

XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Первый день. 8 класс
Ратмино, 31 июля 2018 г.

1. (М. Волчкевич) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписанная окружность касается катета BC в точке K . Докажите, что хорда вписанной окружности, высекаемая прямой AK в два раза больше, чем расстояние от вершины C до этой прямой.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности, P, Q — проекции точек I, C соответственно на AK (рис.8.1). Так как $\angle IKC = 90^\circ$, $\angle ICC = 45^\circ$, треугольник IKC — равнобедренный, т.е. $IK = KC$. Кроме того, $\angle IKP = \angle KCQ$, поскольку соответствующие стороны этих углов перпендикулярны. Следовательно, треугольники IKP и KCQ равны, т.е. $KP = CQ$. Но P — середина хорды, высекаемой в окружности прямой AK , откуда и следует утверждение задачи.

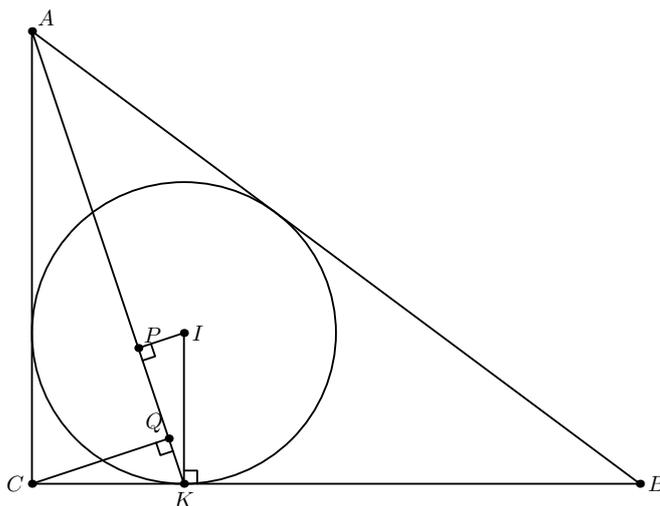


Рис. 8.1

2. (Н.Москвитин) Около прямоугольника $ABCD$ описана окружность. На меньшей дуге BC окружности взята произвольная точка E . К окружности проведена касательная в точке B , пересекающая прямую CE в точке G . Отрезки AE и BD пересекаются в точке K . Докажите, что прямые GK и AD перпендикулярны.

Решение. Так как $\angle DBG = \angle AEC = 90^\circ$, четырехугольник $BGEK$ — вписанный (рис.8.2). Следовательно, $\angle BGK = \angle BEA = \angle DBC$ и $GK \perp BC$, что равносильно утверждению задачи.

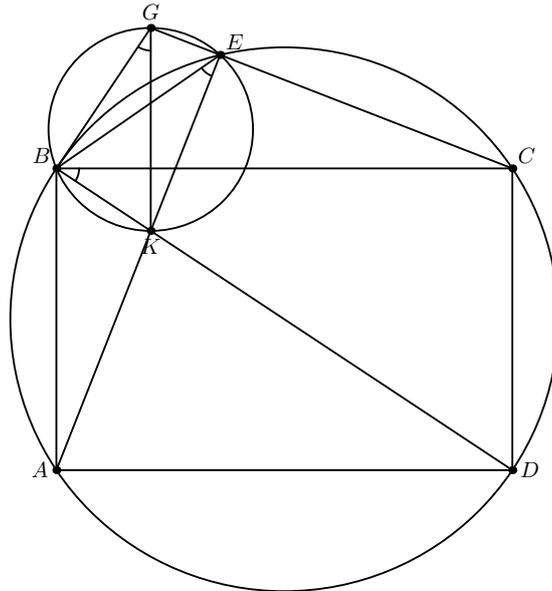


Рис. 8.2

3. (Г.Фельдман) В треугольнике ABC угол A равен 60° , AA' , BB' , CC' — биссектрисы. Докажите, что $\angle B'A'C' \leq 60^\circ$.

Решение. Для равностороннего треугольника утверждение задачи очевидно, поэтому можно считать, что $AC > AB$. Пусть I — точка пересечения биссектрис. Тогда $\angle BIC = 120^\circ$, следовательно, четырехугольник $AB'IC'$ — вписанный, а поскольку AI — биссектриса, то $B'I = C'I$. Пусть $\angle ACB = 2\gamma$, тогда $\gamma < 30^\circ$ и $IA' = \frac{r}{\sin \angle AA'B} = \frac{r}{\sin(2\gamma+30^\circ)} > \frac{r}{\sin(\gamma+60^\circ)} = \frac{r}{\sin \angle CC'B} = IC'$. Поэтому A' лежит вне окружности с центром I радиуса IC' (рис.8.3), то есть $\angle B'A'C' < 60^\circ$.

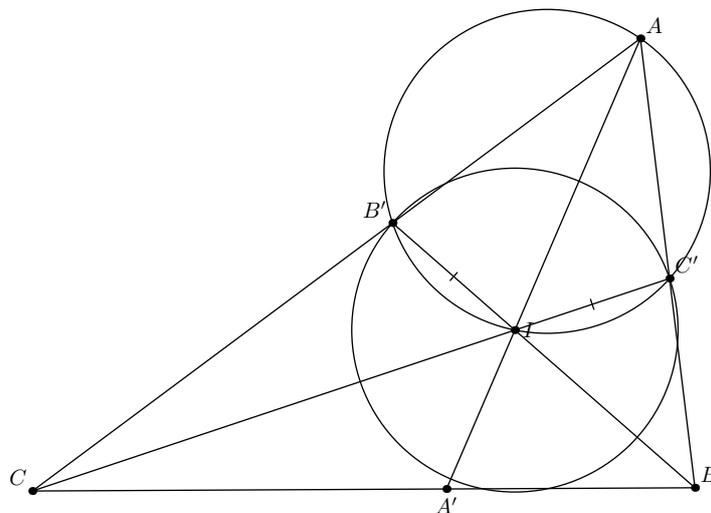


Рис. 8.3

4. (M.Saghafian) Найдите все такие конфигурации из шести точек общего положения на плоскости, что треугольник, образованный любыми тремя из них, равен треугольнику, образованному тремя остальными.

Ответ. Два равносторонних треугольника, вписанных в одну окружность.

Первое решение. Пусть D — набор 15 расстояний между точками A_1, \dots, A_6 (каждое число входит в набор столько раз, сколько есть отрезков соответствующей длины), D_i — набор 5 расстояний от A_i до остальных точек. Рассмотрим набор 30 длин сторон треугольников, одной из вершин которых является A_i . Каждое число из набора D_i входит в него четыре раза, а каждое число из набора $D \setminus D_i$ — один раз. Из условия задачи следует, что такой же набор 30 чисел мы получим, беря стороны треугольников, в которых A_i не является вершиной, т.е. каждое число из $D \setminus D_i$ входит в этот набор три раза. Следовательно, $D = 3D_i$, т.е. все наборы D_i совпадают.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат обозначим через M точку, каждая координата которой равна среднему арифметическому соответствующих координат точек A_i . Пусть X — произвольная точка плоскости, x, m, a_1, \dots, a_6 — первые координаты точек X, M, A_1, \dots, A_6 . Легко видеть, что выполнено равенство $(x - a_1)^2 + \dots + (x - a_6)^2 = ((x - m) + (m - a_1))^2 + \dots + ((x - m) + (m - a_6))^2 = 6(x - m)^2 + (m - a_1)^2 + \dots + (m - a_6)^2$. Аналогичное равенство выполняется для вторых координат точек, откуда по теореме Пифагора получаем, что

$$XA_1^2 + \dots + XA_6^2 = 6XM^2 + MA_1^2 + \dots + MA_6^2$$

(это равенство является частным случаем теоремы Лейбница о моментах инерции). Подставляя в него вместо X A_1, \dots, A_6 , получаем, что $MA_1 = \dots = MA_6$, т.е. все точки лежат на одной окружности. Можно считать, что они образуют вписанный шестиугольник $A_1 \dots A_6$. Пусть A_1A_2 — его наименьшая сторона. Из равенства наборов D_i следует, что $A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6$. Аналогично $A_2A_3 = A_4A_5 = A_6A_1$. В достаточности этих условий убеждаемся непосредственной проверкой.

Второе решение. Пусть A_1, A_2, \dots, A_6 — данные точки. Если не сказано иное, будем под треугольником понимать треугольник с вершинами в A_i , под отрезком — отрезок с концами в A_i , под длиной — длину такого отрезка. Докажем ряд лемм.

1) Для всякой длины x верно хотя бы одно из утверждений:

(А) существует равносторонний треугольник со стороной x ;

(Б) существует три отрезка длины x с шестью разными концами.

