XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс. Решения

Ратмино, 30 июля 2019 г.

1. (Ф.Ивлев) Трапеция с основаниями AB и CD вписана в окружность с центром O. Из точки A к описанной окружности треугольника CDO проведены касательные AP и AQ. Докажите, что описанная окружность треугольника APQ проходит через середину основания AB.

   Решение. Пусть O' — центр окружности OCD. Тогда AO' — диаметр окружности APQ. Так как O' лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, середина AB также лежит на окружности с диаметром AO' (рис.8.1).

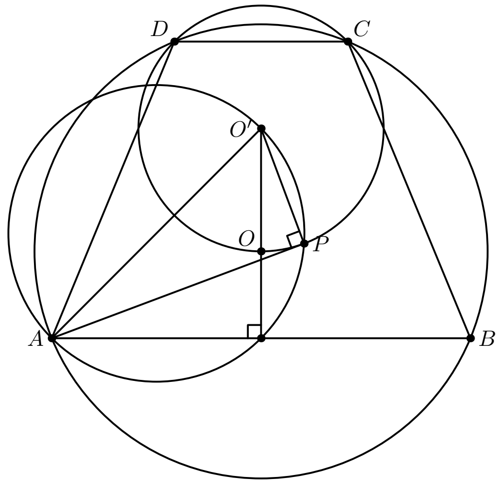


Рис. 8.1.

2. (П.Рябов) Внутри треугольника ABC взята такая точка M, что $AM = AB/2$, а $CM = BC/2$. Точки C_0 и A_0 взяты на отрезках AB и CB соответственно, причем $BC_0 : AC_0 = BA_0 : CA_0 = 3$. Докажите, что M равноудалена от C_0 и A_0.

   Решение. Пусть K, L, U, V — середины отрезков AB, BC, AM, MC соответственно. Так как треугольники AKM и CLM — равнобедренные, а KU, LV — средние линии треугольников ABM, CBM соответственно, то $MA_0 = LV = BM/2 = KU = MC_0$ (рис.8.2).

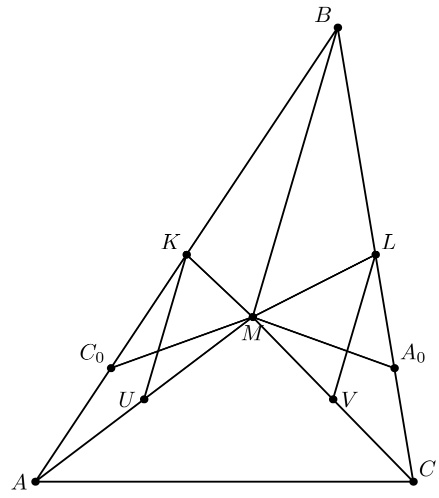


Рис. 8.2.

3. (М.Плотников) С помощью фанерного квадрата постройте правильный треугольник. (*Можно проводить прямые через две точки, расстояние между которыми не превышает стороны квадрата, проводить перпендикуляр из точки на прямую, если расстояние между ними не превышает стороны квадрата, и откладывать на проведенных прямых отрезки, равные стороне или диагонали квадрата.*)

   Решение. Пусть сторона квадрата равна 1. Покажем, как построить середину любого отрезка PQ, длина которого не превосходит 1. Проведем через P произвольную прямую ℓ, отличную от прямой PQ и не перпендикулярную ей. Пусть R — проекция Q на ℓ, а S — точка пересечения перпендикуляров из P и Q к PR и QR соответственно. Тогда RS делит PQ пополам.

   Теперь для решения задачи построим две перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке A и отложим на них отрезки $AB = AC = 1/2$. (Сначала построим отрезки $AB' = AC' = 1$, затем разделим их пополам.) Построим отрезок BC и перпендикуляр к нему из точки C. Построим такую точку D, что $\angle BCD = 90°$ и $CD = 1/2$. Построим отрезок BD и перпендикуляр к нему из точки D. Построим точки E и F такие, что $\angle BDE = \angle BDF = 90°$ и $DE = DF = 1/2$. Треугольник BEF искомый, поскольку его основание $EF = 1$, а высота и медиана $BD = \sqrt{3}/2$.

   Примечание. Вместо отрезка длины $1/2$ можно откладывать любой достаточно маленький отрезок, например, длины $3 - 2\sqrt{2}$.

