Четырнадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Л.Штейнгарц, Израиль, 8 класс) Внутри квадрата расположены три окружности, каждая из которых касается внешним образом двух других, а также касается двух сторон квадрата. Докажите, что радиусы двух из данных окружностей одинаковы.

   Решение. Очевидно, что, если две окружности вписаны в один угол квадрата, то третья окружность не может касаться их обеих и двух сторон. Поэтому можно считать, что окружности вписаны в углы A, B и C квадрата $ABCD$. Но тогда окружности, вписанные в углы A и C, симметричны относительно диагонали BD и, следовательно, равны.

2. (Н.Москвитин, 8 класс) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и DC пересекаются в точке E, а прямые BC и AD — в точке F. В треугольнике AED отмечен центр вписанной окружности I, а из точки F проведен луч, перпендикулярный биссектрисе угла AID. В каком отношении этот луч делит угол AFB?

   Ответ. $1 : 3$.

   Решение. Заметим, что угол между биссектрисами углов AED и AFB равен полусумме углов FAE и FCE, т.е. $90°$. Поэтому угол между биссектрисой угла AFB и лучом FK, где K — проекция F на биссектрису угла AID, равен $180° - \angle EIK = 180° - (90° + \angle A/2) - (180° - \angle A/2 - \angle D/2)/2 = (\angle D - \angle A)/4 = \angle AFB/4$ (рис.2), следовательно, и $\angle AFK = \angle AFB/4$.

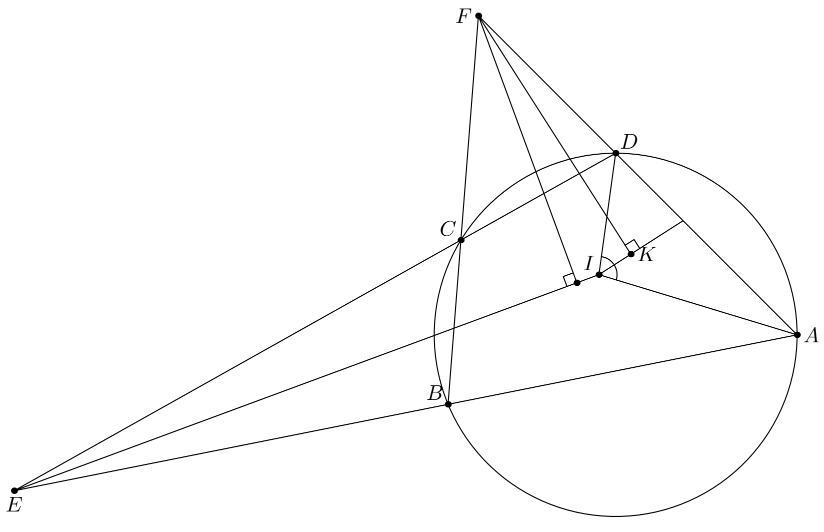


Рис. 2

3. (А.Заславский, 8 класс) Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, точка D — ее середина, E — проекция D на AB. Известно, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL равнобедренный.

   Решение. Пусть F — проекция L на AB, G — точка, симметричная E относительно F. Тогда по теореме Фалеса $AE = EF = FG$ и $AG = 3AE = AC$. Так как AL —

биссектриса угла A, а FL — серединный перпендикуляр к EG, получаем, что $CL = LG = LE$ (рис.3).

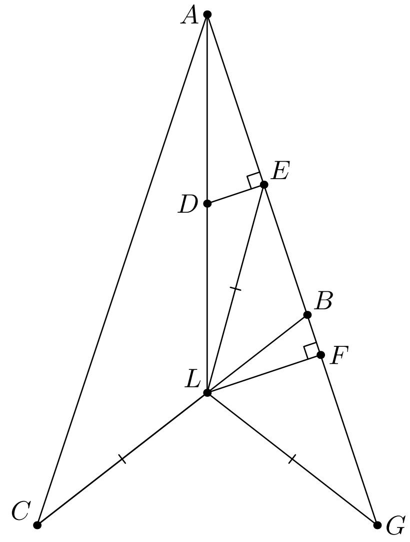


Рис. 3

4. (Д.Швецов, 8 класс) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. По дуге AD, не содержащей точек B и C, движется точка P. Фиксированная прямая l, перпендикулярная прямой BC, пересекает лучи BP, CP в точках B_0, C_0 соответственно. Докажите, что касательная, проведенная к описанной окружности треугольника PB_0C_0 в точке P, проходит через фиксированную точку.

   Решение. Пусть Q — вторая точка пересечения касательной с описанной окружностью четырехугольника. Тогда $\angle BPQ = \angle B_0C_0P = 90° - \angle BCP = 90° - \angle BQP$ (рис.4). Следовательно, $\angle PBQ = 90°$, т.е. PQ — диаметр окружности $ABCD$. Таким образом, все касательные проходят через центр окружности.

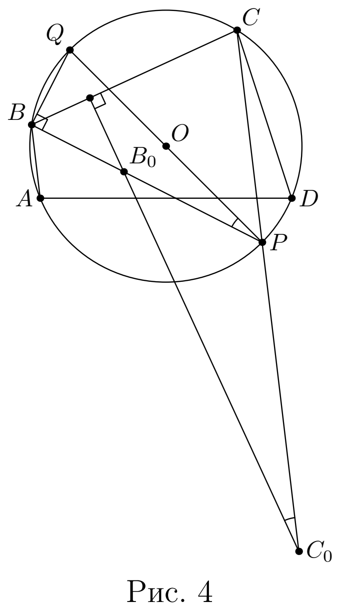


Рис. 4

5. (Н.Москвитин, 8–9 классы) У равносторонних треугольников ABC и CDE вершина C лежит на отрезке AE, вершины B и D по одну сторону от этого отрезка. Описанные около треугольников окружности с центрами O_1 и O_2 повторно пересекаются в точке F. Прямая O_1O_2 пересекает AD в точке K. Докажите, что $AK = BF$.

