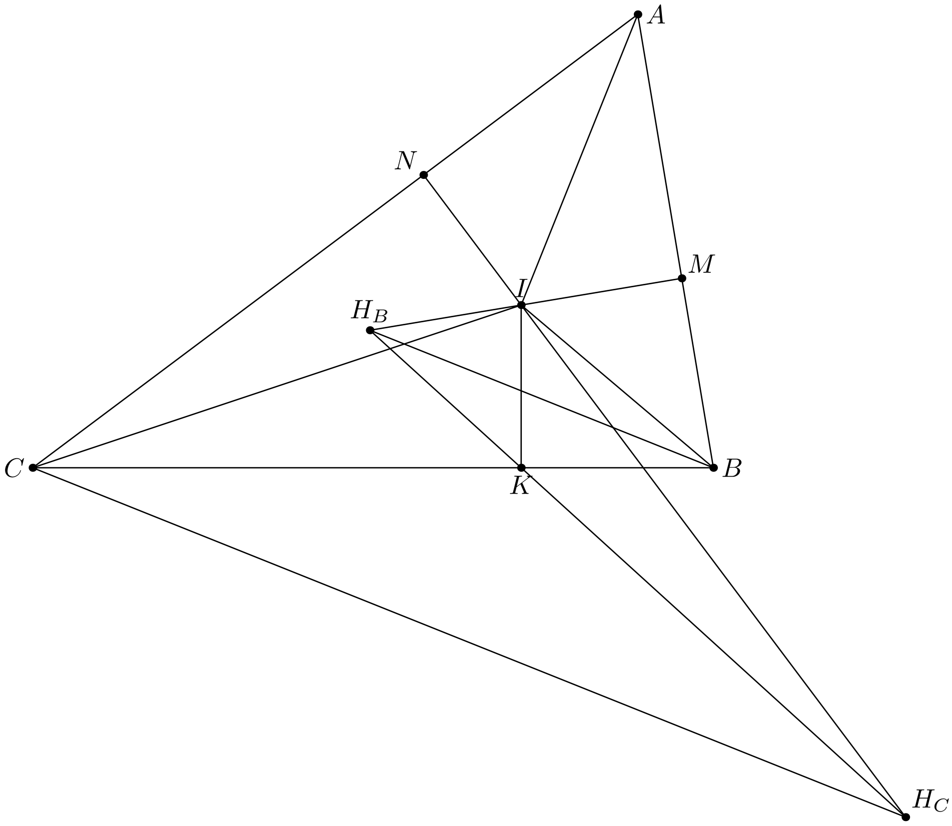

Рис. 3

4. (А.Заславский) (8) Дан треугольник ABC. На стороне AB как на основании построен во внешнюю сторону равнобедренный треугольник ABC' с углом при вершине 120°, а на стороне AC построен во внутреннюю сторону правильный треугольник ACB'. Точка K — середина отрезка BB'. Найдите углы треугольника KCC'.

   Ответ. 90°, 30°, 60°.

   Решение. Пусть C'' — вершина параллелограмма $B'C'BC''$. Тогда $B'C'' = BC' = AC'$, $B'C = AC$ и $\angle CB'C'' = \angle CAC'$, поскольку угол между прямыми $C''B'$ и AC' равен углу $\angle B'CA = 60^\circ$. Следовательно, треугольники $C''B'C$ и $C'AC$ равны, причем угол между их соответственными сторонами $C''C$ и $C'C$ равен 60° (рис. 4). Значит, треугольник $CC'C''$ — равносторонний, а так как K — середина $C'C''$, то $CK \perp C'K$ и $\angle C'CK = 30^\circ$.

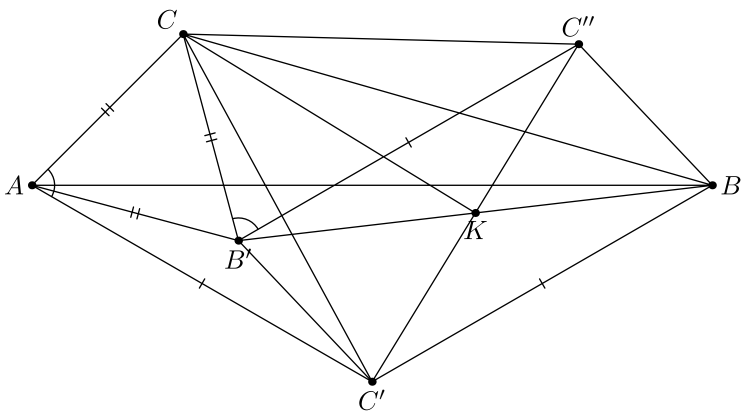

Рис. 4

Это же рассуждение можно изложить по-другому. Композиция поворотов вокруг C' на 120° и C на 60° переводит B в B' и, значит, является центральной симметрией относительно K. При этой композиции C переходит в C'', откуда получаем указанный ответ.

5. (Б.Френкин) На плоскости дан отрезок AB. Рассмотрим всевозможные остроугольные треугольники со стороной AB. Найдите геометрическое место

   а) (8) вершин их наибольших углов;

   б) (8–9) их центров вписанных окружностей.

   Ответ. а) Точки A, B, а также множество точек, лежащих внутри или на границе пересечения двух кругов с центрами в A и B и радиусами AB, но вне круга с диаметром AB. б) Множество точек, лежащих внутри квадрата $AKBL$, но вне пересечения двух кругов с центрами K и L и радиусами KA.