4. (М.Дидин, И.Фролов) В остроугольном треугольнике ABC точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр соответственно, $AB <$

AC. Прямая, проходящая через середину K отрезка AH и перпендикулярная OK, пересекает сторону AB и касательную к описанной окружности в точке A в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XOY = \angle AOB$.

Решение. Так как $\angle OKY = \angle OAY = 90^\circ$, точки K и A лежат на окружности с диаметром OY, т.е. $\angle OYX = \angle OAK = \angle B - \angle C$. Далее, пусть M — середина BC. Тогда $KHMO$ — параллелограмм, т.е. у треугольников AKX и CMH соответствующие стороны перпендикулярны. Следовательно, эти треугольники подобны и $KX/OK = KX/HM = AK/CM = OM/CM$. Значит прямоугольные треугольники OKX и CMO подобны и $\angle OXK = \angle COM = \angle A$ (рис 8.4). Таким образом $\angle XOY = 2\angle C = \angle AOB$.

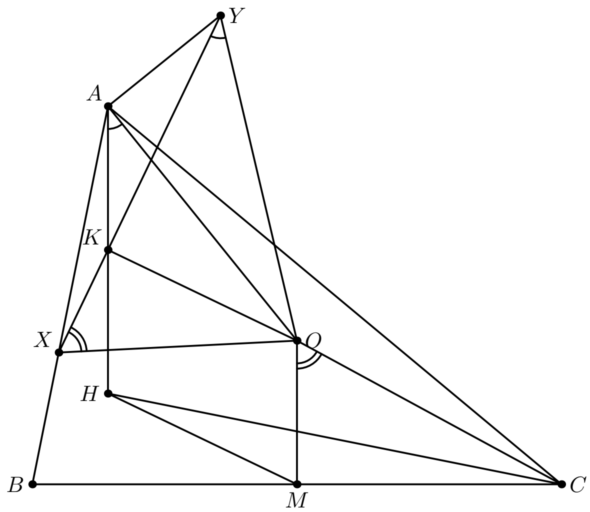
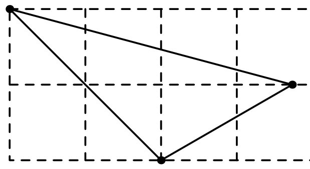


Рис. 8.4.

XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс

Ратмино, 31 июля 2019 г.

5. (М. Волчкевич) На клетчатой бумаге нарисовали треугольник, один из углов которого равен 45° (см.рис.). Найдите значения остальных углов.



Ответ. 30° и 105°.

Первое решение. Введем обозначения, как на рис.8.5.

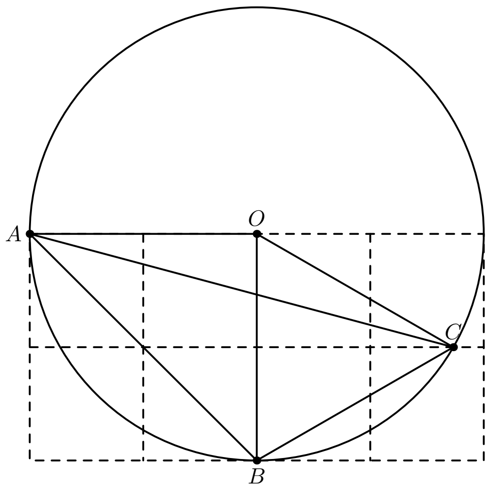


Рис. 8.5.

Так как $\angle A < \angle OAB = 45^\circ = \angle OBA < \angle B$, то $\angle C = 45^\circ$. Поскольку $OA = OB$ и $\angle AOB = 90^\circ = 2\angle ACB$, точка O является центром описанной окружности треугольника ABC и $OC = OB$. Но C лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BO, значит $OC = BC$, треугольник OBC равносторонний и $\angle BOC = 60^\circ$. Поэтому $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 105^\circ$.

Второе решение. Пусть M — середина AB. Так как $\angle CMB = 45^\circ$, треугольники ABC и CBM подобны. Поэтому $AB/BC = \sqrt{2}$ и по теореме синусов $\angle A = 30^\circ$.

