Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 31 июля

Условия задач

8 класс. Первый день

8.1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписанная окружность касается катета BC в точке K. Докажите, что хорда вписанной окружности, высекаемая прямой AK, в два раза больше, чем расстояние от вершины C до этой прямой.

8.2. Около прямоугольника $ABCD$ описана окружность. На меньшей дуге BC окружности взята произвольная точка E. К окружности проведена касательная в точке B, пересекающая прямую CE в точке G. Отрезки AE и BD пересекаются в точке K. Докажите, что прямые GK и AD перпендикулярны.

8.3. В треугольнике ABC угол A равен 60°; AA', BB' и CC' — биссектрисы. Докажите, что $\angle B'A'C' \leqslant 60^\circ$.

8.4. Найдите все такие конфигурации из шести точек общего положения на плоскости, что треугольник, образованный любыми тремя из них, равен треугольнику, образованному тремя остальными.

Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 31 июля

Условия задач

8 класс. Первый день

8.1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписанная окружность касается катета BC в точке K. Докажите, что хорда вписанной окружности, высекаемая прямой AK, в два раза больше, чем расстояние от вершины C до этой прямой.

8.2. Около прямоугольника $ABCD$ описана окружность. На меньшей дуге BC окружности взята произвольная точка E. К окружности проведена касательная в точке B, пересекающая прямую CE в точке G. Отрезки AE и BD пересекаются в точке K. Докажите, что прямые GK и AD перпендикулярны.

8.3. В треугольнике ABC угол A равен 60°; AA', BB' и CC' — биссектрисы. Докажите, что $\angle B'A'C' \leqslant 60^\circ$.

8.4. Найдите все такие конфигурации из шести точек общего положения на плоскости, что треугольник, образованный любыми тремя из них, равен треугольнику, образованному тремя остальными.

Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 1 августа

Условия задач

8 класс. Второй день

8.5. На стороне AB квадрата $ABCD$ вне его построен равнобедренный треугольник ABE ($AE = BE$). Пусть M — середина AE, O — точка пересечения AC и BD, K — точка пересечения ED и OM. Докажите, что $EK = KO$.

8.6. В четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие углы. Кроме того, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BD = B_1D_1$. Обязательно ли четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны?

8.7. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно лежат одна вне другой. На этих окружностях взяты точки C_1 и C_2 соответственно, лежащие по одну сторону от прямой O_1O_2. Луч O_1C_1 пересекает ω_2 в точках A_2 и B_2, а луч O_2C_2 пересекает ω_1 в точках A_1 и B_1.

Докажите, что $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2B_2C_2$ тогда и только тогда, когда $C_1C_2 \parallel O_1O_2$.

8.8. В фиксированном треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, D — произвольная точка на стороне BC, серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BI и CI в точках F и E соответственно. Найдите геометрическое место ортоцентров треугольников EIF.

Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 1 августа

Условия задач

8 класс. Второй день

8.5. На стороне AB квадрата $ABCD$ вне его построен равнобедренный треугольник ABE ($AE = BE$). Пусть M — середина AE, O — точка пересечения AC и BD, K — точка пересечения ED и OM. Докажите, что $EK = KO$.

8.6. В четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответствующие углы. Кроме того, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BD = B_1D_1$. Обязательно ли четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны?

8.7. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно лежат одна вне другой. На этих окружностях взяты точки C_1 и C_2 соответственно, лежащие по одну сторону от прямой O_1O_2. Луч O_1C_1 пересекает ω_2 в точках A_2 и B_2, а луч O_2C_2 пересекает ω_1 в точках A_1 и B_1.

Докажите, что $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2B_2C_2$ тогда и только тогда, когда $C_1C_2 \parallel O_1O_2$.

8.8. В фиксированном треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, D — произвольная точка на стороне BC, серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BI и CI в точках F и E соответственно. Найдите геометрическое место ортоцентров треугольников EIF.

Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 31 июля

Условия задач

9 класс. Первый день

9.1. Пусть M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, проходящая через C и M, пересекает прямые BC и AC в точках P и Q соответственно. Пусть c_1, c_2 — окружности с центрами P, Q и радиусами BP, AQ соответственно. Докажите, что c_1, c_2 и описанная окружность треугольника ABC проходят через одну точку.

9.2. Дан треугольник ABC и окружность γ с центром в точке A, которая пересекает стороны AB и AC. Пусть общая хорда описанной окружности треугольника и окружности γ пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Отрезки CX и BY пересекают γ в точках S и T соответственно. Описанные окружности треугольников ACT и BAS пересекаются в точках A и P. Докажите, что прямые CX, BY и AP пересекаются в одной точке.