   Решение. а) Если вершина наибольшего угла не совпадает ни с одной из точек A и B, то AB — наибольшая сторона соответствующего треугольника ABC, т.е. $CA \leq AB$ и $CB \leq AB$. С другой стороны, так как угол C острый, C лежит вне круга с диаметром AB.

   б) Пусть I — инцентр треугольника ABC. Так как углы A и B острые, то $\angle IAB < 45^\circ$ и $\angle IBA < 45^\circ$, т.е. I лежит внутри квадрата $AKBL$. С другой стороны, так как угол C острый, то $\angle AIB < 135^\circ$ и I лежит вне пересечения кругов с центрами K, L и радиусами KA.

   Непонятно, входят ли в ГМТ границы — 6 баллов.

6. (Н.Москвитин) (8–9) Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AC = BD = AD$; точки E и F — середины AB и CD соответственно; O — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Докажите, что EF проходит через точки касания вписанной окружности треугольника AOD с его сторонами AO и OD.

   Решение. Пусть X, Y, Z — точки касания вписанной окружности со сторонами AO, OD, AD соответственно. Тогда $DY = DZ$ и, значит, $BY = AZ = AX$. Кроме того, $OX = OY$. Применив теорему Менелая к треугольнику AOB и прямой XY, получим, что эта прямая проходит через E. Аналогично она проходит через F (рис. 6).

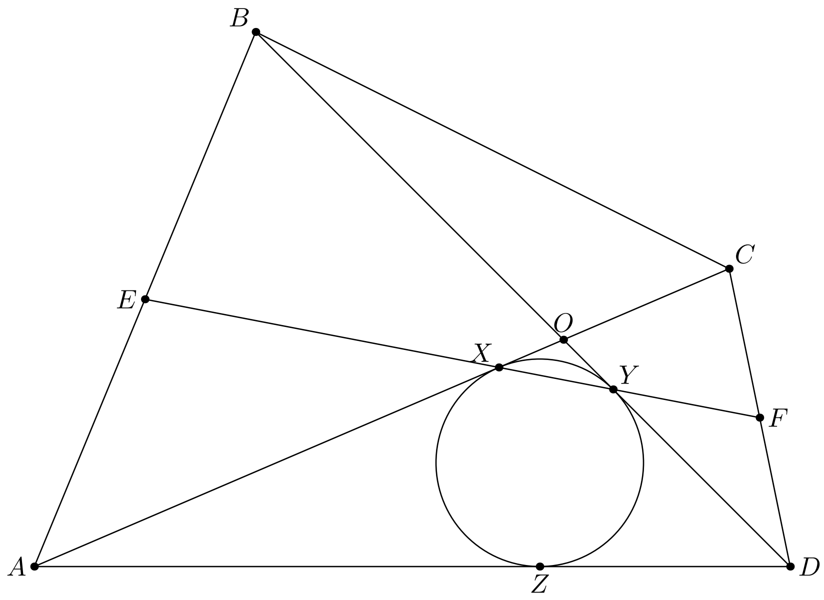

Рис. 6

7. (Б.Френкин) (8–9) В треугольнике центр описанной окружности лежит на вписанной окружности. Докажите, что отношение наибольшей стороны треугольника к наименьшей меньше двух.

   Первое решение. Так как центр описанной окружности принадлежит данному треугольнику ABC, этот треугольник не может быть тупоугольным. Если он прямоугольный, то центр описанной окружности O лежит в середине гипотенузы, и она совпадает с точкой касания вписанной окружности. Значит треугольник прямоугольный равнобедренный и утверждение задачи выполняется. Поэтому будем считать, что треугольник остроугольный и O лежит на одной из трех дуг между точками касания. Пусть эта дуга обращена к вершине A. Опустим из O перпендикуляры на AB и AC. Основание каждого из них (середина стороны) лежит между A и точкой касания вписанной окружности ω со стороной. Следовательно, $AB > BC$ и $AC > BC$.

   Теперь достаточно доказать, что отношение любой из сторон AB, AC к BC меньше 2. Пусть, например, D — середина AB. Надо показать, что $AD < BC$. Пусть K и L — точки касания ω с AB и BC. Тогда $BK = BL$, и надо доказать, что $DK < CL$. Но перпендикуляр из D к AB попадает в точку O на ω, поэтому DK не больше ее радиуса. С другой стороны, CL больше ее радиуса, так как перпендикуляр из C к BC не имеет общих точек с ω (BC образует острый угол с касательной CA). Что и требовалось.

   Второе решение. Воспользуемся формулой Эйлера: $OI^2 = R^2 - 2Rr$, где I — центр вписанной окружности, R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Так как $OI = r$, из формулы Эйлера получаем, что $r/R = \sqrt{2} - 1$. Каждая из сторон треугольника является хордой описанной окружности, касающейся вписанной. Максимальная из таких хорд равна $2R$, а минимальная, касающаяся вписанной окружности в точке, противоположной O, равна $2\sqrt{R^2 - 4r^2} > R$.

8. (Е.Бакаев) (8–9) Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой BD. Докажите, что центр описанной

окружности треугольника ABD лежит на прямой AC.

Решение. Пусть серединный перпендикуляр к AB пересекает BD и AC с точках K и L соответственно. Тогда из условия задачи следует, что $\angle BLK = \angle ACB = \angle CAD$. Значит, $\angle CKL = \angle BDA$, что равносильно утверждению задачи (рис. 8).