   Решение. Прежде всего, заметим, что треугольники ACD и BCE равны, поскольку $AC = BC$, $CD = CE$ и $\angle ACD = \angle BCE = 120°$. Кроме того, так как $\angle BFC = 120°$ и $\angle CFE = 60°$, точка F лежит на отрезке BE. Наконец, треугольник O_1CO_2 подобен треугольнику ACD, следовательно, $\angle CO_1K = \angle CAK$, т.е. точки A, O_1, K и C лежат на одной окружности (рис.5). Поэтому $\angle ACK = 180° - \angle AO_1K = 60° - \angle CO_1K = 60° - \angle CBF = \angle BCF$, что равносильно утверждению задачи.

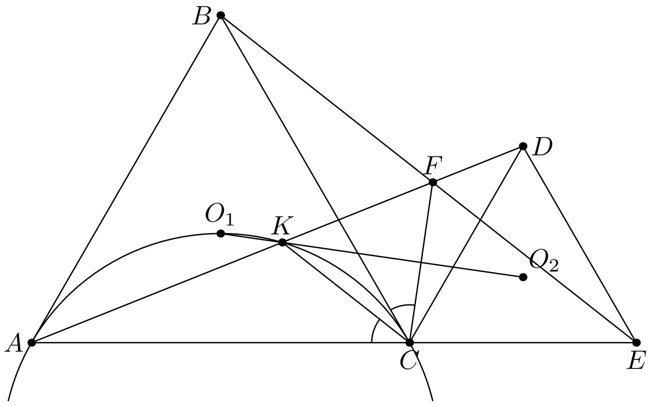


Рис. 5

6. (Л.Штейнгарц, Израиль, 8–9 классы) В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) $BC = 2AC$, CH — высота, O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники ACH и BCH, а O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Пусть H_1, H_2 и H_0 — проекции точек O_1, O_2 и O на гипотенузу. Докажите, что $H_1H = HH_0 = H_0H_2$.

   Решение. Из подобия треугольников HAC и HCB следует, что $HO_2 = 2HO_1$, а значит, $HH_2 = HH_1$. Таким образом, достаточно доказать, что $H_1H_0 = 2H_0H_2$. Но $H_1H_0 = AH_0 - AH_1 = AH_0(AB - AC)/AB = (AB + AC - BC)(AB - AC)/2AB = (BC^2 - BC(AB - AC))/2AB = BC(AC + BC - AB)/2AB$. Аналогично $H_0H_2 = AC(AC + BC - AB)/2AB$, откуда и следует искомое равенство.

7. (И.Спиридонов, 8–9 классы) Пусть E — одна из двух точек пересечения окружностей w_1 и w_2. Пусть AB — общая внешняя касательная этих окружностей, прямая CD параллельна AB, причем точки A и C лежат на w_1, а точки B и D — на w_2. Окружности ABE и CDE повторно пересекаются в точке F. Докажите, что F делит одну из дуг CD окружности CDE пополам.

   Решение. Пусть прямые AC и BF пересекаются в точке H, а прямые BD и AF – в точке G.

   Прямая AB касается описанной вокруг CAE окружности, значит, $(CA, CE) = (AB, AE)$. Четырехугольник $ABEF$ вписанный, следовательно,$(AB, AE) = (FB, FE)$. Получаем, что

$$(CH, CE) = (CA, CE) = (AB, AE) = (FB, FE) = (FH, FE)$$

$$(CH, CE) = (FH, FE)$$

Значит, четырехугольник $CHFE$ вписанный. Аналогичными рассуждениями получаем, что четырехугольник $DGFE$ вписанный. По условию, $CFED$ - вписанный. Значит, точки C, D, E, F, H, G лежат на одной окружности (рис.7).