6. (К.Кноп) Точка H лежит на стороне AB правильного пятиугольника $ABCDE$. Окружность с центром H и радиусом HE пересекает отрезки DE и CD в точках G и F соответственно. Известно, что $DG = AH$. Докажите, что $CF = AH$.

   Решение. Пусть F' — такая точка отрезка CD, что $CF' = AH$. Тогда четырехугольники $AHGE$ и $CF'HB$ равны по трем сторонам и двум углам, значит $HF' = HG$. Осталось доказать, что F' совпадает с F, т.е., что вторая точка пересечения окружности с прямой CD лежит вне стороны пятиугольника. Для этого покажем, что угол DCH — прямой.

   Заметим, что существует единственная пара точек H и G, лежащих на сторонах AB и ED соответственно и таких, что $AH = DG$ и $HE = HG$. Действительно, если точка H движется в направлении вершины A, а G — в направлении вершины D, то угол GEH увеличивается, а угол EGH уменьшается, следовательно равенство $HE = HG$ достигается только для одного положения. Пусть теперь K — точка пересечения диагоналей AD и CE, прямая, проходящая через K и параллельная AE, пересекает AB в точке H', а прямая, проходящая через K и параллельная CD, пересекает ED в точке G' (рис.8.6). Тогда $\angle DG'K = \angle DKG' = 72°$, т.е. $DG' = DK = EK = AH'$. Кроме того, $KH' = EA = CD = KC$ и $\angle G'KC = \angle G'KH' = 144°$. Следовательно, треугольники CKG' и $H'KG'$ равны, т.е. $G'H' = G'C = H'E$ и точки H', G' совпадают с H, G. При этом $HC \perp GK \parallel CD$, ч.т.д.

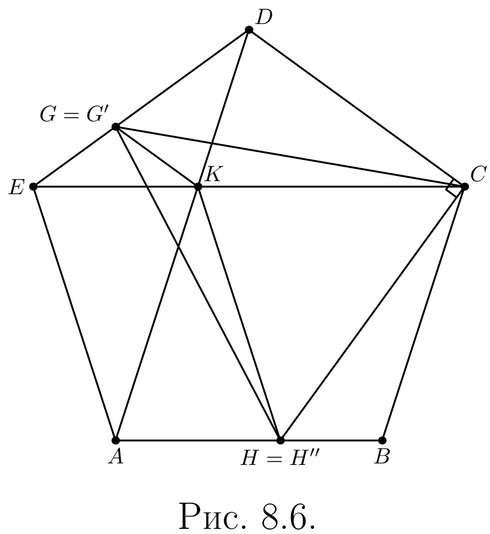


Рис. 8.6.

7. (П.Рябов, Т.Рябова) Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N так, что $MN \parallel AC$. Точки M' и N' симметричны

соответственно точкам M и N относительно сторон BC и AB соответственно. Пусть $M'A$ пересекает BC в точке X, а $N'C$ пересекает AB в точке Y. Докажите, что точки A, C, X, Y лежат на одной окружности.

Решение. Пусть A', C' — точки, симметричные A и C относительно прямых BC и AB соответственно, а AA_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Применив теорему Менелая к треугольнику $A'BA_1$ и прямой AXM', получим $BX : XA_1 = 2 \cdot (BM' : M'A') = 2 \cdot (BM : MA)$. Аналогично $BY : YC_1 = 2 \cdot (BN : NC)$. Так как $MN \parallel AC$, то $BM : MA = BN : NC$, т.е. $BX : XA_1 = BY : YC_1$ и $XY \parallel A_1C_1$, откуда следует утверждение задачи (рис. 8.7).