В самом деле, пусть $A_1A_2 = A_3A_4 = x$. Так как $\triangle A_1A_2A_4 = \triangle A_3A_5A_6$, то в $\triangle A_3A_5A_6$ есть сторона x . Если это A_5A_6 , мы получили (Б), иначе есть два смежных отрезка длины x . Пусть (начнём нумерацию заново) $A_1A_2 = A_2A_3 = x$ и $A_4A_5 = A_5A_6 = x$. Так как $\triangle A_2A_3A_5 = \triangle A_1A_4A_6$, то в $\triangle A_1A_4A_6$ есть сторона x . Если это A_4A_6 , то имеем (А), в противном случае получаем пятизвенную ломаную, все звенья которой равны x . Её крайние и среднее звенья дадут конструкцию (Б).

2) Пусть x — максимальная длина. Тогда неверно (А), а значит верно (Б).

В самом деле, если $\triangle A_1A_2A_3$ равносторонний со стороной x , то внутри построенного на нём треугольника Рело лежат вершины равного ему $\triangle A_4A_5A_6$, что невозможно.

3) Любые два отрезка максимальной длины x пересекаются.

В самом деле, если $A_1A_2 = x$, проведём через A_1 и A_2 прямые, перпендикулярные A_1A_2 . В полосе между ними лежат остальные точки. Сделаем так же для $A_3A_4 = x$, мы получим, что A_1A_2 и A_3A_4 — непараллельные высоты некоторого ромба, соединяющие внутренние точки его сторон. Такие высоты, очевидно, пересекаются.

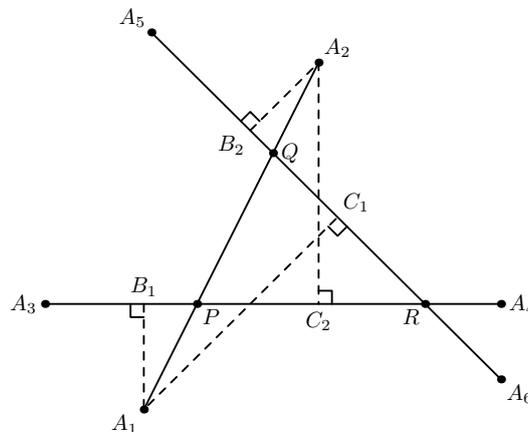


Рис. 8.4

4) Пусть отрезки A_1A_2 , A_3A_4 и A_5A_6 пересекаются в трёх точках (см. рис.8.4). Тогда перпендикуляры A_1B_1 и A_2B_2 равны как высоты равных треугольников $A_1A_3A_4$ и $A_2A_5A_6$. Аналогично равны перпендикуляры A_1C_1 и A_2C_2 . Отсюда $\frac{A_1P}{PA_2} = \frac{A_1B_1}{A_2C_2} = \frac{A_2B_2}{A_1C_1} = \frac{A_2Q}{QA_1}$. Это значит, что $A_1P = QA_2$. Отсюда следует, что $\triangle A_1PB_1 = \triangle A_2QB_2$, то есть $\angle P = \angle Q$. Аналогичным рассуждением получаем, что $\triangle PQR$ равносторонний, а тогда $A_1P = QA_2 = A_3P = RA_4 = A_6R = QA_5$. Легко проверить, что эта конструкция удовлетворяет условиям.

В точности такие же рассуждения в случае пересечения отрезков в одной точке показывают, что они пересекаются в общей середине, образуя углы по 60° .

XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Второй день. 8 класс

Ратмино, 1 августа 2018 г.

5. (С.Севастьянов) На стороне AB квадрата $ABCD$ вне его построен равнобедренный треугольник ABE ($AE = BE$). Пусть M — середина AE , O — точка пересечения AC и BD , K — точка пересечения ED и OM . Докажите, что $EK = KO$.

Решение. Так как OM — средняя линия треугольника ACE , $OM \parallel EC$, следовательно, $\angle KOE = \angle OEC$ (рис.8.5). Но очевидно, что EO — биссектриса угла CED . Значит, $\angle EOK = \angle OEK$ и треугольник $ОКЕ$ — равнобедренный.

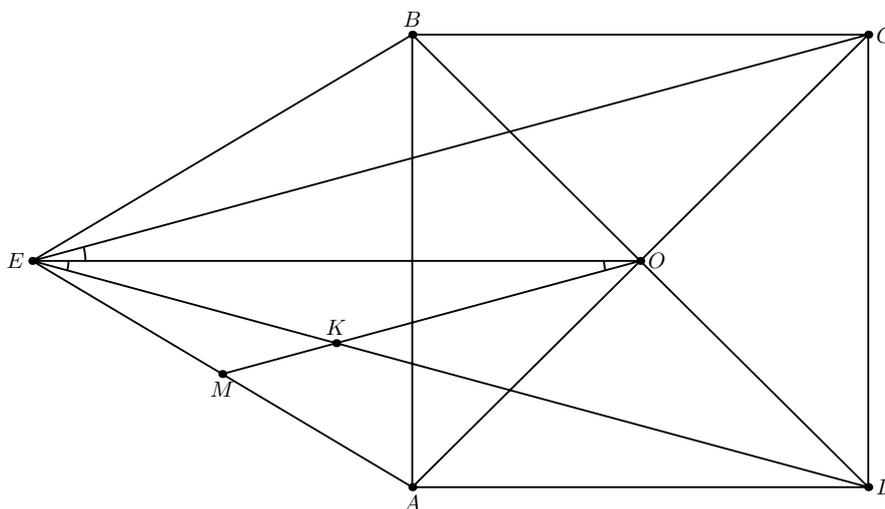


Рис. 8.5

6. (Д.Шноль) В четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие углы. Кроме того, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BD = B_1D_1$. Обязательно ли четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть $A = A_1$, $B = B_1$, $AХВ$ — равнобедренный треугольник, AA' , BB' — его высоты, точки C , C_1 на стороне BX и D , D_1 на стороне $AХ$ таковы, что $CA' = C_1A' = DB' = D_1B'$. Тогда $AC = AC_1 = BD = BD_1$ и равнобедренные трапеции $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ удовлетворяют всем условиям, но не являются равными (рис.8.6).

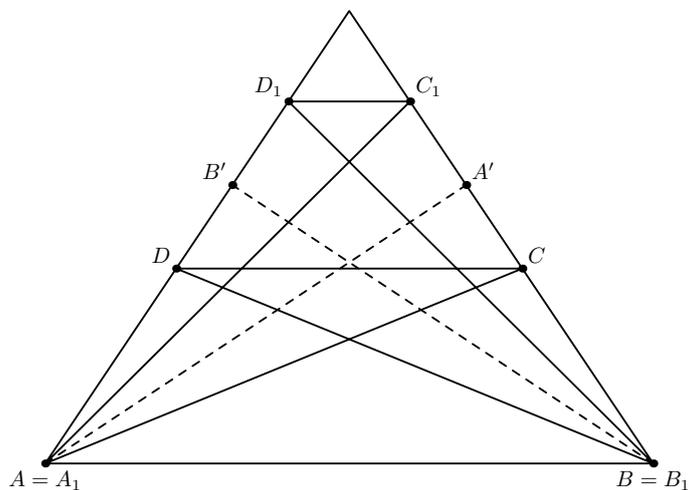


Рис. 8.6

7. (Ф.Нилов) Окружности ω_1, ω_2 с центрами O_1, O_2 соответственно лежат одна вне другой. На этих окружностях взяты точки C_1, C_2 , лежащие по одну сторону от прямой O_1O_2 . Луч O_1C_1 пересекает ω_2 в точках A_2, B_2 , а луч O_2C_2 пересекает ω_1 в точках A_1, B_1 . Докажите, что $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ тогда и только тогда, когда $C_1C_2 \parallel O_1O_2$.

Первое решение. Пусть R_1, R_2 — радиусы окружностей, M_1, M_2 — середины A_1B_1, A_2B_2 соответственно, H_1, H_2 — проекции C_1, C_2 на O_1O_2 . Очевидно, равенство углов $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ равносильно равенству отношений $O_1M_1/R_1 = O_2M_2/R_2$. Но так как треугольник $O_1O_2M_2$ подобен треугольнику $O_1C_1H_1$, то $O_2M_2/R_2 = (C_1H_1 \cdot O_1O_2)/(R_1R_2)$ (рис.8.7). Аналогично $O_1M_1/R_1 = (C_2H_2 \cdot O_1O_2)/(R_1R_2)$. Следовательно, равенство $O_1M_1/R_1 = O_2M_2/R_2$ равносильно равенству $C_1H_1 = C_2H_2$, которое, в свою очередь, равносильно параллельности прямых C_1C_2 и O_1O_2 .