9.3. Вершины треугольника DEF лежат на разных сторонах треугольника ABC. Отрезки касательных, проведенных из центра вписанной в треугольник DEF окружности к вневписанным окружностям треугольника ABC, равны. Докажите, что $4S_{DEF} \geqslant S_{ABC}$.

9.4. Дана окружность ω и ее хорда BC. Точка A движется по большей из дуг BC. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC; D и E — такие точки на сторонах AB и AC, что H — середина отрезка DE; O_A — центр описанной окружности треугольника ADE. Докажите, что все точки O_A лежат на одной окружности.

Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 31 июля

Условия задач

9 класс. Первый день

9.1. Пусть M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, проходящая через C и M, пересекает прямые BC и AC в точках P и Q соответственно. Пусть c_1, c_2 — окружности с центрами P, Q и радиусами BP, AQ соответственно. Докажите, что c_1, c_2 и описанная окружность треугольника ABC проходят через одну точку.

9.2. Дан треугольник ABC и окружность γ с центром в точке A, которая пересекает стороны AB и AC. Пусть общая хорда описанной окружности треугольника и окружности γ пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Отрезки CX и BY пересекают γ в точках S и T соответственно. Описанные окружности треугольников ACT и BAS пересекаются в точках A и P. Докажите, что прямые CX, BY и AP пересекаются в одной точке.

9.3. Вершины треугольника DEF лежат на разных сторонах треугольника ABC. Отрезки касательных, проведенных из центра вписанной в треугольник DEF окружности к вневписанным окружностям треугольника ABC, равны. Докажите, что $4S_{DEF} \geqslant S_{ABC}$.

9.4. Дана окружность ω и ее хорда BC. Точка A движется по большей из дуг BC. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC; D и E — такие точки на сторонах AB и AC, что H — середина отрезка DE; O_A — центр описанной окружности треугольника ADE. Докажите, что все точки O_A лежат на одной окружности.

Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 1 августа

Условия задач

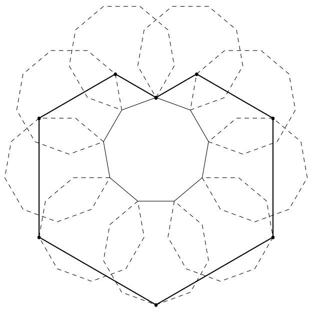
9 класс. Второй день

9.5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. BL и CN — биссектрисы треугольников ABD и ACD соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников ABL и CDN, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AD, не содержащей точку B.

9.6. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника ABC и центр вневписанной окружности треугольника CDA, касающейся стороны AC, лежат на одной прямой.

9.7. К описанной окружности треугольника ABC проведены касательные в точках B и C. Лучи CC_1 и BB_1, где B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB, пересекают эти касательные в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

9.8. Правильный n-угольник со стороной 1 вращается вокруг другого такого же n-угольника, как показано на рисунке. Последовательные положения одной из его вершин в моменты, когда n-угольники имеют общую сторону, образуют замкнутую ломаную κ.



Докажите, что κ ограничивает площадь, равную $6A - 2B$, где A, B — площади правильных n-угольников с единичной стороной и единичным радиусом описанной окружности соответственно.

Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 1 августа

Условия задач

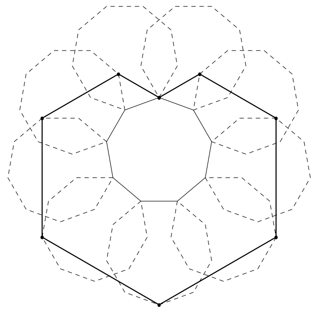
9 класс. Второй день

9.5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. BL и CN — биссектрисы треугольников ABD и ACD соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников ABL и CDN, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AD, не содержащей точку B.

9.6. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника ABC и центр вневписанной окружности треугольника CDA, касающейся стороны AC, лежат на одной прямой.

9.7. К описанной окружности треугольника ABC проведены касательные в точках B и C. Лучи CC_1 и BB_1, где B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB, пересекают эти касательные в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

9.8. Правильный n-угольник со стороной 1 вращается вокруг другого такого же n-угольника, как показано на рисунке. Последовательные положения одной из его вершин в моменты, когда n-угольники имеют общую сторону, образуют замкнутую ломаную κ.



Докажите, что κ ограничивает площадь, равную $6A - 2B$, где A, B — площади правильных n-угольников с единичной стороной и единичным радиусом описанной окружности соответственно.

Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 31 июля

Условия задач

10 класс. Первый день

10.1. Высоты AH и CH остроугольного треугольника ABC пересекают внутреннюю биссектрису угла B в точках L_1 и P_1, а внешнюю — в точках L_2 и P_2. Докажите, что ортоцентры треугольников HL_1P_1, HL_2P_2 и вершина B лежат на одной прямой.