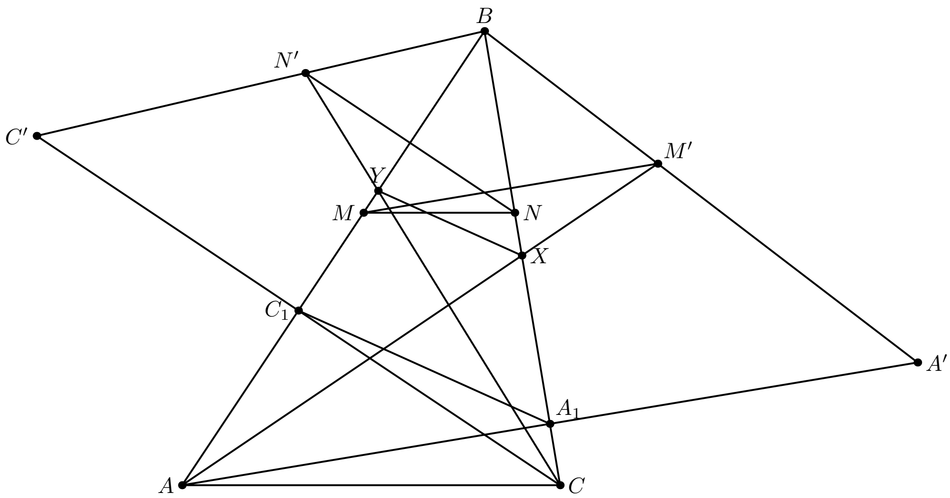


Рис. 8.7.

8. (Н.Белухов) Найдите наименьшее натуральное k такое, что в любом выпуклом 1001-угольнике сумма длин любых k диагоналей не меньше суммы длин остальных диагоналей.

Ответ. $k = 499000$.

Решение. Пусть $AB = 1$. Рассмотрим выпуклый 1001-угольник, одна из вершин которого совпадает с A, а остальные 1000 вершин лежат на расстоянии, меньшем ε от B, где ε достаточно мало. Обозначим через $k + \ell$ общее число диагоналей, равное $\frac{1001 \cdot 998}{2} = 499499$. При $k \geq 498501$ сумма длин кратчайших k диагоналей примерно равна $k - 498501 = 998 - \ell$, а сумма остальных диагоналей примерно равна ℓ. Следовательно, $\ell \leq 499$ и $k \geq 499000$.

Покажем теперь, что $k = 499000$ удовлетворяет условию. Раскрасим произвольные $\ell = 499$ зеленым. Для каждой зеленой диагонали AB, кроме, возможно, двух последних, построим красные диагонали AC и CB так, чтобы ни одна зеленая диагональ не была перекрашена в красный цвет и ни одна диагональ не была покрашена красным дважды.

Пусть для $0 \le i \le 498$ зеленых диагоналей соответствующие красно-зеленые треугольники построены. Рассмотрим очередную зеленую диагональ AB. Пусть D — множество всех диагоналей с концами A и B, отличных от AB; тогда $|D| = 2 \cdot 997 = 1994$. Каждый красно-зеленый треугольник имеет не больше двух сторон в D, а зеленых диагоналей отличных от рассматриваемой, для которых треугольники еще не построены, осталось $499-(i+1)$. Значит подмножество E непокрашенных диагоналей из D содержит не меньше $1994-2i-(499-(i+1)) = 1496-i$ элемента.

При $i \le 498$ получаем, что $|E| \ge 998$. Следовательно, или найдутся две диагонали из E с общим концом C и мы можем покрасить красным диагонали AC и CB, или никакие две диагонали из E не имеют общих концов, отличных от A и B. В последнем случае найдутся две диагонали из E, которые пересекаются. Действительно, иначе одна (назовем ее a) из двух соседних с A вершин отделена от B диагоналями, выходящими из A, и одна (назовем ее b) из двух соседних с B вершин отделена от A диагоналями, выходящими из B (при этом $a \ne b$). Тогда у нас есть не больше 997 подходящих вершин и не меньше 998 диагоналей из E — противоречие.

Для завершения доказательства осталось воспользоваться неравенством треугольника.

XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

Ратмино, 30 июля 2019 г.

1. (В.Протасов) Внутри прямого угла с вершиной O расположен треугольник OAB с прямым углом A. Высота треугольника OAB, опущенная на гипотенузу, продолжена за точку A до пересечения со стороной угла O в точке M. Расстояния от точек M и B до второй стороны угла O равны 2 и 1 соответственно. Найдите OA.

   Ответ. $\sqrt{2}$.

   Первое решение. Пусть S — проекция B на OM. Тогда четырехугольник $ABOS$ — вписанный и, значит, $\angle OAS = \angle OBS = 90^\circ - \angle BOM = \angle OMA$, т.е. треугольники AOS и MOA подобны (рис.9.1). Следовательно, $OA^2 = OS \cdot OM = 1 \cdot 2$.