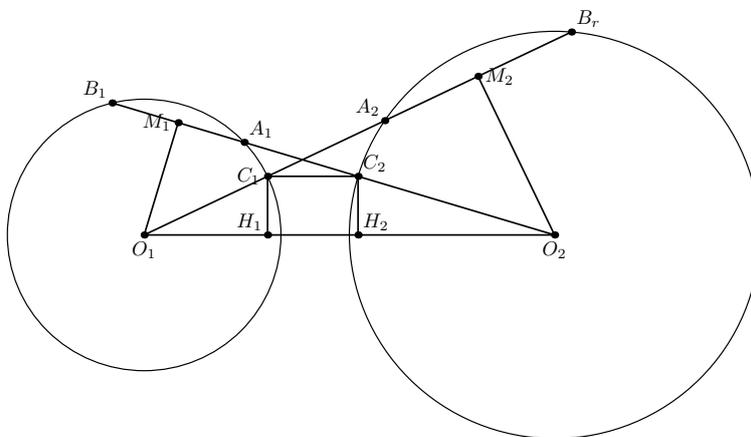


Рис. 8.7

Второе решение. Равенство $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ равносильно равенству $\angle O_1A_1O_2 = \angle O_1A_2O_2$, т.е. вписанности четырехугольника $O_1A_1A_2O_2$. Докажем равносильность этой вписанности и параллельности прямых C_1C_2 и O_1O_2 .

Если четырехугольник $O_1A_1A_2O_2$ вписанный, то $\angle A_1O_1C_1 = \angle A_2O_2C_2$, $\angle O_1C_1A_1 = \angle O_2C_2A_2$ и четырехугольник $C_1A_1A_2C_2$ — вписанный. Следовательно, прямые O_1O_2 и C_1C_2 антипараллельны прямой A_1A_2 относительно прямых O_1A_2 , O_2A_1 и, значит, параллельны.

Если $C_1C_2 \parallel O_1O_2$, то рассмотрим точку X пересечения луча O_1C_1 с окружностью $A_1O_1O_2$. Четырехугольник $A_1C_1C_2X$ также вписанный, следовательно, $\angle A_1O_1X = \angle XO_2A_1$ и $\angle O_1C_1A_1 = \angle O_2C_2X$. Поэтому $\angle O_2XC_2 = \angle O_1A_1C_1 = \angle O_1C_1A_1 = \angle O_2C_2X$, т.е. $O_X = O_2C_2$ и X совпадает с A_2 .

8. (И.Кухарчук) В треугольнике ABC I — центр вписанной окружности, D — произвольная точка на стороне BC , серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BI и CI в точках F и E соответственно. Найдите геометрическое место ортоцентров треугольников EIF .

Ответ. Отрезок прямой BC между точками ее пересечения с прямыми, проходящими через I и параллельными AB , AC , возможно, с одной или двумя выколотыми точками.

Решение. Пусть G , H — ортоцентры треугольников DEF , IEF соответственно. Так как треугольники DEF и AEF симметричны относительно EF , точка G симметрична ортоцентру треугольника AEF и, значит, лежит на окружности, описанной около этого треугольника.

Точка E пересечения серединного перпендикуляра к AD с биссектрисой угла C лежит на описанной окружности треугольника ACD . Поэтому $\angle AEF = \angle AED/2 = 90^\circ - \angle C/2 = \angle A/2 + \angle B/2 = \angle AIF$ (так как AIF — внешний угол треугольника AIB), т.е. I лежит на окружности AEF . Тогда из вписанности четырехугольников $AEDC$ и $AEIG$ следует, что $IG \parallel CD$.

Так как $\angle EHF = 180^\circ - \angle EIF = \angle EAF = \angle EDF$, точки E , F , D , H лежат на одной окружности. Следовательно, $IH = DG$. Кроме того, очевидно, что $DG \parallel IH$. Значит, $IGDH$ — параллелограмм и H лежит на BC (рис.8.8). Если D совпадает, например, с вершиной C , то DG совпадает с AC и $IH \parallel AC$. Если BC — наименьшая сторона треугольника,

то любая точка полученного отрезка принадлежит искомому ГМТ. Если же, например, $BC \geq AB$, то точка, симметричная A относительно биссектрисы угла B , попадает на отрезок BC . При совпадении D с этой точкой серединный перпендикуляр к AD совпадает с прямой BI и точка F не определена. Поэтому соответствующую точку H надо исключить из ГМТ.

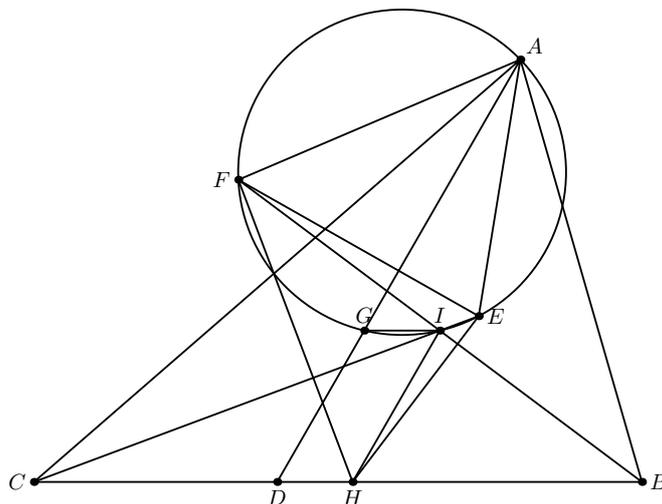


Рис. 8.8

Примечание. То, что H лежит на BC , можно доказать иначе. Проекции точки A на биссектрисы углов B и C лежат на средней линии треугольника. На этой же средней линии лежит и середина отрезка AD , являющаяся проекцией A на EF . Поэтому средняя линия является прямой Симсона точки A относительно треугольника IEF , а гомотетичная ей прямая BC проходит через ортоцентр этого треугольника.

XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Первый день. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2018 г.

1. (М.Етесамифард) Пусть M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC . Окружность, проходящая через C и M , пересекает отрезки BC и AC в точках P и Q соответственно. Пусть c_1, c_2 — окружности с центрами P, Q и радиусами BP, AQ соответственно. Докажите, что c_1, c_2 и описанная окружность треугольника ABC проходят через одну точку.

Решение. Пусть N — вторая точка пересечения окружности MPQ с AB . Тогда $\angle QNA = \angle QPM = \angle ACM = \angle CAM$ (рис.9.1). Следовательно, $QA = QN$ и N лежит на окружности c_2 . Аналогично N лежит на c_1 . Теперь, если D — вторая точка пересечения c_1 и c_2 , то $\angle ADB = \angle ADN + \angle NDB = (\angle AQN + \angle NPB)/2 = 90^\circ$, т.е. D лежит на окружности ABC .

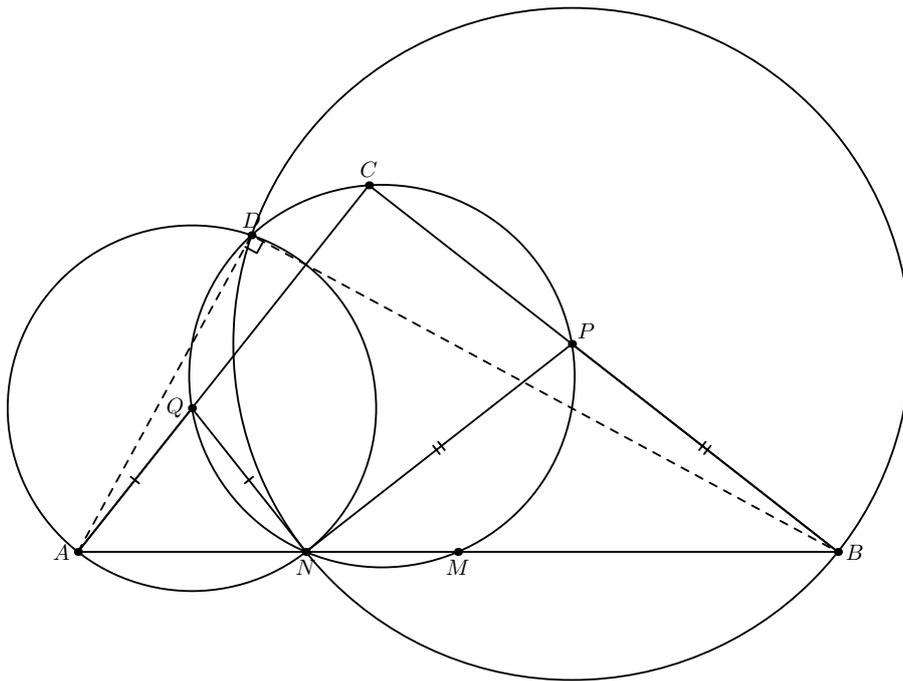


Рис. 9.1

2. (Г.Науменко) Дан треугольник ABC и окружность γ с центром в точке A , которая пересекает стороны AB и AC . Пусть общая хорда описанной окружности треугольника и окружности γ пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Отрезки CX и BY пересекают γ

в точках S и T соответственно. Описанные окружности треугольников ACT и BAS пересекаются в точках A и P . Докажите, что прямые CX , BY , и AP пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть U — вторая точка пересечения прямой BY с γ . Так как TU , AC и общая хорда окружностей ABC и γ пересекаются в точке Y , $AU \cdot CU = TY \cdot UY$, т.е. A, U, C, T лежат на одной окружности (рис.9.2). Аналогично A, B, S и вторая точка пересечения прямой CX с γ лежат на одной окружности. Следовательно, прямые CX , BY , и AP пересекаются в одной точке как радикальные оси окружностей γ , ACT и BAS .