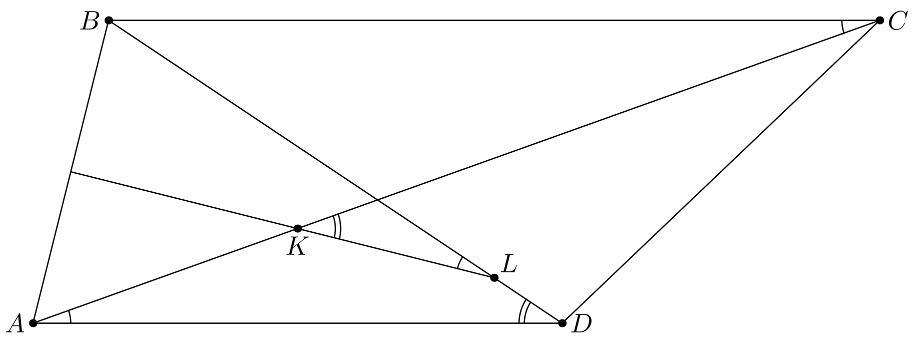

Рис. 8

9. (А.Заславский) (8–9) В прямоугольном треугольнике ABC точка C_0 — середина гипотенузы AB; AA_1, BB_1 — биссектрисы; I — центр вписанной окружности. Докажите, что прямые C_0I и A_1B_1 пересекаются на высоте из вершины C.

Решение. Воспользуемся следующим фактом (верным для любого треугольника).

Лемма. Прямая C_0I пересекает высоту CH в точке, лежащей на расстоянии r от вершины C.

Действительно, пусть C', C'' — точки касания стороны AB с вписанной и вневписанной окружностями соответственно, а C_2 — точка вписанной окружности, диаметрально противоположная C'. Точка C — центр гомотетии вписанной и вневписанной окружностей, при этом C_2 и C'' — соответствующие („верхние“) точки окружностей, значит C, C_2, C'' лежат на одной прямой. Кроме того, $C'C_0 = C''C_0$, т.е. C_0I — средняя линия треугольника $C'C''C_2$ и $C_0I \parallel CC_2$. Значит, прямые CC_2, C_2I, C_0I и CH образуют параллелограмм, откуда и следует утверждение леммы (рис. 9.1).

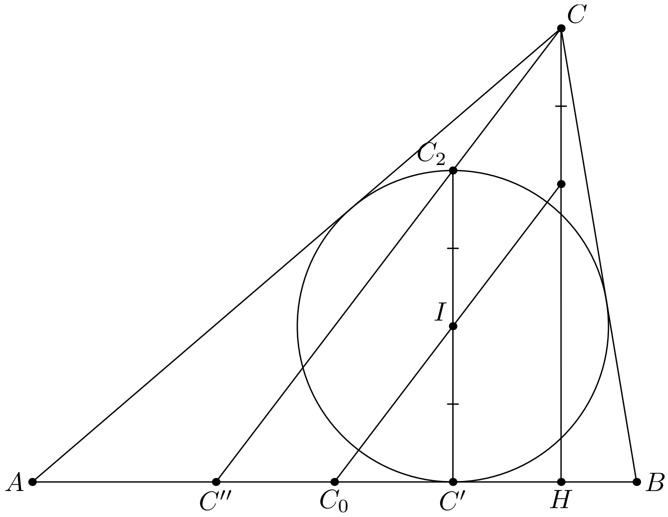

Рис. 9.1

Вернемся к задаче. Обозначим точку пересечения C_0I и CH через H' (рис. 9.2). Так как $CH' = r$, расстояния от H' до прямых CA, BC и AB равны соответственно $d_b = r\cos\angle HCB = r\cos\angle BAC = r \cdot AC/AB$, $d_a = r \cdot BC/AB$ и $d_c = CH - r$. Поскольку удвоенная площадь треугольника равна $(AB + BC + CA)r = AB \cdot CH$, из этих равенств следует, что $d_c = d_a + d_b$. Очевидно, что этим свойством обладают также расстояния от точек A_1, B_1 до прямых BC, CA и AB. Из теоремы Фалеса следует, что все точки, обладающие этим свойством, лежат на прямой A_1B_1.

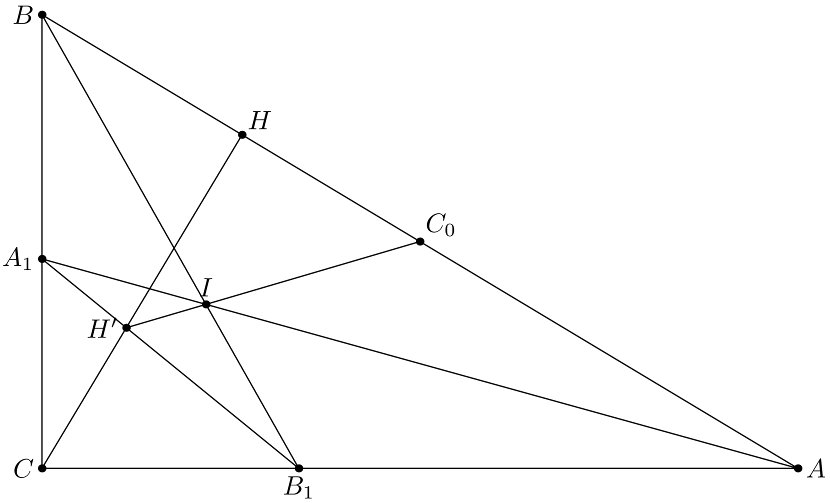

Рис. 9.2

10. (И.И.Богданов) (8–10) На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки K и L соответственно так, что $\angle AKD = \angle CLD$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BKL, равноудален от A и C.