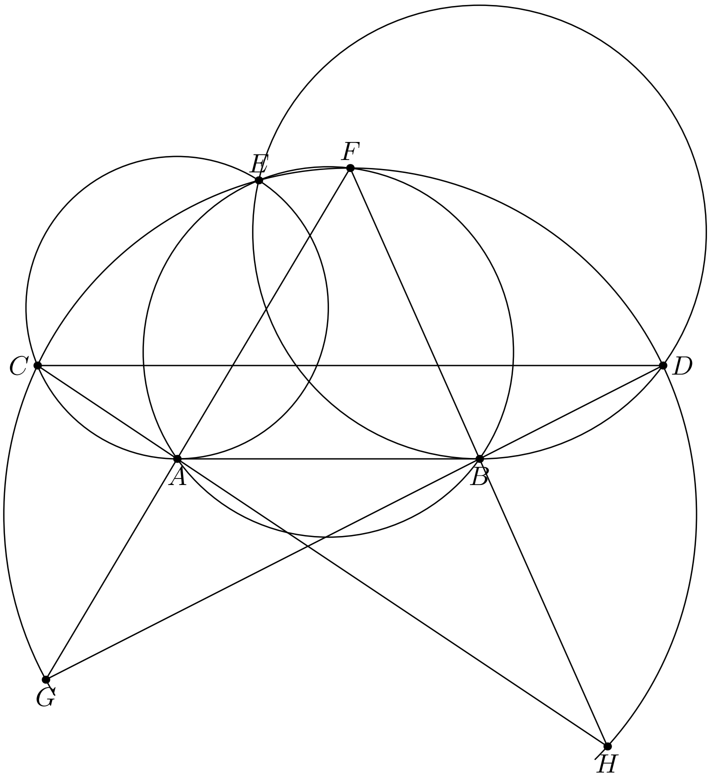


Рис. 7

Рассмотрим вписанный шестиугольник $FFHCDG$ и применим к нему теорему Паскаля. Получаем, что точки пересечения пар прямых FF и CD, FH и DG, HC и GF коллинеарны. (В данном случае прямая FF – это касательная в точке F к окружности CFD, обозначим эту прямую l). То есть точки A, B и точка пересечения l и CD лежат на одной прямой. Но $AB \parallel CD$, значит, $l \parallel CD$, а отсюда следует, что F — середина дуги CD.

8. (К.Кадыров, Украина, 8–9 классы) Постройте треугольник по точке Нагеля, вершине B и основанию высоты, проведенной из этой вершины.

   Решение. Поскольку центр тяжести треугольника делит отрезок между точкой Нагеля N и центром вписанной окружности в отношении $2:1$, мы можем, зная высоту треугольника и расстояние от точки Нагеля до его основания, найти радиус вписанной окружности. Теперь, используя формулы площади треугольника $S = bh_b/2 = pr = (p-b)r_b$, мы можем найти радиус r_b вневписанной окружности. Так как эта окружность касается основания треугольника в точке его пересечения с отрезком BN, мы можем построить саму окружность и, проведя к ней касательные из точки B, восстановить треугольник.

9. (Б.Френкин, 8–9 классы) В остроугольном треугольнике расположен квадрат: две его вершины находятся на одной из сторон треугольника, а две другие по одной на других сторонах. Аналогичные квадраты построены для двух других сторон треугольника. Докажите, что из трех отрезков, равных сторонам этих квадратов, можно составить остроугольный треугольник.

Решение. Пусть вершины K, L наибольшего из трех квадратов лежат на стороне AB, а его вершины M, N — на сторонах BC, AC соответственно. Опустим перпендикуляры MX, NY на AC, BC соответственно и проведем через M прямую, параллельную AC и пересекающую AB в точке Z (рис.9). Так как $MX < MN = ML < MZ$, сторона квадрата, вписанного в треугольник, с основанием на AC больше MX. Аналогично сторона вписанного квадрата с основанием на BC больше NY. Поскольку $MN^2 - MX^2 = NX^2 < NY^2$, из отрезков MN, MX, NY можно составить остроугольный треугольник. Следовательно, треугольник составленный из сторон трех квадратов тоже будет остроугольным.

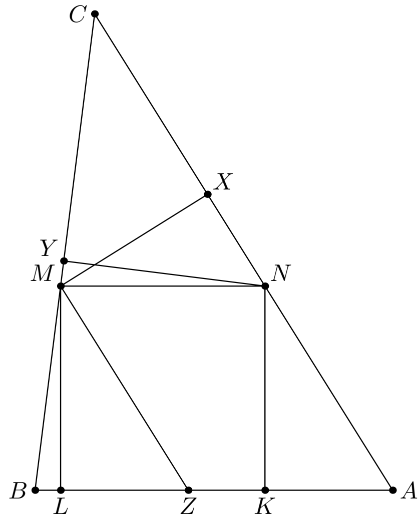


Рис. 9

10. (Фольклор, 8–9 классы) На плоскости даны 2018 точек, все попарные расстояния между которыми различны. Для каждой точки отметили ближайшую к ней среди остальных. Какое наименьшее число точек может оказаться отмечено?

Ответ. 449.

Решение. Разобьем точки на классы так, что для всех точек одного класса ближайшей является одна и та же точка. Заметим, что каждый класс содержит не больше пяти точек. Действительно, пусть точка B — ближайшая к точкам $A_1, A_2, \ldots, A_n$, перечисленным в порядке обхода вокруг B. Тогда A_1A_2 — наибольшая сторона в треугольнике A_1A_2B и, значит, $\angle A_1BA_2 > 60°$. Аналогичное верно для углов $A_2BA_3, \ldots$, A_nBA_1, поэтому $n \leq 5$. Если $n = 5$, то нетрудно видеть, что одна из точек $A_1, \ldots, A_5$ (скажем, A_1) является ближайшей для B. Аналогичные рассуждения показывают, что класс точки B содержит меньше пяти точек. Следовательно, из n точек отмечено будет не меньше, чем $2n/9$, т.е. при $n = 2018$ не меньше 449 точек.

С другой стороны, в изображенной на рис.10 конфигурации из 9 точек для пяти точек, отмеченных кружками, ближайшей будет точка A, а для четырех точек, отмеченных квадратиками, — точка B. Поэтому, если взять 224 таких группы, расположенных далеко друг от друга, и добавить к одной из них две точки, для которых ближайшей будет точка C, то отмечено будет $223 \cdot 2 + 3 = 449$ точек.