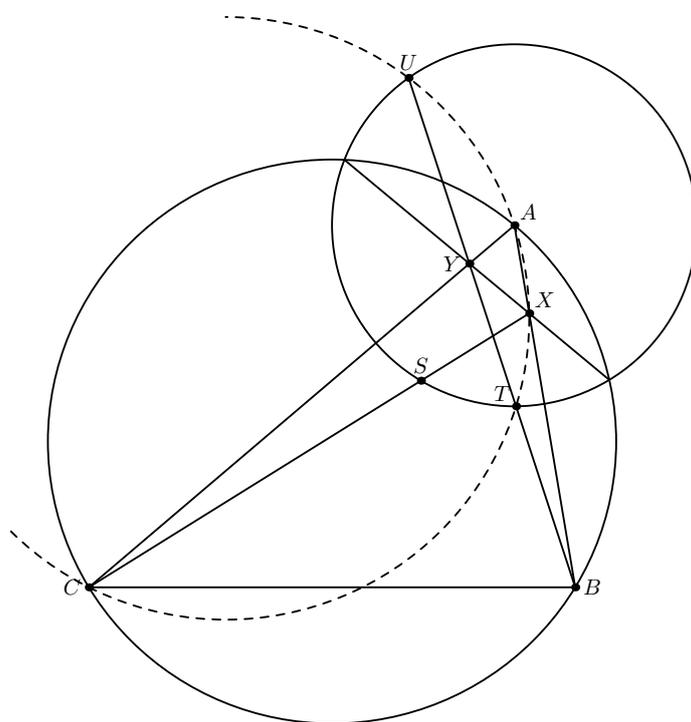


Рис. 9.2

3. (Н.Белухов) Вершины треугольника DEF лежат на разных сторонах треугольника ABC . Касательные, проведенные из центра вписанной в треугольник DEF окружности к внеписанным окружностям треугольника ABC , равны. Докажите, что $4S_{DEF} \geq S_{ABC}$.

Решение. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB , а U, V — точки касания прямой AB с внеписанными окружностями, касающимися сторон AC и BC соответственно. Так как $AV = BU = p$ (полупериметр треугольника), касательные из точки C_0 к внеписанным окружностям, касающимся сторон AC и BC , равны. Кроме того, линия центров этих

окружностей перпендикулярна биссектрисе угла C , а значит и биссектрисе угла $A_0C_0B_0$, которая, таким образом, является их радикальной осью. Аналогично биссектрисы углов $C_0A_0B_0$ и $B_0A_0C_0$ являются радикальными осями други пар вневписанных окружностей, т.е. центры вписанных окружностей треугольников DEF и $A_0B_0C_0$ совпадают. Предположим для определенности, что точка D лежит на отрезке CA_0 . Тогда, если радиус r' вписанной окружности треугольника DEF больше радиуса r вписанной окружности треугольника $A_0B_0C_0$, то F лежит на отрезке BC_0 , а значит E лежит на отрезке AB_0 . Если же $r' < r$, то E лежит на отрезке AB_0 , а значит F лежит на отрезке BC_0 . Поэтому расстояние от F до прямой ED не меньше расстояния от C_0 до этой прямой, т.е. $S_{DEF} \geq S_{C_0DE}$. Аналогично $S_{C_0DE} \geq S_{B_0C_0D} = S_{A_0B_0C_0} = S_{ABC}/4$.

4. (А.Мудгал) Дана окружность ω и ее хорда BC . Точка A движется по большей из дуг BC . Пусть H — ортоцентр треугольника ABC , D, E — такие точки на сторонах AB, AC , что H — середина отрезка DE , O_A — центр описанной окружности треугольника ADE . Докажите, что все точки O_A лежат на одной окружности.

Решение. Обозначим постоянный угол $90^\circ - \angle BAC$ через α . Пусть P, Q — середины AD, AE , а R, S — такие точки на прямой BC , что $PR \perp AB, SQ \perp AC$ (рис. 9.4). Покажем, что точки R, S не зависят от A .

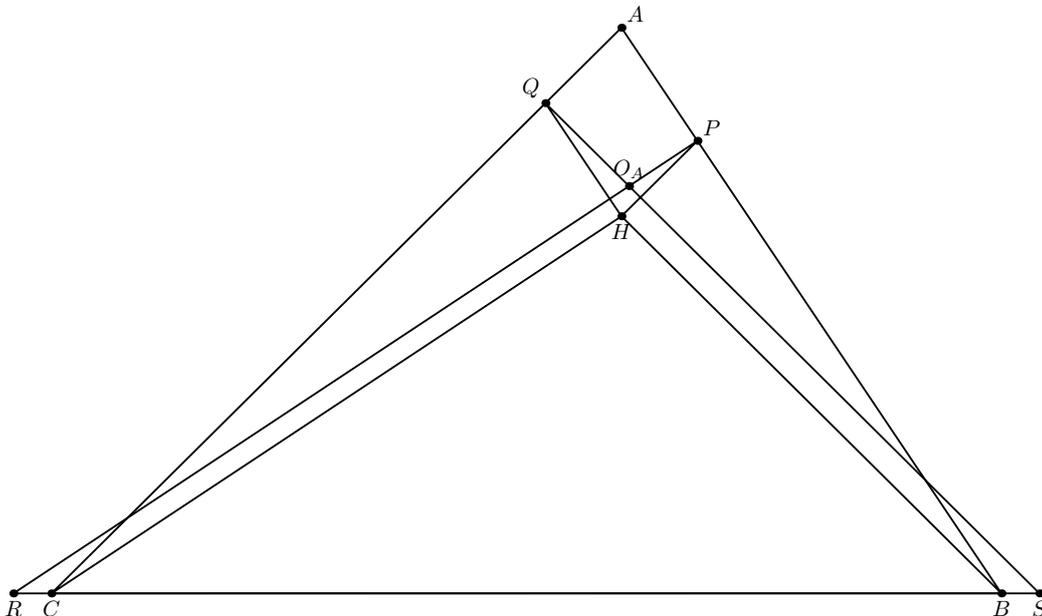


Рис. 9.4

Заметим, что $HQ \parallel AB$, т.е. $\angle CHQ = 90^\circ$ и $\angle CQH = \angle CAB$. Кроме

того, H движется по окружности, симметричной ω относительно BC . Поскольку Q — образ H при поворотной гомотетии с центром C , углом поворота α и коэффициентом $1/\cos \alpha$, Q также движется по некоторой окружности, обозначим ее ω_C .

Пусть O — центр ω . Так как $\angle OCB = \alpha$, центр ω_C лежит на BC . Поскольку $\angle CQS = 90^\circ$, S — диаметрально противоположная C точка окружности ω_C . Следовательно, S не зависит от A . Доказательство для R аналогично.

Поскольку O_A — точка пересечения прямых PR и QS , а $\angle RO_A S = 90^\circ + \alpha$, получаем, что O_A движется по дуге окружности, проходящей через R и S .

XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Второй день. 9 класс

Ратмино, 1 августа 2018 г.

5. (Д.Прокопенко) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. BL и CN — биссектрисы треугольников ABD и ACD соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников ABL и CDN , пересекаются в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AD , не содержащей точку B .