    Решение. Треугольники AKD и CLD подобны по двум углам, следовательно, $AK : CL = AD : CD$. Поэтому, если точка K движется с постоянной скоростью по AB, то L также равномерно движется по BC, а значит, и центр описанной окружности треугольника BKL движется по прямой. Если K, L — проекции D на AB и BC соответственно, то центр окружности BKL совпадает с центром параллелограмма, а когда K и L совпадают соответственно с A и C, центр лежит на серединном перпендикуляре к AC. Таким образом, этот перпендикуляр и будет геометрическим местом центров.

11. (А.Толесников) (8–11) На плоскости отмечено несколько точек, причем не все эти точки лежат на одной прямой. Вокруг каждого треугольника с вершинами в отмеченных точках описана окружность. Могут ли центры всех этих окружностей оказаться отмеченными точками?

    Ответ. Нет.

    Решение. Рассмотрим наименьшую из окружностей. Пусть она описана вокруг треугольника ABC, а O — ее центр. Если треугольник ABC не равносторонний, то какой-то из его углов, например угол C, меньше $60°$. Но тогда $60° < \angle AOB < 120°$, т.е. $\sin\angle AOB > \sin\angle ACB$ и по теореме синусов радиус окружности AOB меньше радиуса окружности ABC, что противоречит определению этой окружности. Если же треугольник ABC правильный, то вместе с точками A, B, C, O отмеченными будут центры A', B', C' окружностей BOC, COA, AOB. Но, например, треугольник AOB' правильный, причем его сторона, а значит, и радиус описанной окружности меньше, чем у треугольника ABC.

12. (Д.Швецов) (9–10) Пусть AA_1, CC_1 — высоты треугольника ABC, B_0 – точка пересечения высоты из вершины B и описанной окружности треугольника ABC, Q – вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и $A_1C_1B_0$. Докажите, что BQ — симедиана треугольника ABC.

    Решение. Так как точки A, C, A_1, C_1 лежат на одной окружности, прямые AC, A_1C_1 и B_0Q пересекаются в одной точке — радикальном центре N окружностей ACA_1C_1, ABC и $A_1C_1B_0$. Пусть BQ пересекает AC и A_1C_1 в точках P и M соответственно (рис. 12). Проецируя окружность ABC из точки Q на прямую AC, а затем эту прямую из точки B на A_1C_1, получаем равенство двойных отношений $(A_1C_1MN) = (CAPN) = (CABB_0) = \frac{BC}{BA} : \frac{B_0C}{B_0A}$. Поскольку B_0 симметрична ортоцентру H треугольника ABC относительно AC, вторая дробь равна $HC/HA = CA_1/AC_1$. Теперь, применяя теорему Менелая к треугольнику A_1BC_1 и прямой ACN, получаем, что $A_1C_1MN = C_1N/A_1N$, т.е. $A_1M = C_1M$. Следовательно, BM — медиана треугольника A_1BC_1 и симедиана треугольника ABC.

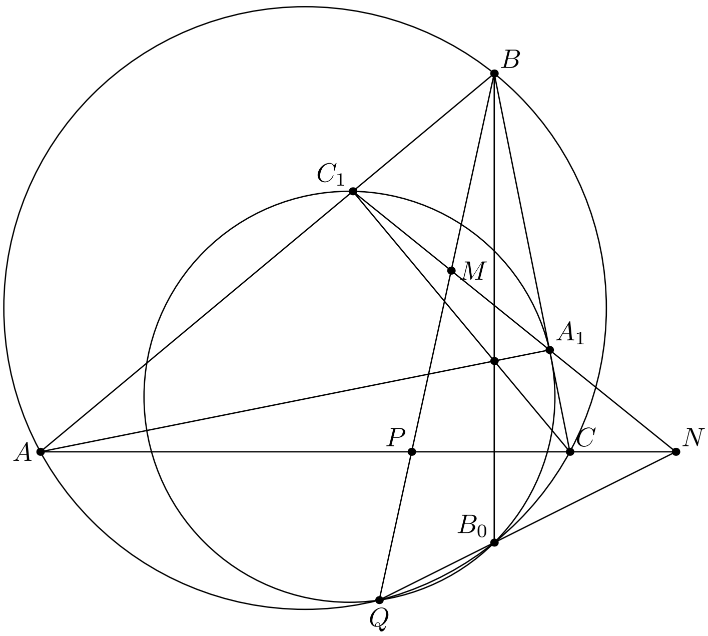

Рис. 12

13. (А.Заславский) (9–11) Две окружности пересекаются в точках A и B. Третья окружность касается их обеих и пересекает прямую AB в точках C и D. Докажите, что касательные к ней в этих точках параллельны общим касательным к двум первым окружностям.

    Решение. Пусть третья окружность касается двух первых в точках X, Y, а общая касательная — в точках U, V (X и U на одной окружности). Так как X — центр гомотетии касающихся окружностей, прямая XU пересекает третью окружность в точке P, касательная в которой параллельна UV. Аналогично прямая YV проходит через P. Кроме того, точки X, Y, U, V лежат на одной окружности, так что $PX \cdot PU = PY \cdot PV$. Следовательно, P лежит на прямой AB и, значит, совпадает с одной из точек C, D (рис. 13). Для второй точки доказательство аналогично.