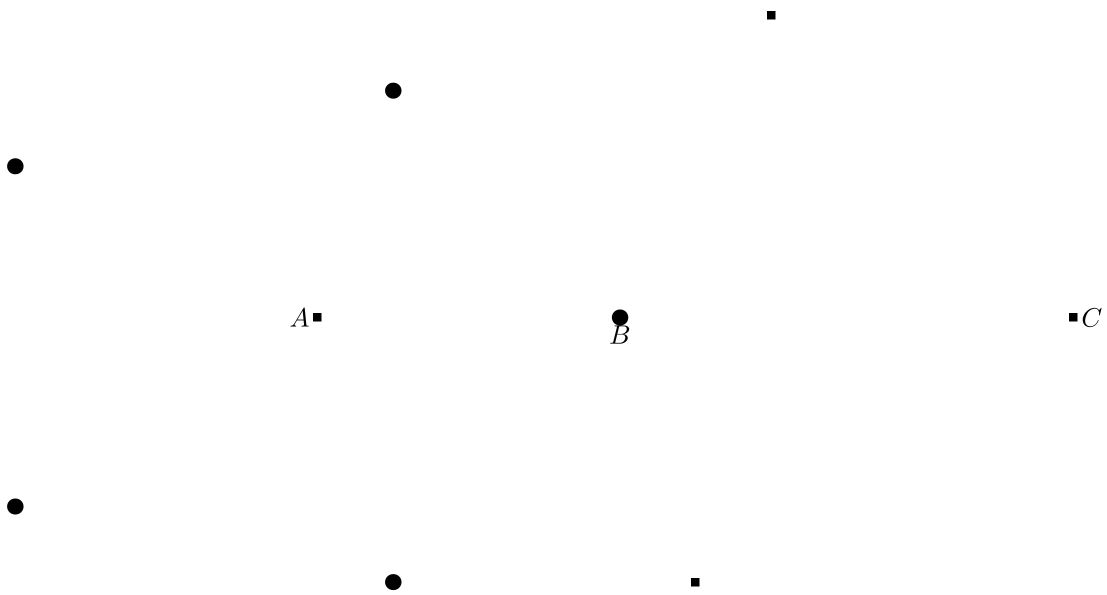


Рис. 10

11. (А.Заславский, 8–9 классы) Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC. Докажите, что существует единственная пара точек M, N, лежащих соответственно на сторонах AC, BC, такая, что $\angle AIM = \angle BIN$ и $MN \parallel AB$.

Решение. Проведем через A и B прямые, параллельные IM, IN соответственно. Так как $MN \parallel AB$, эти прямые пересекутся в точке J, лежащей на луче CI и такой, что $\angle IAJ = \angle IBJ$. Тогда радиусы окружностей AIJ и BIJ равны, т.е эти окружности симметричны относительно прямой IJ. Значит, окружность AIJ проходит через точку B', симметричную B относительно биссектрисы угла C (рис.11). Но точки A, B, I и B' лежат на одной окружности. Следовательно, окружности AIJ и BIJ совпадают и J — центр вневписанной окружности треугольника. Таким образом, $\angle AIM = \angle BIN = 90°$.

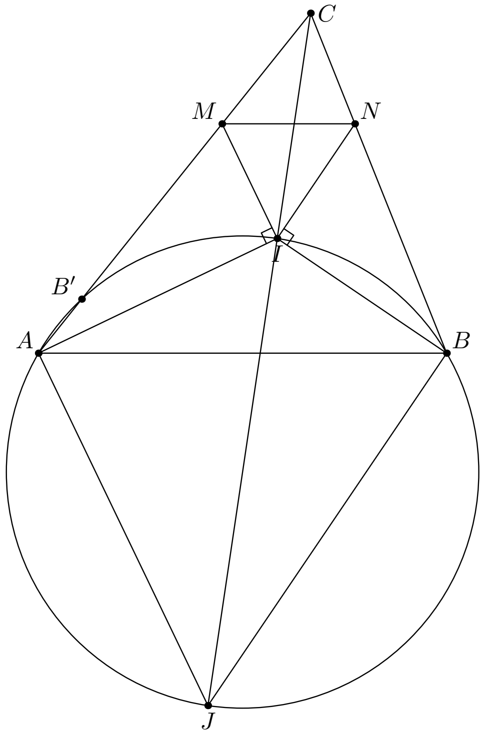


Рис. 11

12. (А.Дидин, 8–9 классы) Пусть D — основание внешней биссектрисы угла B треугольника ABC, в котором $AB > BC$. Сторона AC касается вписанной и вневписанной окружностей в точках K и K_1 соответственно, точки I и I_1 — центры этих окружностей. Прямая BK пересекает DI_1 в точке X, а BK_1 пересекает DI в точке Y. Докажите, что $XY \perp AC$.

Решение. Так как точки I и I_1 лежат на биссектрисе угла B, то $BD \perp BI$. Поэтому точки B, K лежат на окружности с диаметром BI, а точки B, K_1 — на окружности с диаметром BI_1. Следовательно, $\angle YDK = \angle IBX$, $\angle YBI_1 = \angle KDX$, $\angle YBX = \angle YDX$ и точки B, D, X, Y лежат на одной окружности (рис.12). Поэтому $\angle XYD = \angle XBD = 90^\circ - \angle YDK$, т.е. $XY \perp AC$.