Решение. Пусть M — середина дуги AD . Тогда прямые BL и CN проходят через M . Кроме того, из равенства дуг AM и DM следует, что $\angle ALB = (\sphericalangle AB + \sphericalangle DM)/2 = \sphericalangle BAM/2 = \angle BCM$, и, значит, четырёхугольник $BCNL$ — вписанный (рис.9.5). Следовательно, $ML \cdot MB = MN \cdot MC$ и M лежит на радикальной оси PQ окружностей ABL и CDN .

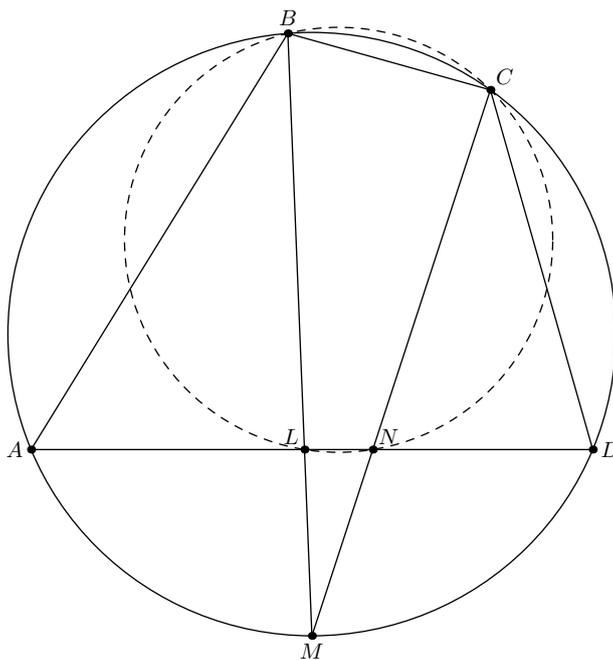


Рис. 9.5

6. (Ф.Ивлев) Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника ABC и центр внеписанной окружности треугольника $СDA$, касающейся стороны AC , лежат на одной прямой.

Первое решение. Применяя теорему о трех колпаках к вписанной окружности $ABCD$, вписанной окружности ω треугольника ABC и невписанной окружности Ω треугольника ACD , получаем, что общие внешние касательные к ω и Ω пересекаются на BD , а поскольку AC — одна из этих двух касательных, то пересекаются они как раз в точке пересечения диагоналей $ABCD$. Значит, эта точка лежит на линии центров ω и Ω , что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть L — точка пересечения диагоналей четырехугольника, I — центр его вписанной окружности, I_B — центр вписанной окружности треугольника ABC , I_D — центр невписанной окружности треугольника ADC . Очевидно, что I_B лежит на отрезке BI , причем отношение $BI_B : BI$ равно отношению $r_B : r$ радиусов окружностей, вписанных в треугольник ABC и четырехугольник $ABCD$ соответственно. С учетом равенств $S_{ABCD} = (AB + BC + CD + DA)r/2$, $S_{ABC} = (AB + BC + CA)r_B/2$ и $S_{ABC} : S_{ABCD} = BL : BD$ получаем, что

$$\frac{I_B I}{I_B B} = \frac{DL(AB + BC + CA) - BL(AD + CD - AC)}{BL(AB + BC + CD + DA)}.$$

Аналогично для лежащей на луче DI точки I_D получаем

$$\frac{I_D I}{I_D D} = \frac{DL(AB + BC + AB) - BL(AD + CD - AC)}{DL(AB + BC + CD + DA)}.$$

Применяя теорему Менелая к треугольнику IBD , получаем утверждение задачи (рис.9.6).

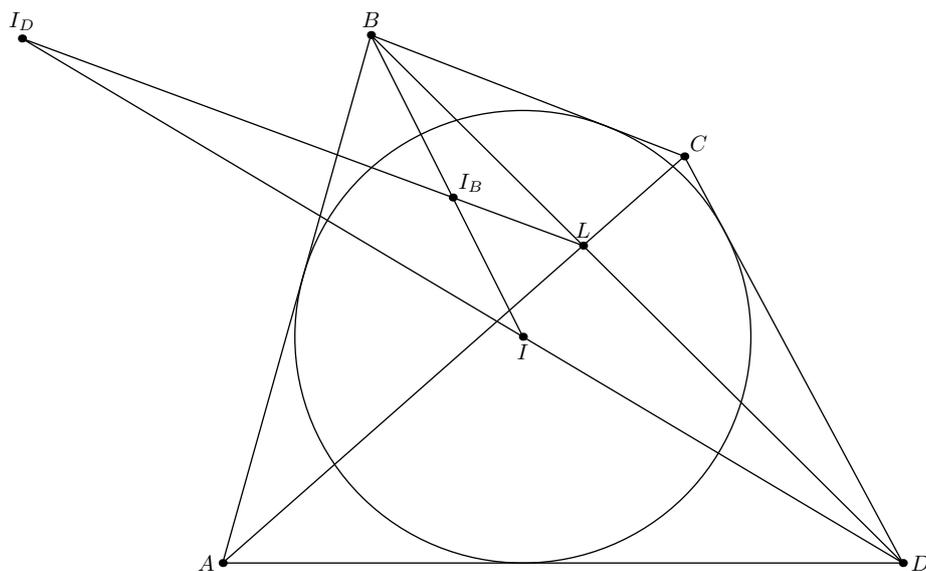


Рис. 9.6

7. (А.Куликова) К описанной окружности треугольника ABC проведены касательные в точках B и C . Лучи CC_1 , BB_1 , где B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB , пересекают эти касательные в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

Решение. Воспользуемся **теоремой об изогоналях**.

Пусть дана прямая ℓ , проходящая через точку O . и точки A, A', B, B' и $X = AB \cap A'B', X' = AB' \cap A'B$. Пусть прямые OA и OA' симметричны относительно ℓ , и пары прямых OB и OB' симметричны относительно ℓ . Тогда прямые OX и OX' также симметричны относительно ℓ ,

Вернемся к задаче. Пусть M — центр тяжести треугольника ABC , P — точка пересечения касательных. Так как AP — симедиана треугольника, прямые AP и AM являются изогоналями относительно угла BAC (рис.9.7). По теореме об изогоналях прямые AK и AL тоже являются изогоналями.

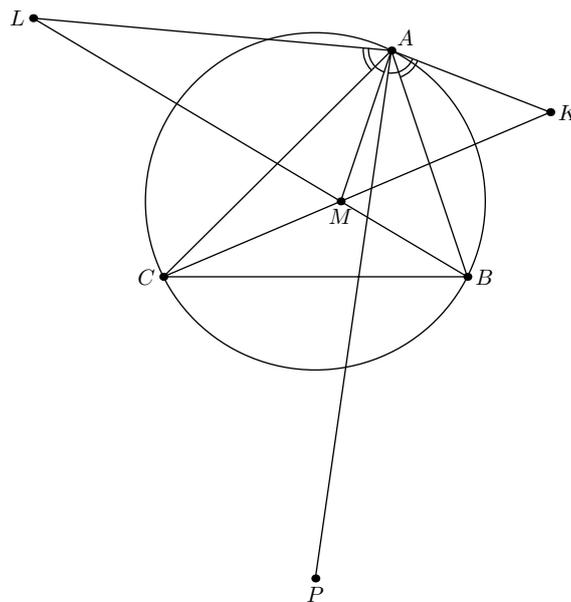
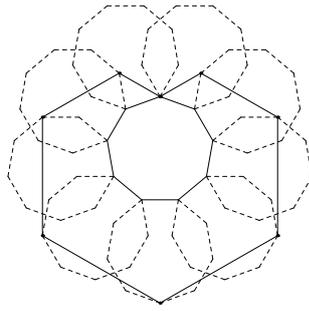


Рис. 9.7

8. (Н.Белухов) Правильный n -угольник со стороной 1 вращается вокруг другого такого же n -угольника, как показано на рисунке. Последовательные положения одной из его вершин в моменты, когда n -угольники имеют общую сторону, образуют замкнутую ломаную κ .

Докажите, что κ ограничивает площадь, равную $6A - 2B$, где A, B — площади правильных n -угольников с единичными стороной и радиусом описанной окружности соответственно.



Решение. Разобьем фигуру, ограниченную κ на треугольники, как на рис.9.8.1.

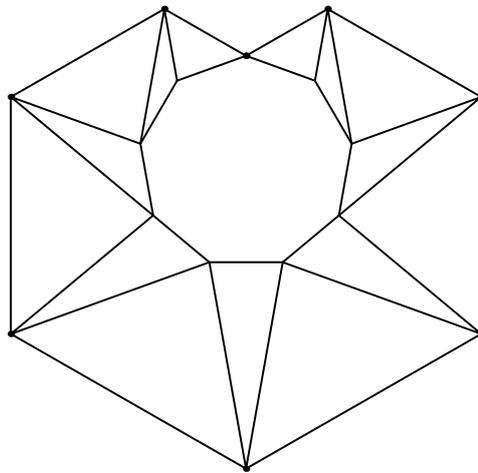


Рис.9.8.1

Треугольники, основаниями которых являются стороны $2, \dots, n-1$ неподвижного n -угольника, образуют правильный n -угольник со стороной 1 , как показано на рис.9.8.2.

