XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс

Ратмино, 30 июля 2019 г.

1. Трапеция с основаниями AB и CD вписана в окружность с центром O. Из точки A к описанной окружности треугольника CDO проведены касательные AP и AQ. Докажите, что описанная окружность треугольника APQ проходит через середину основания AB.

2. Внутри треугольника ABC взята такая точка M, что $AM = AB/2$, а $CM = BC/2$. Точки C_0 и A_0 взяты на отрезках AB и CB соответственно, причем $BC_0 : AC_0 = BA_0 : CA_0 = 3$. Докажите, что M равноудалена от C_0 и A_0.

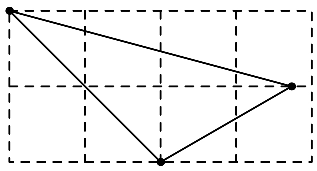
3. С помощью фанерного квадрата постройте правильный треугольник. (*Можно проводить прямые через две точки, расстояние между которыми не превышает стороны квадрата, проводить перпендикуляр из точки на прямую, если расстояние между ними не превышает стороны квадрата, и откладывать на проведенных прямых отрезки, равные стороне или диагонали квадрата.*)

4. В остроугольном треугольнике ABC точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр соответственно, $AB < AC$. Прямая, проходящая через середину K отрезка AH и перпендикулярная OK, пересекает сторону AB и касательную к описанной окружности в точке A в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XOY = \angle AOB$.

XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс

Ратмино, 31 июля 2019 г.

5. На клетчатой бумаге нарисовали треугольник, один из углов которого равен 45° (см.рис.). Найдите значения остальных углов.



6. Точка H лежит на стороне AB правильного пятиугольника $ABCDE$. Окружность с центром H и радиусом HE пересекает отрезки DE и CD в точках G и F соответственно. Известно, что $DG = AH$. Докажите, что $CF = AH$.

7. Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N так, что $MN \parallel AC$. Точки M' и N' симметричны соответственно точкам M и N относительно сторон BC и AB соответственно. Пусть $M'A$ пересекает BC в точке X, а $N'C$ пересекает AB в точке Y. Докажите, что точки A, C, X, Y лежат на одной окружности.

8. Найдите наименьшее натуральное k такое, что в любом выпуклом 1001-угольнике сумма длин любых k диагоналей не меньше суммы длин остальных диагоналей.

XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

Ратмино, 30 июля 2019 г.

1. Внутри прямого угла с вершиной O расположен треугольник OAB с прямым углом A. Высота треугольника OAB, опущенная на гипотенузу, продолжена за точку A до пересечения со стороной угла O в точке M. Расстояния от точек M и B до второй стороны угла O равны 2 и 1 соответственно. Найдите OA.

2. Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Точка A_1 симметрична ортоцентру треугольника PBC относительно серединного перпендикуляра к BC. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

3. Четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность ω, таков что $AD = BD = AC$. Точка P движется по ω. Прямые AP и DP пересекают прямые CD и AB в точках E и F соответственно. Прямые BE и CF пересекаются в точке Q. Найдите геометрическое место точек Q.

4. Корабль в тумане пытается пристать к берегу. Экипаж не знает, в какой стороне находится берег, но видит маяк, находящийся на маленьком острове в 10 км от берега, и понимает, что расстояние от корабля до маяка не превышает 10 км (точное расстояние до маяка неизвестно). Маяк окружен рифами, поэтому приближаться к нему нельзя. Может ли корабль достичь берега, проплыв не больше 75 км? (Береговая линия — прямая, траектория до начала движения вычерчивается на дисплее компьютера, после чего автопилот ведет корабль по ней.)

XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2019 г.

5. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности радиуса R. Пусть h_1 и h_2 — высоты опущенные из точки A на стороны BC и CD соответственно. Аналогично h_3 и h_4 — высоты опущенные из точки C на стороны AB и AD. Докажите, что
$$\frac{h_1+h_2-2R}{h_1h_2}=\frac{h_3+h_4-2R}{h_3h_4}.$$

6. Любые три последовательные вершины невыпуклого многоугольника образуют прямоугольный треугольник. Обязательно ли у многоугольника найдется угол, равный 90 или 270 градусам?

7. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его сторон AC и AB в точках E и F соответственно. Точки X, Y на ω таковы, что $\angle BXC=\angle BYC=90^\circ$. Докажите, что прямые EF и XY пересекаются на средней линии треугольника ABC.

8. В шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ никакие четыре вершины не лежат на одной окружности, а диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 пересекаются в одной точке. Обозначим через l_i радикальную ось окружностей $A_iA_{i+1}A_{i-2}$ и $A_iA_{i-1}A_{i+2}$ (мы считаем, что точки A_i и A_{i+6} совпадают). Докажите, что прямые l_i, $i=1,\dots,6$, пересекаются в одной точке.

XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

Ратмино, 30 июля 2019 г.

1. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$. Точка A' диаметрально противоположна A на описанной окружности треугольника. Точки E, F на сторонах AB, AC соответственно таковы. что $A'B = BE$, $A'C = CF$. Пусть K — вторая точка пересечения окружностей AEF и ABC. Докажите, что прямая EF делит пополам отрезок $A'K$.

2. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC, K — основание высоты, проведенной из вершины A, а L — точка касания вписанной окружности γ со стороной BC. Описанные окружности треугольников LKB_1 и A_1LC_1 вторично пересекают прямую B_1C_1 в точках X и Y соответственно. Окружность γ пересекает эту прямую в точках Z и T. Докажите, что $XZ = YT$.

3. Пусть точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Точка A_1, лежащая на дуге BC описанной около треугольника окружности ω, удовлетворяет условию $\angle BA_1P = \angle CA_1Q$. Точки B_1 и C_1 определены аналогично. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что сумма двух нагелиан больше полупериметра треугольника (нагелианой называется отрезок, соединяющий вершину треугольника и точку касания противоположной стороны с соответствующей вневписанной окружностью).

XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2019 г.

5. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC; A_0, C_0 — точки пересечения описанной окружности треугольника A_1BC_1 с прямыми A_1B_1 и C_1B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_0 и CC_0 пересекаются на медиане треугольника ABC или параллельны ей.

6. В остроугольном треугольнике ABC $(AC > AB)$ провели биссектрису AK и медиану AT, последнюю продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника в точке D. Точка F симметрична K относительно T. Даны углы треугольника ABC, найдите угол FDA.

7. Пусть P — произвольная точка на стороне BC треугольника ABC, K — центр вписанной окружности треугольника PAB, а F — точка касания вписанной окружности треугольника PAC со стороной BC. Точка G на CK такова, что $FG \parallel PK$. Найдите геометрическое место точек G.

8. В пространстве даны несколько точек и несколько плоскостей. Известно, что через любые две точки проходят ровно две плоскости, а каждая плоскость содержит не меньше четырех точек. Верно ли, что все точки лежат на одной прямой?