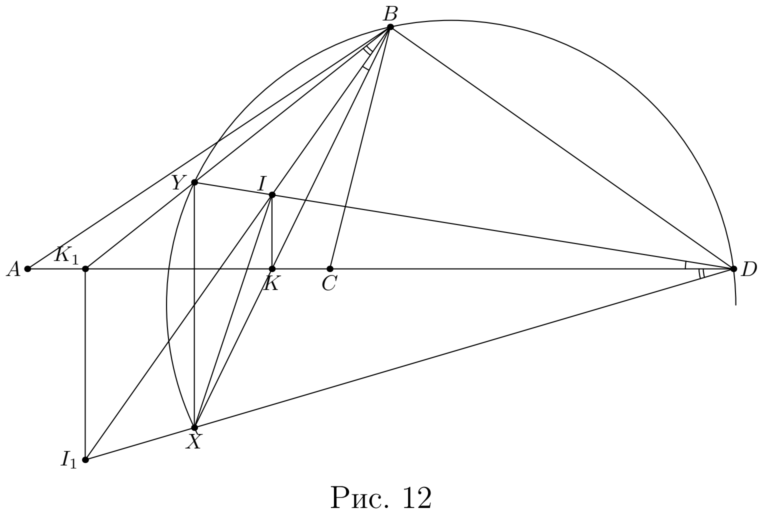


Рис. 12

13. (Г.Фельдман, 9–11 классы) На окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, отмечены точки M и N — середины дуг AB и CD соответственно. Докажите, что MN делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанных окружностей треугольников ABC и ADC.

Решение. Очевидно, что центры I, J вписанных окружностей треугольников ABC и ADC лежат на отрезках CM и AN соответственно. При этом, по теореме о трезубце $IM = AM = 2R\sin\angle ANM$. Значит, расстояние от I до прямой MN равно $IM\sin\angle NMC = 2R\sin\angle ANM\sin\angle NMC$. Аналогично получаем такое же выражение для расстояния от J до MN. Поскольку точки I и J лежат по разные стороны от MN, отсюда следует утверждение задачи (рис.13).

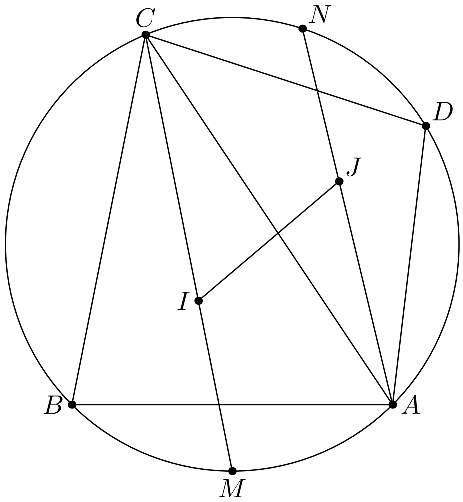


Рис. 13

14. (М.Кунгожин, Казахстан, 9–11 классы) Дан треугольник ABC с прямым углом C. Точки K, L, M — середины сторон AB, BC, CA соответственно, N — точка на стороне AB. Прямая CN пересекает KM и KL в точках P и Q. Точки S, T на сторонах AC, BC таковы, что четырехугольники $APQS$, $BPQT$ — вписанные. Докажите, что

а) если CN — биссектриса, то прямые CN, ML, ST пересекаются в одной точке;

б) если CN — высота, то ST проходит через середину ML.

Решение. а) Из условия следует, что $CP = CM\sqrt{2} = AC/\sqrt{2}$, $CQ = BC/\sqrt{2}$. Поэтому $CS = CP \cdot CQ/AC = BC/2 = BL$. Аналогично $CT = CM$. Следовательно, отрезки ML и ST симметричны относительно прямой CN и их точка пересечения лежит на этой прямой.

б) Из подобия треугольников CMP, QLC и ACB получаем, что $CP = AC\cdot AB/2BC$, $CQ = BC \cdot AB/2AC$. Значит, $CS = AB^2/4AC$, $CT = AB^2/4BC$ и треугольник CST подобен треугольнику CBA. Тогда прямая ST перпендикулярна медиане треугольника ABC, а поскольку высота треугольника CST равна $AB/4$, ее основание совпадает с серединой ML.

15. (Д. Хилько, Украина, 9–11 классы) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_1, BH_2, CH_3, которые пересекаются в ортоцентре H. Точки P и Q

симметричны H_2 и H_3 относительно H. Описанная окружность треугольника PH_1Q пересекает во второй раз высоты BH_2 и CH_3 в точках R и S. Докажите, что RS — средняя линия треугольника ABC.

Решение. Рассмотрим точку пересечения R' средней линии M_2M_3 с высотой BH_2. Докажем, что она лежит на описанной окружности треугольника PH_1Q.

Так как четырехугольник BH_3H_2C вписанный, $H_3H \cdot HC = H_2H \cdot HB$. Отсюда $HB \cdot HP = HC \cdot HQ$. Тогда четырехугольник $PBQC$ вписанный, откуда $\angle H_2PQ = \angle BCQ = \angle BAH_1$. Также, так как R' лежит на средней линии треугольника ABC, получаем, что $\angle H_1AR' = \angle AH_1R'$. Рассмотрим треугольники H_3HH_1 и BM_3R'. Они подобны, так как $\angle M_3BR' = \angle H_3H_1H$, а $\angle M_3R'B = \angle HH_3H_1$. То есть

$$\frac{H_3H_1}{M_3R'} = \frac{HH_1}{BM_3}.$$

Так как $H_3H = HQ$ и $BM_3 = M_3A$,

$$\frac{QH}{M_3R'} = \frac{HH_1}{AM_3}.$$

Очевидно, что $\angle QHH_1 = \angle B = \angle AM_3R'$. Из этого и предыдущего равенств получаем, что треугольники AM_3R' и HH_1Q подобны, тогда $\angle HH_1Q = \angle M_3AR'$ как соответственные углы. Тогда $\angle QH_1R' = \angle HH_1Q - \angle HH_1R' = \angle M_3AR' - \angle R'AH_1 = \angle BAH_1 = \angle R'PQ$. Значит, четырехугольник PH_1QR' вписанный (рис.15). Тогда $R = R'$, а значит, R лежит на средней линии треугольника ABC. Аналогично точка S лежит на средней линии, откуда получаем утверждение задачи.