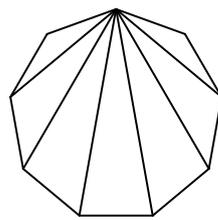


Рис.9.8.2

Разрежем два правильных n -угольника с единичным радиусом описанной окружности аналогично рис. 9.8.2, составим из полученных частей $n-1$ подонных равнобедренных треугольников с углом при основании $\frac{180^\circ}{n}$ (рис.9.8.3) и добавим к этим треугольникам оставшиеся треугольники рис. 9.8.1 (рис.9.8.4).

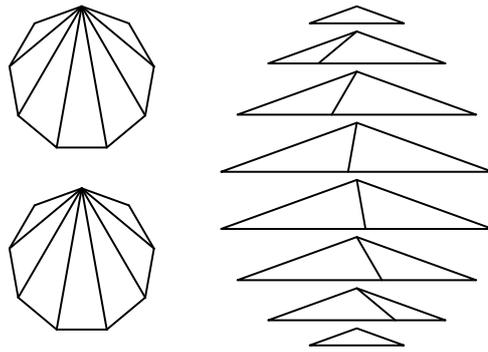


Рис.9.8.3

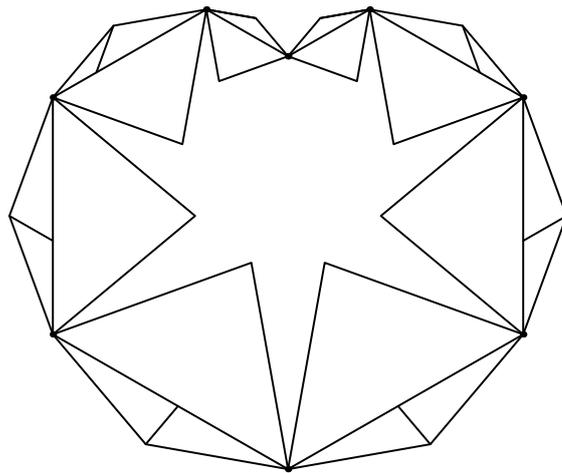


Рис.9.8.4

Разрежем каждый из $n - 1$ четырехугольника рис.9.8.4 на четыре части и сложим из них два равнобедренных треугольника с углом при основании $\frac{180^\circ}{n}$ (рис.9.8.5).

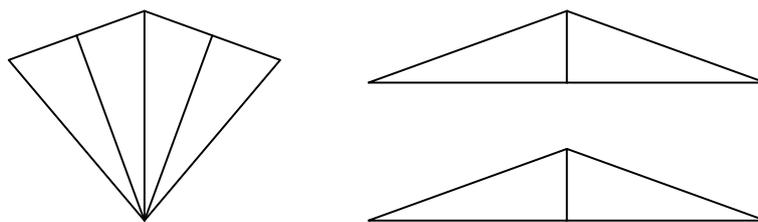


Рис.9.8.5

Наконец, соберем из этих $2n - 2$ треугольников четыре правильных n -угольника со стороной 1 процессом, обратным показанному на рис. 9.8.3. Таким образом, мы добавили два правильных n -угольника с единичным радиусом описанной окружности к фигуре, ограниченной κ , и разрезали их объединение на части, из которых складываются шесть правильных n -угольников со стороной 1.

XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Первый день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2018 г.

1. (Д.Швецов) Высоты AH , CH остроугольного треугольника ABC пересекают внутреннюю биссектрису угла B в точках L_1 , P_1 , а внешнюю в точках L_2 , P_2 . Докажите, что ортоцентры треугольников HL_1P_1 , HL_2P_2 и вершина B лежат на одной прямой.

Первое решение. Заметим, что треугольники HL_1P_1 и HL_2P_2 — равнобедренные с углами при вершине H , равными B и $\pi - B$ соответственно. Пусть H_1 , H_2 — ортоцентры этих треугольников, M_1 , M_2 — середины L_1P_1 , L_2P_2 соответственно. Тогда треугольники HL_2P_2 и $H_1L_1P_1$ подобны, а H_2 и H — их ортоцентры, следовательно, $HH_1 : M_2B = HH_1 : HM_1 = H_2H : H_2M_2$, что равносильно утверждению задачи (рис.10.1).

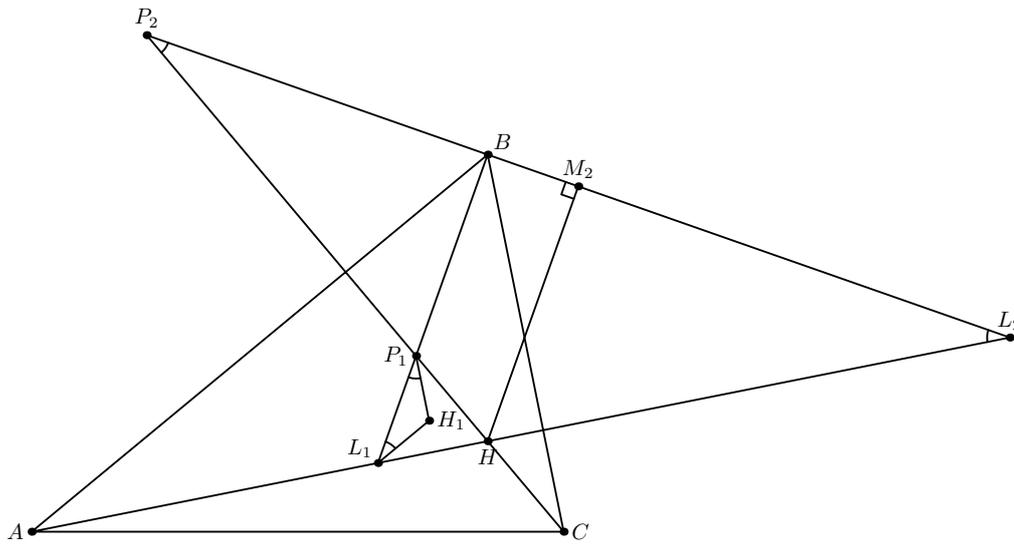


Рис. 10.1

Второе решение. Воспользуемся следующим фактом.

Ортоцентры четырех треугольников, образованных четырьмя прямыми общего положения, лежат на одной прямой (**прямая Обера**).

В данном случае высоты из вершин A , C , а также внешняя и внутренняя биссектрисы угла B образуют четыре треугольника, два из которых — прямоугольные с прямым углом в вершине B . Соответственно, B является и ортоцентром этих треугольников, а значит, лежит на прямой, проходящей через ортоцентры двух других треугольников.

2. (Д.Креков) В угол с вершиной C вписана окружность ω . Рассматриваются окружности, проходящие через C , касающиеся ω внешним образом и пересекающие стороны угла в точках A и B . Докажите, что периметры всех треугольников ABC равны.

Первое решение. Будем считать, что длина касательной из C к данной окружности равна 1. При инверсии относительно единичной окружности с центром C стороны угла и окружность остаются на месте, а точки A, B переходят в такие точки A', B' , что треугольник $A'B'C$ описан около данной окружности. При этом $AC = 1/A'C$, $BC = 1/B'C$, $AB = A'B'/(A'C \cdot B'C)$. Поэтому периметр треугольника ABC равен

$$\frac{A'B' + A'C + B'C}{A'C \cdot B'C} = \frac{2p_{A'B'C} \sin \angle C}{2S_{A'B'C}} = \frac{\sin \angle C}{r_{A'B'C}}.$$

Но радиус вписанной окружности треугольника $A'B'C$ не зависит от точек A, B .

Второе решение. Так как окружность ω является полувневписанной для треугольника ABC , центр вневписанной окружности этого треугольника совпадает с серединой отрезка между точками касания ω со сторонами данного угла, т.е. не зависит от треугольника. Следовательно, точки касания вневписанной окружности со сторонами угла, а значит и периметр треугольника также постоянны.

3. (Ф.Нилов) Дан вписанный n -угольник. Оказалось что середины всех его сторон лежат на одной окружности. Стороны n -угольника отсекают от этой окружности n дуг, лежащих вне n -угольника. Докажите, что эти дуги можно покрасить в красный и синий цвет так, чтобы сумма длин красных дуг равнялась сумме длин синих.

