Четырнадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Четырнадцатой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники последних четырех классов средней школы. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решенные задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого ее пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. *Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением.* Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме **не раньше 8 января и не позднее 1 апреля 2018 года**. Для этого нужно зайти на сайт **https://contest.yandex.ru/geomshar/**, справа наверху указать язык (русский), слева наверху нажать "Регистрация"и следовать появляющимся инструкциям.

ВНИМАНИЕ:

1. Решение каждой задачи должно содержаться в отдельном файле формата pdf, doc или jpg. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. *В последних двух случаях необходимо убедиться, что файл хорошо читается.*

2. Если несколько раз загружается решение одной и той же задачи, то в системе проверки остается только последнее. Поэтому при необходимости что-то изменить Вам следует снова загрузить решение задачи полностью.

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomshar@yandex.ru. (НЕ присылайте работы на этот адрес!)**

Финальный тур состоится летом 2018 года под Москвой. На него будут приглашены победители заочного тура, не закончившие к этому времени школу. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** не позднее 1 июня 2018 г. Свои результаты Вы сможете узнать в это же время по адресу **geomshar@yandex.ru**.

1. (8 класс) Внутри квадрата расположены три окружности, каждая из которых касается внешним образом двух других, а также касается двух сторон квадрата. Докажите, что радиусы двух из данных окружностей одинаковы.

2. (8 класс) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и DC пересекаются в точке E, а прямые BC и AD — в точке F. В треугольнике AED отмечен центр вписанной окружности I, а из точки F проведен луч, перпендикулярный биссектрисе угла AID. В каком отношении этот луч делит угол AFB?

3. (8 класс) Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, точка D — ее середина, E — проекция D на AB. Известно, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL равнобедренный.

4. (8 класс) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. По дуге AD, не содержащей точек B и C, движется точка P. Фиксированная прямая l, перпендикулярная прямой BC, пересекает лучи BP, CP в точках B_0, C_0 соответственно. Докажите, что касательная, проведенная к описанной окружности треугольника PB_0C_0 в точке P, проходит через фиксированную точку.

5. (8-9 классы) У равносторонних треугольников ABC и CDE вершина C лежит на отрезке AE, вершины B и D по одну сторону от этого отрезка. Описанные около треугольников окружности с центрами O_1 и O_2 повторно пересекаются в точке F. Прямая O_1O_2 пересекает AD в точке K. Докажите, что $AK = BF$.

6. (8-9 классы) В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) $BC = 2AC$, CH — высота, O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники ACH и BCH, а O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Пусть H_1, H_2 и H_0 — проекции точек O_1, O_2 и O на гипотенузу. Докажите, что $H_1H = HH_0 = H_0H_2$.

7. (8-9 классы) Пусть E — одна из двух точек пересечения окружностей w_1 и w_2. Пусть AB — общая внешняя касательная этих окружностей, прямая CD параллельна AB, причем точки A и C лежат на w_1, а точки B и D — на w_2. Окружности ABE и CDE повторно пересекаются в точке F. Докажите, что F делит одну из дуг CD окружности CDE пополам.

8. (8-9 классы) Постройте треугольник по точке Нагеля, вершине B и основанию высоты, проведенной из этой вершины.

9. (8-9 классы) В остроугольном треугольнике расположен квадрат: две его вершины находятся на одной из сторон треугольника, а две другие по одной на других сторонах. Аналогичные квадраты построены для двух других сторон треугольника. Докажите, что из трех отрезков, равных сторонам этих квадратов, можно составить остроугольный треугольник.

10. (8-9 классы) На плоскости даны 2018 точек, все попарные расстояния между которыми различны. Для каждой точки отметили ближайшую к ней среди остальных. Какое наименьшее число точек может оказаться отмечено?

11. (8-9 классы) Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC. Докажите, что существует единственная пара точек M, N, лежащих соответственно на сторонах AC, BC, такая, что $\angle AIM = \angle BIN$ и $MN \parallel AB$.