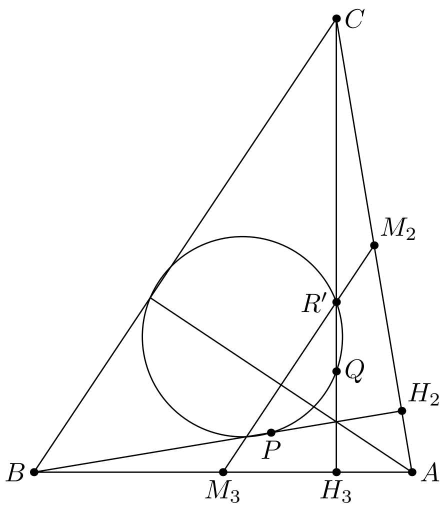


Рис. 15

16. (П.Рябов, 9–11 классы) В треугольнике ABC, где $AB < BC$ биссектриса угла C пересекает в точке P прямую, параллельную AC и проходящую через вершину B, а в точке R — касательную из вершины B к описанной окружности треугольника. Точка R' симметрична R относительно AB. Докажите, что $\angle R'PB = \angle RPA$.

Решение. Поскольку прямые BR и BP симметричны относительно биссектрисы угла B, точки P и R изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Поэтому $\angle R'AB = \angle RAB = \pi - \angle CAP$, т.е прямые AR' и AC симметричны относительно биссектрисы угла A. Аналогично прямые BR' и BC симметричны относительно биссектрисы угла B. Следовательно, точки R' и C изогонально сопряжены относительно треугольника ABP, откуда и получаем утверждение задачи (рис.16).

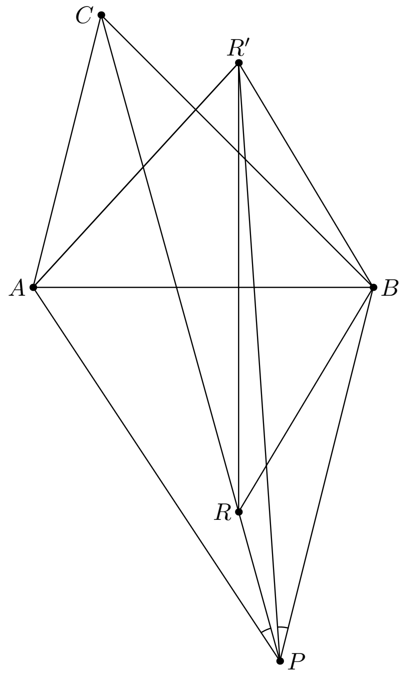


Рис. 16

17. (С.Тахаев, 10–11 классы) Окружности α, β, γ касаются друг друга внешним образом и касаются изнутри окружности Ω в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Общая внутренняя касательная к α и β пересекает не содержащую C_1 дугу A_1B_1 в точке C_2. Точки A_2, B_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть касательные к Ω в точках A_1, B_1, C_1 образуют треугольник ABC. Для определенности будем считать, что Ω — вписанная (а не вневписанная) окружность этого треугольника. Заметим, что, например, точка C является радикальным центром окружностей α, β и Ω, т.е. лежит на общей внутренней касательной к окружностям α и β. Кроме того, общие касательные к окружностям α, β, γ пересекаются в их радикальном центре — точке X. Поэтому утверждение задачи можно переформулировать следующим образом.

Дан треугольник ABC и точка X, лежащая внутри его вписанной окружности. Отрезки XA, XB, XC пересекают окружность в точках A_2, B_2, C_2, а стороны треугольника касаются ее в точках A_1, B_1, C_1. Тогда прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Применив теорему синусов к треугольникам A_1CC_2 и B_1CC_2, получим

$$\frac{A_1C_2}{B_1C_2} = \frac{\sin\angle A_1CC_2}{\sin\angle B_1CC_2}\cdot\frac{\sin\angle CB_1C_2}{\sin\angle CA_1C_2} = \frac{\sin\angle A_1CC_2}{\sin\angle B_1CC_2}\cdot\frac{B_1C_2}{A_1C_2}.$$

Теперь, применив теорему Чевы к треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$, получим нужное утверждение.

18. (А.Полянский, Н.Полянский, 10–11 классы) На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1, B_1 так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Лучи B_1A_1 и B_1C1 пересекают описанную окружность в точках A_2 и C_2. Докажите, что точки A, C, точка пересечения A_2C_2 с BB_1 и середина A_2C_2 лежат на одной окружности.

    Решение. Пусть K — точка пересечения A_2C_2 с AC, M — середина A_2C_2, N — вторая точка пересечения окружности ACM с A_2C_2. Тогда $KM \cdot KN = KA \cdot KC = KA_2 \cdot KC_2$, т.е точки A_2, C_2, K, N образуют гармоническую четверку. Спроецировав прямую A_2C_2 из точки B_1 на прямую AA_1, получим, что A_1, точка пересечения AA_1 с B_1C_1, A и точка пересечения BN с AA_1 также образуют гармоническую четверку. Значит, BN проходит через точку пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1, т.е. совпадает с прямой BB_1.