Решение. Пусть M_1, M_2 — середины сторон A_1A_2, A_2A_3 многоугольника $A_1 \dots A_n$, вписанного в окружность с центром O , H_1, H_2 — вторые точки пересечения этих сторон с окружностью, проходящей через середины сторон многоугольника. Тогда сумма ориентированных дуг $\smile M_1H_1 + \smile M_2H_2 = \smile M_1H_2 + \smile M_2H_1 = 2(\angle A_2M_2M_1 + \angle A_2M_1M_2) = 2(\angle OM_2M_1 + \angle OM_1M_2) = 2(\angle OA_2M_1 + \angle OA_2M_2)$ (последнее равенство следует из вписанности четырехугольника $OM_1A_2M_2$). Просуммировав такие равенства, получим, что сумма ориентированных дуг M_iH_i равна нулю, следовательно, раскраска дуги в соответствии с их ориентацией — искомая.

Примечание. Это же рассуждение можно провести иначе. Проекция центра O описанной окружности на стороны многоугольника — середины сторон M_i — лежат на одной окружности. Следовательно, вторые точки H_i пересечения сторон с окружностью являются проекциями на стороны некоторой точки H , причем лучи A_iO и A_iH симметричны относительно биссектрисы угла $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Теперь нетрудно получить, что ориентированный угол между прямыми M_1M_2 и H_1H_2 равен ориентированному углу HA_2O , а сумма всех таких углов равна нулю.

4. (Н.Белухов) На плоскости дано конечное множество S точек, окрашенных в красный и зеленый цвета. Назовем множество *разделимым*, если для него найдется такой треугольник, что все точки одного цвета лежат строго внутри, а все точки другого — строго вне треугольника. Известно, что любые 1000 точек из S образуют разделимое множество. Обязательно ли все множество S разделимо?

Ответ. Нет.

Решение. Будем называть *красно-разделимым* множество, для которого существует такой треугольник δ , что все красные точки лежат строго внутри δ , а все зеленые — строго снаружи.

Пусть A — конечное множество красных и зеленых точек общего положения, P — выпуклая оболочка некоторых красных точек из A , Q — подмножество зеленых точек A . Выясним, при каких условиях существует треугольник δ , разделяющий P и Q .

Без ограничения общности можно считать стороны δ опорными прямыми для P .

зафиксируем некоторую окружность c . Каждой опорной прямой l множества P сопоставим точку $T(l)$ на c такую, что касательная $t(T)$ к c в точке $T(l)$ параллельна l и P лежит по ту же сторону от l , что c от $t(T)$.

Пусть X — произвольная точка Q , $l_1(X)$ и $l_2(X)$ — опорные прямые к P , проходящие через X (если X лежит внутри P , то P нельзя отделить от Q), $a(X)$ дуга c , ограниченная точками $T(l_1(X))$ и $T(l_2(X))$.

Если разделяющий треугольник δ существует, три точки c , соответствующие его сторонам, "протыкают" все дуги $a(X)$, где $X \in Q$. С другой стороны, если существуют три точки c , протыкающие все дуги $a(X)$ и образующие остроугольный треугольник, то образованный соответствующими прямыми треугольник δ отделяет P от Q .

Таким образом, задачу можно переформулировать: пусть любая достаточно большая подсистема системы дуг s протыкается тремя точками, верно ли, что и вся система протыкается тремя точками.

Построим контрпример: систему равных дуг, такую, что любая точка протыкает почти треть всех дуг.

Пусть n — натуральное число, $T_1, T_2, \dots, T_{3n+1}$ вершины правильного $(3n + 1)$ -угольника, вписанного s , $T_{i+3n+1} \equiv T_i$. Для каждого i пусть a_i — открытая дуга $T_i T_{i+n}$. Тогда любая точка s протыкает максимум n дуг, следовательно, проткнуть все дуги тремя точками невозможно. С другой стороны, если удалить дугу $T_1 T_{n+1}$, все оставшиеся дуги можно проткнуть серединами дуг $T_{n+1} T_{n+2}$, $T_{2n+1} T_{2n+2}$ и $T_{3n+1} T_1$.

Построим теперь контрпример к исходной задаче. Возьмем правильный 3001-угольник $Y_1 Y_2 \dots Y_{3001}$, вписанный в окружность k с центром O , $Y_{i+3001} \equiv Y_i$. Для каждого i обозначим через X_i точку пересечения касательных к k в точках Y_i и Y_{i+1000} . Небольшим перемещением точек X_i в направлении O получим множество общего положения. Покрасим все X_i в зеленый цвет, а Y_i — в красный, и обозначим полученное множество через A .

Так как выпуклая оболочка точек X_i содержит Y_i , множество A может быть только красно-разделимым. Но из приведенного выше рассуждения следует, что это не так.

Если удалить любую из точек X_i или Y_i , то, как показано выше, A станет красно-разделимым и, значит, разделимым.

Примечание. Назовем конечное множество S красных и зеленых точек *линейно-разделимым*, если существует такая прямая l , что точки разных цветов лежат строго по разные стороны от l . Если любые четыре точки множества A образуют линейно-разделимое множество, то и все множество линейно-разделимо.

Назовем конечное множество S красных и зеленых точек *окружностно-разделимым*, если существует такая окружность s , что все точки одного цвета лежат строго внутри s , а все точки другого — строго снаружи. Если любые пять точек множества A образуют окружностно-разделимое множество, то и все множество A окружностно-разделимо.

XIV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Второй день. 10 класс

Ратмино, 1 августа 2018 г.

5. (А.Полянский) В треугольнике ABC через центр I вписанной окружности w провели прямую, параллельную стороне BC , до пересечения с вписанной окружностью в точках A_B и A_C (A_B находится в той же полуплоскости относительно прямой AI , что и точка B). После этого нашли точку пересечения прямых BA_B и CA_C и обозначили её через A_1 . Аналогично построили точки B_1 и C_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.

Первое решение. Так как отрезки $A_B A_C$ и BC гомотетичны относительно точки A_1 , прямая $A_1 I$ проходит через середину M стороны BC , причем $A_1 I : A_1 M = 2r : BC$. Поэтому расстояние от A_1 до прямой AC равно $r(BC - h_b)/(BC - 2r)$, где h_b — длина высоты из вершины B . Аналогично получаем, что расстояние от A_1 до AB равно $r(BC - h_c)/(BC - 2r)$. Следовательно, $\sin \angle A_1 AC : \sin \angle A_1 AB = (1 - \sin \angle C) : (1 - \sin \angle B)$. Написав аналогичные равенства для точек B_1, C_1 и применив теорему Чевы, получим утверждение задачи.

Второе решение. Поскольку $\angle A_B I B = \angle I B C = \angle I B A = \angle C_B I B$, точки A_B и C_B симметричны относительно биссектрисы угла B (рис.10.5).

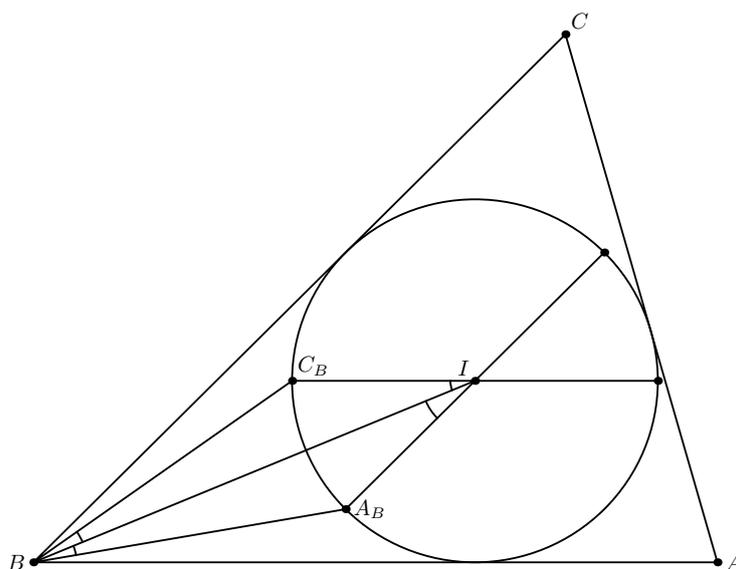


Рис. 10.5

По теореме Чевы

$$\frac{\sin \angle CAA_1 \sin \angle ABA_B \sin \angle BCA_C}{\sin \angle BAA_1 \sin \angle CBA_B \sin \angle ACA_C} = 1.$$

Перемножив это и два аналогичных равенства, получим утверждение задачи.