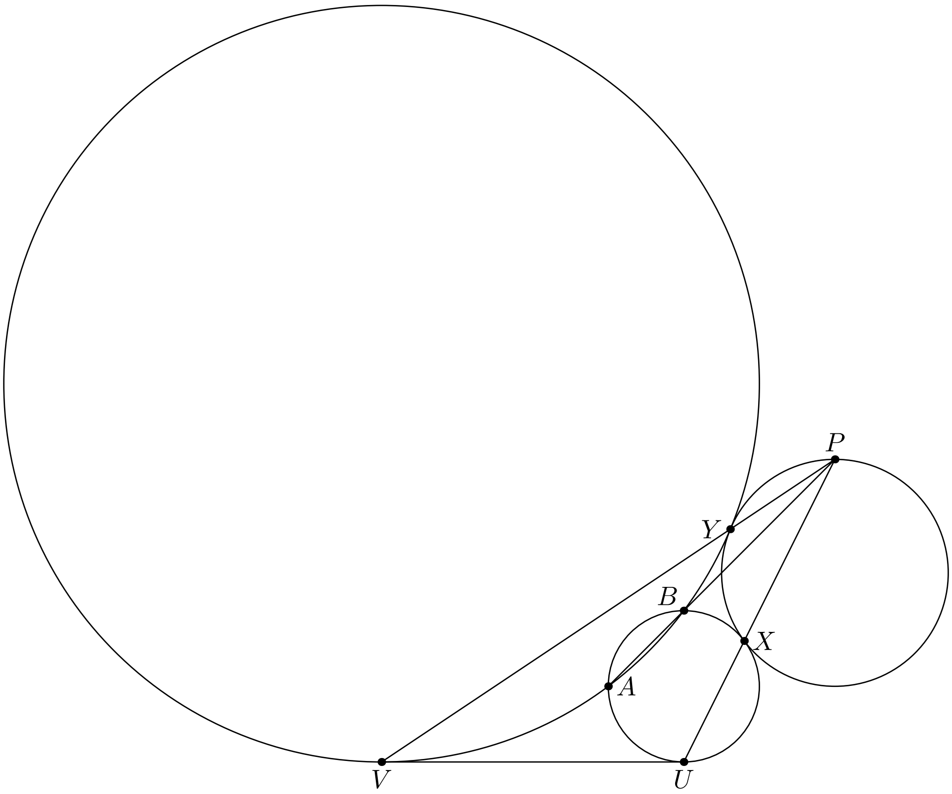

Рис. 13

14. (Н.Москвитин) (9–11) На окружности с диаметром AD и центром O выбраны точки B и C по одну сторону от этого диаметра. Около треугольников ABO и CDO описаны окружности, пересекающие отрезок BC в точках F и E. Докажите, что $R^2 = AF{\cdot}DE$, где R — радиус окружности.

Решение. Из вписанности четырехугольника $ABFO$ и равенства $AO = OB$ получаем (рис.14)

$$\frac{AF}{AO} = \frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle ABO} = \frac{\sin\angle ABF}{\sin\angle ABO} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAD}.$$

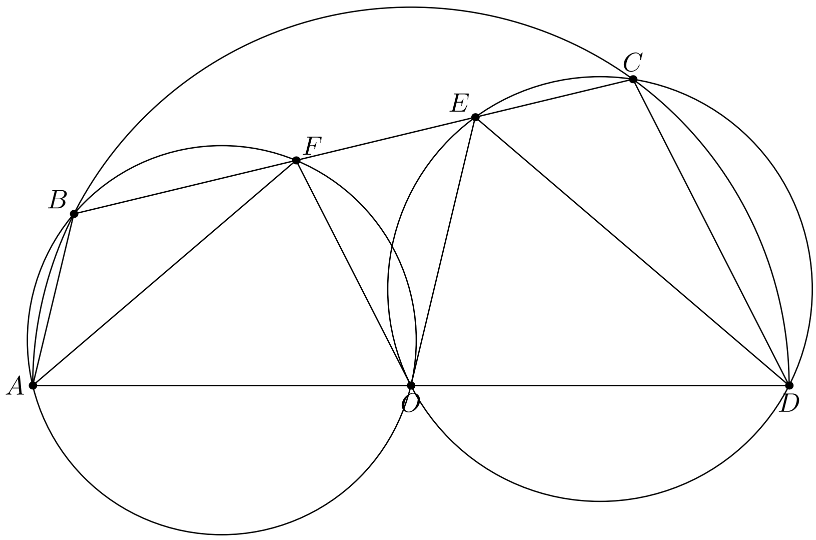

Рис. 14

Аналогично, $DE/OD = \sin\angle BCD/\sin\angle CDA$. Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, произведение этих отношений равно 1.

15. (К.Алексиев, Болгария) (9–11) В остроугольный треугольник ABC вписана окружность с центром I, касающаяся сторон AB, BC и CA в точках D, E и F соответственно. В четырехугольники $ADIF$ и $BDIE$ вписаны окружности с центрами J_1 и J_2 соответственно. Прямые J_1J_2 и AB пересекаются в точке M. Докажите. что $CD \perp IM$.