10.2. В угол с вершиной C вписана фиксированная окружность ω. Рассматриваются окружности, проходящие через C, касающиеся ω внешним образом и пересекающие стороны угла в точках A и B. Докажите, что периметры всех треугольников ABC равны.

10.3. Дан вписанный n-угольник. Оказалось, что середины всех его сторон лежат на одной окружности. Стороны n-угольника отсекают от этой окружности n дуг, лежащих вне n-угольника. Докажите, что эти дуги можно покрасить в красный и синий цвет так, чтобы сумма длин красных дуг равнялась сумме длин синих.

10.4. На плоскости дано конечное множество точек S общего положения, окрашенных в красный и зеленый цвета. Назовем множество *разделимым*, если для него найдется такой треугольник, что все точки одного цвета лежат строго внутри, а все точки другого — строго вне треугольника. Известно, что любые 1000 точек из S образуют разделимое множество. Обязательно ли все множество S разделимо?

Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 31 июля

Условия задач

10 класс. Первый день

10.1. Высоты AH и CH остроугольного треугольника ABC пересекают внутреннюю биссектрису угла B в точках L_1 и P_1, а внешнюю — в точках L_2 и P_2. Докажите, что ортоцентры треугольников HL_1P_1, HL_2P_2 и вершина B лежат на одной прямой.

10.2. В угол с вершиной C вписана фиксированная окружность ω. Рассматриваются окружности, проходящие через C, касающиеся ω внешним образом и пересекающие стороны угла в точках A и B. Докажите, что периметры всех треугольников ABC равны.

10.3. Дан вписанный n-угольник. Оказалось, что середины всех его сторон лежат на одной окружности. Стороны n-угольника отсекают от этой окружности n дуг, лежащих вне n-угольника. Докажите, что эти дуги можно покрасить в красный и синий цвет так, чтобы сумма длин красных дуг равнялась сумме длин синих.

10.4. На плоскости дано конечное множество точек S общего положения, окрашенных в красный и зеленый цвета. Назовем множество *разделимым*, если для него найдется такой треугольник, что все точки одного цвета лежат строго внутри, а все точки другого — строго вне треугольника. Известно, что любые 1000 точек из S образуют разделимое множество. Обязательно ли все множество S разделимо?

Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 1 августа

Условия задач

10 класс. Второй день

10.5. В треугольнике ABC через центр I вписанной окружности w провели прямую, параллельную стороне BC, до пересечения с вписанной окружностью в точках A_B и A_C (A_B находится в той же полуплоскости относительно прямой AI, что и точка B). После этого нашли точку пересечения прямых BA_B и CA_C и обозначили её через A_1. Аналогично построили точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

10.6. В окружности ω, описанной около треугольника ABC, хорда KL проходит через середину M отрезка AB и перпендикулярна ей (точки K и C лежат по разные стороны от AB). Некоторая окружность проходит через точки L и M и пересекает отрезок CK в точках P и Q (Q лежит на отрезке KP). Пусть LQ пересекает описанную окружность треугольника KMQ вторично в точке R. Докажите, что четырехугольник $APBR$ вписанный.

10.7. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности радиуса 1. Найдите наибольшее возможное значение величины $\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{BD^2}$.

10.8. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке C_1, а параллельные им прямые, проходящие через C и C' соответственно, пересекаются в точке C_2. Точки A_1, A_2, B_1 и B_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

Четырнадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2018 г., 1 августа

Условия задач

10 класс. Второй день

10.5. В треугольнике ABC через центр I вписанной окружности w провели прямую, параллельную стороне BC, до пересечения с вписанной окружностью в точках A_B и A_C (A_B находится в той же полуплоскости относительно прямой AI, что и точка B). После этого нашли точку пересечения прямых BA_B и CA_C и обозначили её через A_1. Аналогично построили точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

10.6. В окружности ω, описанной около треугольника ABC, хорда KL проходит через середину M отрезка AB и перпендикулярна ей (точки K и C лежат по разные стороны от AB). Некоторая окружность проходит через точки L и M и пересекает отрезок CK в точках P и Q (Q лежит на отрезке KP). Пусть LQ пересекает описанную окружность треугольника KMQ вторично в точке R. Докажите, что четырехугольник $APBR$ вписанный.

10.7. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности радиуса 1. Найдите наибольшее возможное значение величины $\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{BD^2}$.

10.8. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке C_1, а параллельные им прямые, проходящие через C и C' соответственно, пересекаются в точке C_2. Точки A_1, A_2, B_1 и B_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или попарно параллельны.