6. (М.Кунгожин) В окружности ω , описанной около треугольника ABC , хорда KL проходит через середину M отрезка AB и перпендикулярна ей. Некоторая окружность проходит через точки L и M и пересекает отрезок CK в точках P и Q (Q лежит на отрезке KP). Пусть LQ пересекает описанную окружность треугольника KMQ в точке R . Докажите, что четырехугольник $APBR$ вписанный.

Решение. Заметим, что $\angle PML = \angle PQL = \angle KQR = \angle KMR$. Кроме того, $\angle PLM = \angle KQM = \angle KRM$, следовательно, треугольники PLM и KRM подобны, т.е. $PM \cdot RM = LM \cdot KM = AM^2$ (рис.10.6).

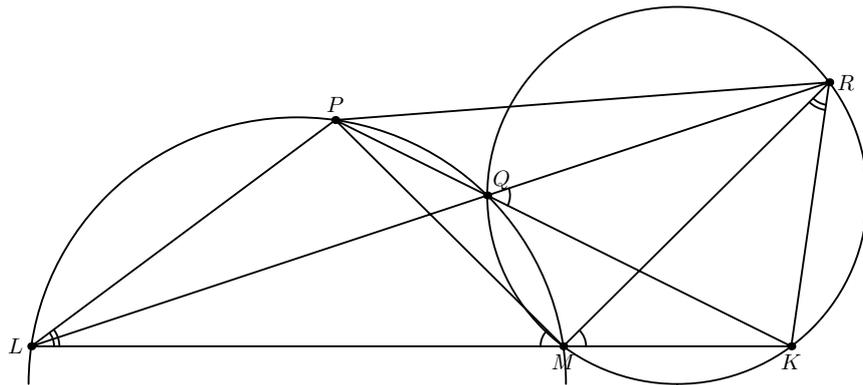


Рис. 10.6

Пусть P' — точка, симметричная P относительно KL . Точки A, B, P, P' лежат на одной окружности, так как являются вершинами равнобедренной трапеции. Поскольку P', M, R лежат на одной прямой и $P'M \cdot RM = AM \cdot BM$, точка R также лежит на этой окружности.

7. (Н.Белухов) Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности радиуса 1. Найдите наибольшее возможное значение величины $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2}$.

Первое решение. Пусть $AC \cap BD = O$. Будем считать, что $\angle AOB \geq 90^\circ$. Пусть E — четвертая вершина параллелограмма $BECD$ (рис.10.7).

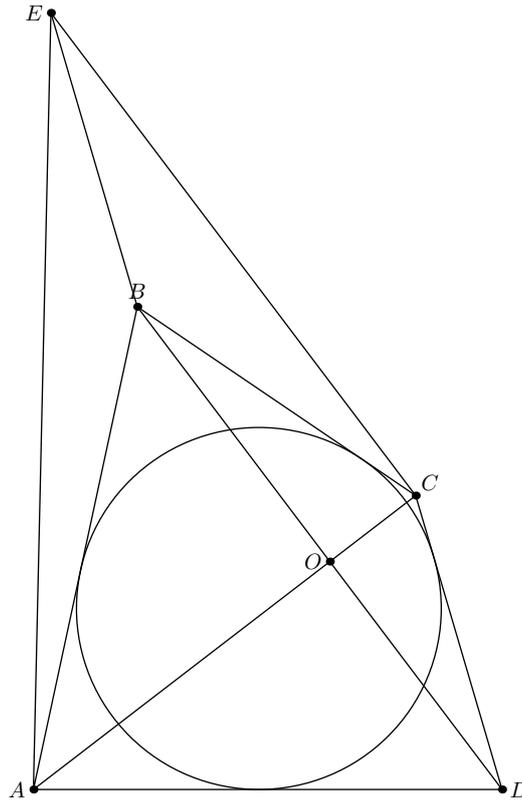


Рис. 10.7

Мы имеем

$$AC \cdot BD \geq 2S_{ABCD} = r \cdot P_{ABCD} = 2r \cdot (AB + CD).$$

Кроме того,

$$AB + CD = AB + BE \geq AE$$

и (так как $\angle ECA \geq 90^\circ$)

$$AE^2 \geq AC^2 + CE^2 = AC^2 + BD^2.$$

Отсюда получаем

$$AC^2 \cdot BD^2 \geq 4r^2 \cdot (AC^2 + BD^2) \Rightarrow \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2} \leq \frac{1}{4r^2}.$$

Равенство достигается при $AC \cdot BD = 2S_{ABCD} \Leftrightarrow AC \perp BD$ и $AB + BE = AE \Leftrightarrow AB \parallel CD$, т.е. когда $ABCD$ — ромб.

Второе решение. Будем деформировать $ABCD$, сохраняя вписанную окружность и уменьшая диагонали.

Пусть окружность ω с центром I вписана в $ABCD$. Зафиксируем ω , прямую l , проходящую через A и C , и параллельную ей прямую m , проходящую через B . Посмотрим, как меняется длина AC при перемещении B по m .

Пусть касательная n к ω , лежащая между l и m и параллельная им, пересекает AB и BC в точках P и Q , окружность ω' с центром I' и радиусом r' вписана в треугольник PBQ .

При изменении B коэффициент подобия треугольников PBQ и ABC остается постоянным. Поэтому отношения $PQ : AC$, $r' : r$, а значит и r' также постоянны.

Поскольку PQ равно общей внешней касательной к ω' и ω , а r' и r фиксированы, длина PQ минимальна при кратчайшем расстоянии II' , т.е. при $BI \perp l$. Так как $PQ : AC$ фиксировано длина AC минимальна в этом же случае.

Передвинем B вдоль m в точку B_1 , для которой $IB_1 \perp l$, затем передвинем IB_1 в направлении I до точки B_2 , для которой длина A_2C_2 равна исходной длине AC . Аналогично поступим с точкой D . Тогда $A_2B_2C_2D_2$ — четырехугольник, описанный вокруг ω и симметричный относительно B_2D_2 , причем $A_2C_2 = AC$ и $B_2D_2 \leq BD$.

Поступив аналогично с A_2 и C_2 , получим описанный около ω ромб $A_3B_3C_3D_3$, в котором $A_3C_3 \leq AC$ и $B_3D_3 \leq BD$. Для него

$$\frac{1}{A_3C_3^2} + \frac{1}{B_3D_3^2} = \frac{1}{4r^2}$$

, причем, если $A_3B_3C_3D_3 \neq ABCD$, то хотя бы одно из неравенств $A_3C_3 \leq AC$ и $B_3D_3 \leq BD$ — строгое.

8. (А.Заславский) Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке C_1 , а параллельные им прямые, проходящие через C и C' , соответственно, в точке C_2 . Точки A_1, A_2, B_1, B_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Первое решение. Сделаем полярное преобразование с некоторым центром O . Получим два треугольника (точки переобозначены заново) $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ с пересекающимися в O чевианами $A_1A'_1, B_1B'_1, C_1C'_1$ в первом треугольнике и $A_2A'_2, B_2B'_2, C_2C'_2$ во втором. Пусть P_a — точка пересечения A_1A_2 с $A'_1A'_2$, P_b и P_c определены аналогично. Докажем, что P_a, P_b и P_c лежат на одной прямой.

Сделаем проективное преобразование, переводящее прямую P_aP_b в бесконечно удаленную. Тогда $OA'_1 : A'_1A_1 = OA'_2 : A'_2A_2$, $OB'_1 : B'_1B_1 = OB'_2 : B'_2B_2$. Но $OA'_1/A'_1A_1 + OB'_1/B'_1B_1 + OC'_1/C'_1C_1 = S_{OB_1C_1}/S_{A_1B_1C_1} + S_{OC_1A_1}/S_{A_1B_1C_1} + S_{OA_1B_1}/S_{A_1B_1C_1} = 1$ (площади ориентированные) и аналогично для второго треугольника, значит $OC'_1 : C'_1C_1 = OC'_2 : C'_2C_2$, т.е. точка P_c тоже бесконечно удаленная.

Второе решение. Заметим, что для любой точки X прямой C_1C_2 выполнено равенство (площади ориентированные)

$$S_{XAB}S_{A'B'C'} = S_{XA'B'}S_{ABC}.$$

Для доказательства достаточно заметить справедливость этого равенства для точек C_1, C_2 . Нетрудно убедиться также, что это равенство выполняется не для всех точек плоскости, следовательно, оно задает прямую C_1C_2 . Аналогично пишутся уравнения прямых A_1A_2 и B_1B_2 . Очевидно, что точка, удовлетворяющая двум из этих уравнений, удовлетворяет и третьему.