Решение. Так как DJ_1, DJ_2 — биссектрисы треугольников DIA, DIB соответственно, $AJ_1/J_1I = AD/ID$, $IJ_2/J_2B = CI/CB$. По теореме Менелая получаем, что четверка A, B, C, M гармоническая, т.е. M лежит на прямой FE (рис.15). Поскольку C и D — полюсы прямых EF и AB относительно вписанной окружности, то M — полюс прямой CD, следовательно, $CD \perp IM$.

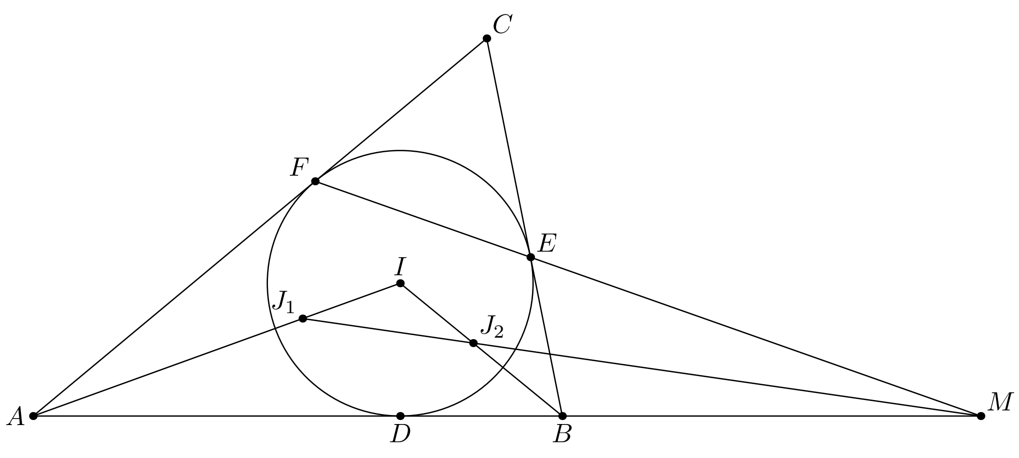

Рис. 15

16. (П.Рябов) (9–11) Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и B пересекаются в точке D. Окружность, проходящая через проекции D на прямые BC, CA, AB, повторно пересекает AB в точке C'. Аналогично строятся точки A', B'. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

Решение. Педальная окружность точки D совпадает с педальной окружностью изогонально сопряженной точки D', которая является вершиной параллелограмма $ACBD'$. Следовательно, C' — проекция D' на AB, т.е. точка, симметричная основанию высоты из C относительно середины AB. Аналогично получаем, что A', B' симметричны основаниям высот из A и B относительно середин соответствующих сторон. Значит, AA', BB' и CC' пересекаются в точке, изотомически сопряженной ортоцентру треугольника.

17. (А.Тригуб, Украина) (9–11) Внутри остроугольного треугольника ABC постройте (с помощью циркуля и линейки) такую точку K, что $\angle KBA = 2\angle KAB$ и $\angle KBC = 2\angle KCB$.

Решение. Пусть окружность с центром K и радиусом KB пересекает AB и BC в точках P и Q соответственно, а T — середина дуги ABC описанной около треугольника окружности. Тогда $\angle KPB = \angle KBP = 2\angle KAP$, следовательно, $\angle KAP = \angle PKA$ и $AP = PK = KB$. Аналогично $CQ = QK = KB$. Поскольку $AP = CQ$, $AT = CT$ и $\angle PAT = \angle QCT$, треугольники TAP и TCQ равны, т.е. $\angle TPB = \angle TQB$ и точка T лежит на окружности BPQ. Значит, центр K этой окружности лежит на серединном перпендикуляре к BT. Кроме того, из условия задачи следует, что $\angle AKC = 3\angle B/2$, т.е. K лежит на соответствующей дуге (рис.17).

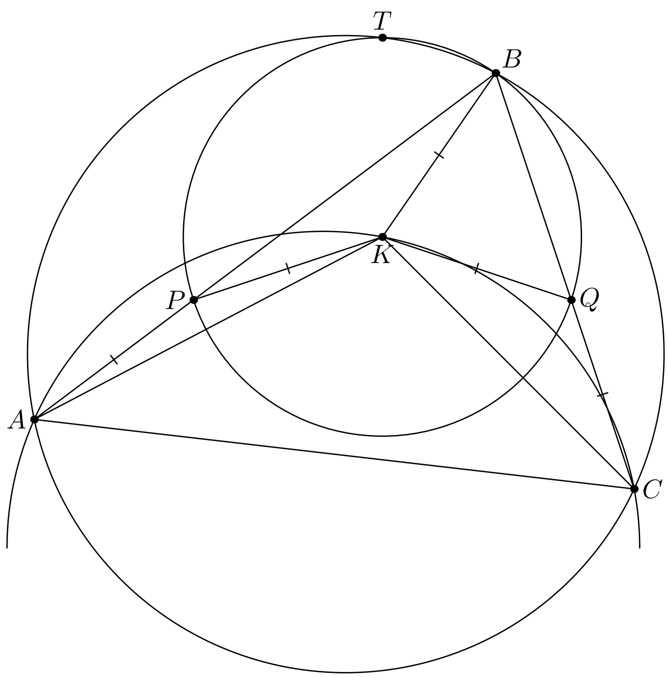

Рис. 17

Докажем теперь, что построенная таким образом точка K действительно удовлетворяет условию. Вновь обозначая точки пересечения окружности с центром K и радиусом KB со сторонами через P и Q, получаем, поскольку эта окружность проходит через T, что $AP = CQ$. Если, например, $AP > PK = KB$, то $\angle PKA > \angle PAK$, $\angle KPB = \angle KBP > 2\angle BAK$, $\angle KBC > 2\angle KCB$ и $\angle AKC < 3\angle B/2$, что противоречит построению точки K. Аналогично, при $AP < PK$ получаем $\angle AKC > 3\angle B/2$.