19. (А.Мякишев, 10–11 классы) Имеется треугольник ABC и линейка, на которой отмечены отрезки, равные сторонам треугольника. Постройте этой линейкой ортоцентр треугольника, образованного точками касания вписанной в треугольник ABC окружности.

    Решение. Отложив на продолжении стороны AC за точку C отрезок $CX = BC$, мы сможем построить прямую BX, параллельную биссектрисе угла C. Аналогично можно построить прямую, параллельную биссектрисе угла C и проходящую через A, а имея две параллельные прямые, можно с помощью линейки провести параллельную им прямую через любую точку. Поэтому для решения задачи достаточно построить точки A', B', C' касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB (биссектрисы треугольника ABC перпендикулярны сторонам $A'B'C'$). Отложим на продолжениях стороны AB за точки A и B отрезки $AU = BC$ и $BV = AC$ соответственно. Так как $AC' = p - BC$, где p — полупериметр треугольника, точка C' будет серединой отрезка UV. Проведя через точки U, V прямые, параллельные двум биссектрисам, мы получим параллелограмм с диагональю UV и, построив его вторую диагональ, найдем точку C'.

20. (А.Зимин, 10–11 классы) Дан неравнобедренный треугольник ABC. Вписанная окружность касается его сторон AB, AC и BC в точках D, E, F соответственно. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке N. Пусть T – ближайшая к N точка пересечения прямой AN с вписанной окружностью, а K – точка пересечения прямых DE и FT. Докажите, что $AK || BC$.

    Решение. Пусть G — точка вписанной окружности, противоположная F. Так как вписанная и вневписанная окружности гомотетичны с центром A, точки A, G и N лежат на одной прямой, а $FT \perp AN$. При полярном преобразовании относительно вписанной окружности прямая ED переходит в A, FT — в точку пересечения касательных к окружности в точках F и T, т.е. середину FN, совпадающую с серединой BC, а прямая, проходящая через A и параллельная BC, — в точку L пересечения ED и GF. Таким образом, достаточно доказать, что AL — медиана треугольника ABC (рис.20).

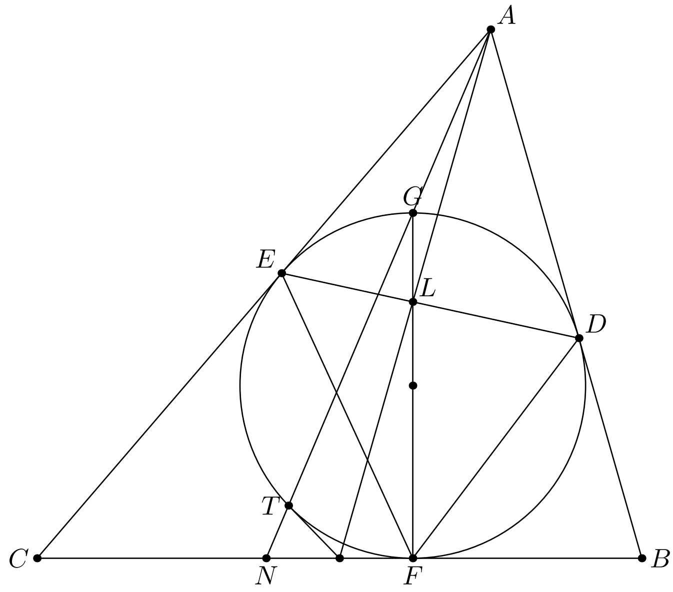


Рис. 20

Поскольку $AE = AD$, то $\sin\angle CAL : \sin\angle BAL = EL : DL$. Применяя теорему синусов к треугольникам EFL и EDL, получаем $EL : DL = EF\sin\angle EFL : DF\sin\angle DFL$. Но $\angle EFL = \angle C/2$, $\angle DFL = \angle B/2$, а $EF : DF = \cos\angle C/2 : \cos\angle B/2$. Следовательно, $\sin\angle CAL : \sin\angle BAL = AB : AC$, т.е. AL — медиана.

21. (предложил Б.Френкин, 10–11 классы) На плоскости даны прямая l и точка A вне ее. Найдите геометрическое место инцентров остроугольных треугольников с вершиной A, у которых одна сторона лежит на прямой l.

    Решение. Пусть H — проекция A на l. Так как треугольник остроугольный, его инцентр I и одна из его вершин, например B, лежат по разные стороны от прямой AH. Поэтому расстояние от I до AH меньше, чем до AB. Но последнее расстояние равно радиусу r вписанной окружности, т.е. расстоянию от I до l. Следовательно, I лежит внутри прямого угла, образованного биссектрисами углов между AH и l. Очевидно также, что $r < AH/2$, т.е. I лежит внутри полосы, ограниченной l и серединным перпендикуляром к AH. Наконец, поскольку угол A острый, то $AI = r/\sin\angle A/2 > r\sqrt{2}$, поэтому I лежит между ветвями равносторонней гиперболы с фокусом A и директрисой l. С другой стороны, для любой точки, удовлетворяющей перечисленным условиям, можно построить окружность с центром в этой точке, касающуюся l, провести к ней касательные из точки A и получить остроугольный треугольник. Таким образом, искомое ГМТ — это внутренность области, ограниченной биссектрисами углов между l и AH, серединным перпендикуляром к AH и соответствующей ветвью гиперболы.