12. (8-9 классы) Пусть D — основание внешней биссектрисы угла B треугольника ABC, в котором $AB > BC$. Сторона AC касается вписанной и вневписанной окружностей в точках K и K_1 соответственно, точки I и I_1 — центры этих окружностей. Прямая BK пересекает DI_1 в точке X, а BK_1 пересекает DI в точке Y. Докажите, что $XY \perp AC$.

13. (9-11 классы) На окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, отмечены точки M и N — середины дуг AB и CD соответственно. Докажите, что MN делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанных окружностей треугольников ABC и ADC.

14. (9-11 классы) Дан треугольник ABC с прямым углом C. Точки K, L, M — середины сторон AB, BC, CA соответственно, N — точка на стороне AB. Прямая CN пересекает KM и KL в точках P и Q. Точки S, T на сторонах AC, BC таковы, что четырехугольники $APQS$, $BPQT$ — вписанные. Докажите, что

    а) если CN — биссектриса, то прямые CN, ML, ST пересекаются в одной точке;

    б) если CN — высота, то ST проходит через середину ML.

15. (9-11 классы) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_1, BH_2, CH_3, которые пересекаются в ортоцентре H. Точки P и Q симметричны H_2 и H_3 относительно H. Описанная окружность треугольника PH_1Q пересекает во второй раз высоты BH_2 и CH_3 в точках R и S. Докажите, что RS — средняя линия треугольника ABC.

16. (9-11 классы) В треугольнике ABC, где $AB < BC$ биссектриса угла C пересекает в точке P прямую, параллельную AC и проходящую через вершину B, а в точке R — касательную из вершины B к описанной окружности треугольника. Точка R' симметрична R относительно AB. Докажите, что $\angle R'PB = \angle RPA$.

17. (10-11 классы) Окружности α, β, γ касаются друг друга внешним образом и касаются изнутри окружности Ω в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Общая внутренняя касательная к α и β пересекает не содержащую C_1 дугу A_1B_1 в точке C_2. Точки A_2, B_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

18. (10-11 классы) На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1, B_1 так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Лучи B_1A_1 и B_1C1 пересекают описанную окружность в точках A_2 и C_2. Докажите, что точки A, C, точка пересечения A_2C_2 с BB_1 и середина A_2C_2 лежат на одной окружности.

19. (10-11 классы) Имеется треугольник ABC и линейка, на которой отмечены отрезки, равные сторонам треугольника. Постройте этой линейкой ортоцентр треугольника, образованного точками касания вписанной в треугольник ABC окружности.

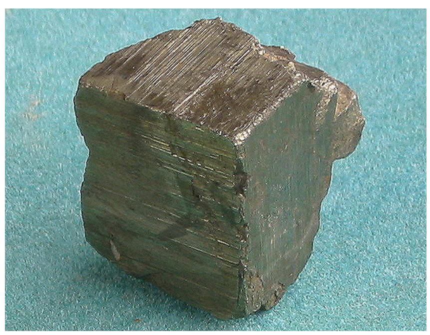
20. (10-11 классы) Дан неравнобедренный треугольник ABC. Вписанная окружность касается его сторон AB, AC и BC в точках D, E, F соответственно. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке N. Пусть T – ближайшая к N точка пересечения прямой AN с вписанной окружностью, а K – точка пересечения прямых DE и FT. Докажите, что $AK||BC$.

21. (10-11 классы) На плоскости даны прямая l и точка A вне ее. Найдите геометрическое место инцентров остроугольных треугольников с вершиной A, у которых одна сторона лежит на прямой l.

22. (10-11 классы) Шесть кругов с радиусами, равными 1, расположены на плоскости так, что расстояние между центрами любых двух из них больше d. При каком наименьшем d можно утверждать, что найдется прямая, не пересекающая ни одного из кругов, по каждую сторону от которой лежат три круга?

23. (10-11 классы) Плоскость разбита на выпуклые семиугольники единичного диаметра. Докажите, что любой круг радиуса 200 пересекает не менее миллиарда из них.

24. (10-11 классы) Кристалл пирита представляет собой параллелепипед, на каждую грань которого нанесена штриховка.



На любых двух соседних гранях штриховка перпендикулярна. Существует ли выпуклый многогранник с числом граней, не равным 6, грани которого можно заштриховать аналогичным образом?