18. (А.Тригуб) (9–11) Пусть L — точка пересечения симедиан остроугольного треугольника ABC, а BH — его высота. Известно, что $\angle ALH = 180^\circ - 2\angle A$. Докажите, что $\angle CLH = 180^\circ - 2\angle C$.

    Решение. Пусть AA_1, CC_1 — высоты треугольника. Тогда симедианы AL, CL являются медианами треугольников AC_1H, CA_1H, т.е проходят через середины M, N отрезков HC_1, HA_1 соответственно. Но $\angle MNH = \angle C_1A_1H = 180^\circ - 2\angle A$, следовательно, условие $\angle ALH = 180^\circ - 2\angle A$ равносильно вписанности четырехугольника $HLMN$, как и условие $\angle CLH = 180^\circ - 2\angle C$.

19. (Д.Прокопенко) (10–11) В треугольнике ABC провели чевианы AA', BB' и CC', которые пересекаются в точке P. Описанная окружность треугольника $PA'B'$ пересекает прямые AC и BC в точках M и N соответственно, а описанные окружности треугольников $PC'B'$ и $PA'C'$ повторно пересекают AC и BC соответственно в точках K и L. Проведем через середины отрезков MN и KL прямую c. Прямые a и b определяются аналогично. Докажите, что прямые a, b и c пересекаются в одной точке.

    Решение. Из условия следует, что $CM \cdot CB' = CN \cdot CA'$ и $CK \cdot CB' = CP \cdot CC' = CL \cdot CA'$. Поэтому $KL \parallel MN$ и прямая c проходит через C. Так как MN и $A'B'$ антипараллельны, эта прямая является симедианой треугольника $CA'B'$ и, значит, делит угол C на части, синусы которых относятся, как $CB' : CA'$. Из аналогичных соотношений для двух других углов и теоремы Чевы получаем утверждение задачи.

20. (В.Лучкин, М.Фадин) (10–11) Даны прямоугольный треугольник ABC и две взаимно перпендикулярные прямые x и y, проходящие через вершину прямого угла A. Для точки X, движущейся по прямой x, определим y_B как образ прямой y при симметрии относительно XB, а y_C — как образ прямой y при симметрии относительно XC. Пусть y_b и y_c пересекаются в точке Y. Найдите геометрическое место точек Y (для несовпадающих y_b и y_c).

    Решение. Рассмотрим точку X', изогонально сопряженную X, и точки U, V, W, симметричные X' относительно AB, AC, BC. Из перпендикулярности прямых x и y получаем, что точки U, V лежат на y. Кроме того, прямые XB, XC являются серединными перпендикулярами к отрезкам UW, VW. Следовательно, W лежит на прямых y_b, y_c, т.е. совпадает с Y (рис.20). Таким образом, Y лежит на прямой, симметричной относительно BC изогональному образу прямой x. Чтобы получить искомое ГМТ, надо выколоть из этой прямой точки, для которых y_b и y_c совпадают, т.е. точку ее пересечения с BC и точку, симметричную A относительно BC.

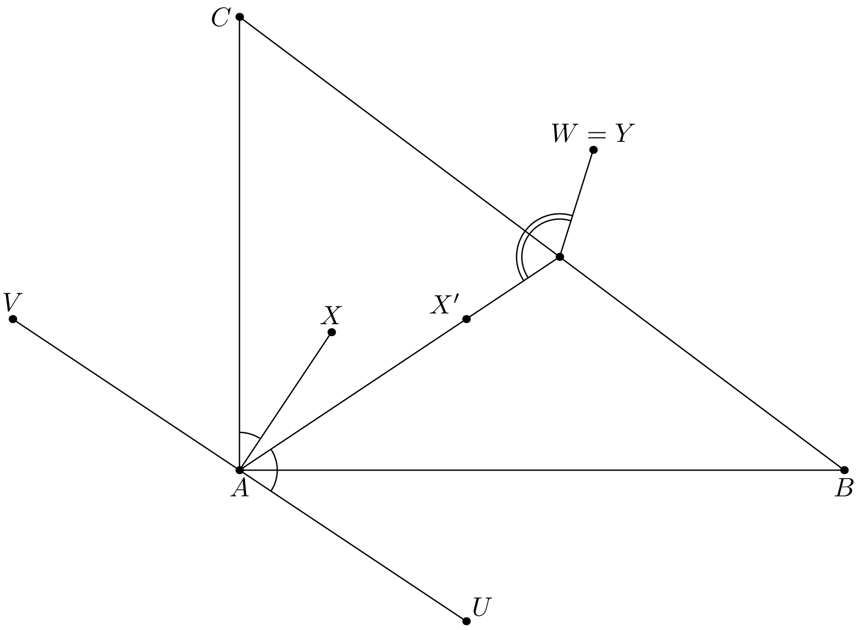

Рис. 20

21. (Н.Белухов, Болгария) (10–11) Выпуклый шестиугольник описан около окружности радиуса 1. Рассмотрим три отрезка, соединяющие середины противоположных сторон шестиугольника. Для какого наибольшего r можно утверждать, что хотя бы один из этих отрезков не короче r?