22. (Н.Белухов, Болгария, 10–11 классы) Шесть кругов с радиусами, равными 1, расположены на плоскости так, что расстояние между центрами любых двух из них больше d. При каком наименьшем d можно утверждать, что найдется прямая, не пересекающая ни одного из кругов, по каждую сторону от которой лежат три круга?

    Решение. Пусть $O_1O_2O_3$ — правильный треугольник со стороной d, а O_4 — такая точка, что $O_1O_4 = d$ и $\angle O_2O_1O_4 = \angle O_4O_1O_3 = 150^\circ$, точки O_5 и O_6 определены аналогично, так что вся конфигурация переходит в себя при повороте вокруг центра треугольника $O_1O_2O_3$. Шесть окружностей с центрами O_1, O_2, ..., O_6 показывают, что $d \geq \frac{2}{\sin 15^\circ} = 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

Пусть теперь $d = \frac{2}{\sin 15^\circ}$. Покажем, что искомая прямая существует.

Занумеруем центры окружностей числами от 1 до 6. Пусть l — такая прямая, что проекции всех центров на l различны. Рассматривая проекции слева направо, получим какую-то перестановку σ чисел от 1 до 6.

Будем вращать l, пока она не повернется на 360°. Каждый раз, когда l оказывается перпендикулярна прямой, соединяющей два центра (можно считать, что никакие три центра не лежат на одной прямой), два соседних элемента σ переставляются. Поскольку есть $\binom{6}{2} = 15$ таких прямых, произойдет $2 \cdot 15 = 30$ перестановок.

Назовем *внешней* транспозицию, переставляющую два первых или два последних элемента σ (т.е., $AB \circ\circ\circ\circ \to BA \circ\circ\circ\circ$ или $\circ\circ\circ\circ AB \to \circ\circ\circ\circ BA$). В противном случае назовем транспозицию *внутренней.*

Так как стороне выпуклой оболочки центров соответствует внешняя транспозиция, таких транспозиций не меньше $2 \cdot 3 = 6$, соответственно внутренних транспозиций не больше, чем $30 - 6 = 24$.

Так как $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$, найдется интервал s вращения l без внутренних транспозиций, не меньший 15°. Тогда на интервале s третий и четвертый элементы σ остаются фиксированными. Обозначим эти элементы через A и B.

Рассмотрим полосу L ограниченную проходящими через A и B перпендикулярами к l. На интервале s полоса L не содержит никаких центров, кроме A и B. Так как s составляет, по крайней мере, 15°, найдется такое положение L, что острый угол между AB и L не меньше 15°, т.е. ширина L больше 2. Тогда средняя линия L удовлетворяет условию.

23. (А.Канель-Белов, 10–11 классы) Плоскость разбита на выпуклые семиугольники единичного диаметра. Докажите, что любой круг радиуса 200 пересекает не менее миллиарда из них.

    Решение. Рассмотрим круг K радиуса R. Внутри него имеется k вершин наших семиугольников, средний угол при таких вершинах не превосходит $2\pi/3$. (В более чем тройной развилке средний угол еще меньше, а если несколько углов выходят на сторону, то средний такой угол не больше $\pi/2$).

    С другой стороны, рассмотрим семиугольники, пересеченные K или находящиеся внутри K. Средний угол при вершине равен $5\pi/7$. Пусть n – число их вершин вне K, все они находятся в единичной окрестности круга K. Угол при каждой такой вершине не больше π (впрочем, это верно для любого угла выпуклого многоугольника).

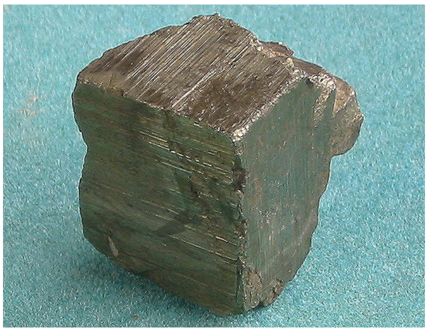
    Чтобы удовлетворился баланс средних, должно выполняться $n\pi + k \cdot 2\pi/3 > (n+k)5\pi/7$. Откуда $n > k/6$.

    Итак, в единичном слое, окружающем K, число вершин больше, чем число вершин внутри K, деленное на 6.

    Теперь заметим, что $(1+1/6)^6 > 2$, $(1+1/6)^{60} > 2^{10} > 1000$ и $(1+1/6)^{180} > 1000^3$.

Отсюда легко видеть, что число семиугольников (число углов, деленное на 7) в круге радиуса 200 не меньше 10^9 (поскольку 6 слоев удваивают его, 18 увеличивают в $8 > 7$ раз и еще одна каемка покрывает все задетые ранее семиугольники).

24. (А.Солынин, 10–11 классы) Кристалл пирита представляет собой параллелепипед, на каждую грань которого нанесена штриховка.



На любых двух соседних гранях штриховка перпендикулярна. Существует ли выпуклый многогранник с числом граней, не равным 6, грани которого можно заштриховать аналогичным образом?

Ответ. Да.

Решение. Возьмем четырехугольник $ABCD$. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке X, а прямые AD и BC — в точке Y. Проведем через прямую XY плоскость, перпендикулярную плоскости четырехугольника, и возьмем в ней такую точку S, что $\angle XSY = 90°$. Теперь нанесем на грани SAB и SCD пирамиды $SABCD$ штриховку параллельно прямой SX, на грани SBC и SCD — параллельно прямой SY, а на грань $ABCD$ — перпендикулярно плоскости SXY. Очевидно, такая штриховка удовлетворяет условию.