Решение. Пусть шестиугольник $A_1A_2\dots A_6$ описан около окружности ω с центром I, а M_i — середина A_iA_{i+1} (считаем, что $A_7 \equiv A_1$).

Если взять точки A_1, A_2, A_3 близкими к вершинам правильного треугольника, а A_4, A_5, и A_6 — близкими к середине A_1A_3, то длины отрезков M_1M_4, M_2M_5 и M_3M_6 будут близки к $\sqrt{3}$.

Докажем, что $r = \sqrt{3}$, действительно, является ответом. Прежде всего отметим, что I лежит внутри $M_1M_2\dots M_6$. Действительно, если I лежит, например, внутри треугольника $M_1A_1M_6$, то ω лежит внутри $A_2A_1A_6$ и не может касаться всех сторон шестиугольника $A_1A_2\dots A_6$.

Обозначим через $\angle(ABCD)$ угол, на который надо повернуть $\overrightarrow{AB}$ вокруг A против часовой стрелки, чтобы получить вектор, сонаправленный с $\overrightarrow{CD}$.

Так как M_i лежит вне ω, то $IM_i \geq 1$. Значит, если $120^\circ \leq \angle(IM_iIM_{i+3}) \leq 240^\circ$ для некоторого i, то $M_iM_{i+3} \geq \sqrt{3}$.

Предположим, что это условие не выполнено ни для какого i. Пусть j таково, что $\angle(IM_jIM_{j+3}) \leq 120^\circ$ и $\angle(IM_{j+3}IM_j) \geq 240^\circ$. Тогда найдется такое k, $j \leq k \leq j+2$, что $\angle(IM_kIM_{k+3}) \leq 120^\circ$ и $\angle(IM_{k+1}IM_{k+4}) \geq 240^\circ$. Без ограничения общности можно считать, что $k = 4$. Тогда $120^\circ \leq \angle(IM_1IM_2) \leq 180^\circ$ и, значит, $M_1M_2 \geq \sqrt{3}$.

Рассмотрим выпуклый четырехугольник $M_1M_2M_4M_5$. Если угол M_1 не острый, то $M_2M_5 > M_1M_2 \geq \sqrt{3}$. Если угол M_2 не острый, то $M_1M_4 > M_1M_2 \geq \sqrt{3}$. Пусть оба угла M_1 и M_2 острые. Тогда $90^\circ < \angle(M_1M_2M_4M_5) < 270^\circ$. Так как $\overrightarrow{M_3M_6} = -\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_4M_5}$ (потому что $\overrightarrow{M_3M_6} = \overrightarrow{M_3M_4}+\overrightarrow{M_4M_5}+\overrightarrow{M_5M_6}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_3M_4}+\overrightarrow{M_5M_6} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3A_5} + \overrightarrow{A_5A_1}) = \mathbf{0}$), получаем, что $M_3M_6 > M_1M_2 \geq \sqrt{3}$, ч.т.д.

22. (М. Панов) (10–11) На диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ взяли произвольную точку P и из нее опустили перпендикуляры PK, PL, PM, PN, PO на AB, BC, CD, DA, BD соответственно. Докажите, что расстояние от P до KN равно расстоянию от O до ML.

Решение. Если P движется по AC с постоянной скоростью, прямые KN и ML также движутся равномерно, не меняя своих направлений, и скорость точки O тоже постоянна. Поэтому разность расстояний $d(P, KN) - d(O, ML)$ линейно зависит от положения P. При $P = A$ эта разность равна 0 по теореме Симсона, а когда P — точка пересечения AC и BD, она равна 0, поскольку четырехугольник $KLMN$ описан вокруг окружности с центром $P = O$ ($\angle NKP = \angle DAC = \angle DBC = \angle PKL$ в силу вписанности четырехугольников $AKPN$ и $BKPL$).

23. (И.Фролов) (10–11) В треугольнике ABC прямая m касается вписанной окружности. Прямые, проходящие через центр вписанной окружности I и перпендикулярные AI, BI, CI, пересекают прямую m в точках A', B', C' соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

Решение. При полярном преобразовании относительно вписанной окружности прямые BC, CA, AB, m перейдут в точки A_1, B_1, C_1 M касания их с окружностью. Прямая IA' перейдет в бесконечно удаленную точку перпендикулярной ей прямой IA, следовательно, точка ее пересечения с m перейдет в прямую, проходящую через M и параллельную IA. Поскольку $IA \perp B_1C_1$, полюсом прямой AA' будет проекция M на B_1C_1. Аналогично полюсами прямых BB', CC' будут проекции M на A_1C_1 и A_1B_1 соответственно. Эти три точки лежат на одной прямой по теореме Симсона, поэтому их поляры пересекаются в одной точке.

24. (И.И.Богданов) (11) Даны два тетраэдра. Ни у одного из них нет двух подобных граней, но каждая грань первого тетраэдра подобна какой-то грани второго. Обязательно ли эти тетраэдры подобны?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть t — число достаточно близкое к 1. Тогда существуют два тетраэдра, основаниями которых являются правильные треугольники со стороной 1, а боковые стороны у одного равны t, t^2, t^3, а у другого — $1/t$, $1/t^2$, $1/t^3$. Очевидно, что они удовлетворяют условию задачи, но не подобны.