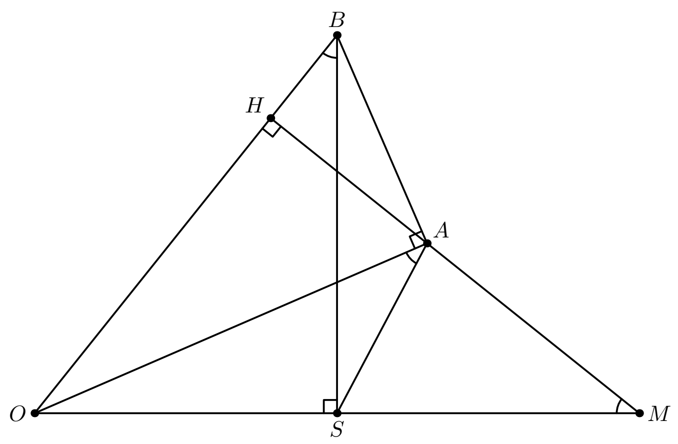


Рис. 9.1.

   Второе решение. Пусть AH — высота треугольника. Тогда четырехугольник $BHSM$ — вписанный, следовательно, $OH \cdot OB = OS \cdot OM = 2$. Но $OH \cdot OB = OA^2$ по свойству прямоугольного треугольника.

2. (Д.Прокопенко) Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Точка A_1 симметрична ортоцентру треугольника PBC относительно серединного перпендикуляра к BC. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

   Первое решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Если P движется с постоянной скоростью по окружности ABC, то A_1, B_1 и C_1

движутся с той же скоростью по окружностям BHC, CHA и AHB соответственно. Поэтому, если для какого-то положения точки P точки A_1, B_1, C_1 и H будут лежать на одной прямой, это будет выполняться и для остальных положений. Для случая, когда AP — диаметр, условие, очевидно, выполнено.

Второе решение. Пусть точка P' диаметрально противоположна P. Тогда точка A_1, симметричная P' относительно прямой BC, лежит на прямой Штейнера точки P'. Аналогично B_1, C_1 лежат на этой же прямой.

3. (И.Кухарчук) Четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность ω, таков что $AD = BD = AC$. Точка P движется по ω. Прямые AP и DP пересекают прямые CD и AB в точках E и F соответственно. Прямые BE и CF пересекаются в точке Q. Найдите геометрическое место точек Q.

   Ответ. Окружность k, проходящая через B, C и касающаяся прямых AB, CD.

   Решение. Пусть S — точка пересечения AC и BD. Тогда S — центр внутренней гомотетии окружностей k и ω (поскольку касательная к ω в точке D параллельна AB). Пусть луч SP пересекает k в точке Q' (рис.9.3). Докажем, что прямые AP, BQ' и CD пересекаются в одной точке. Тогда аналогичное утверждение будет верно для прямых CQ', DP и AB и, следовательно, Q' совпадет с Q.

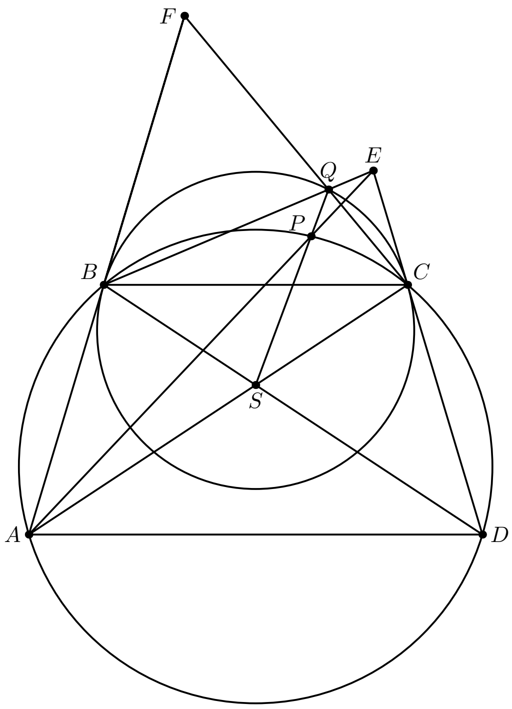


Рис. 9.3.

Пусть SP вторично пересекает ω в точке R, прямые AB и CD пересекаются в точке T, а прямая BD вторично пересекает k в точке U. Пусть также BQ' и AP пересекают CD в точках E' и E'' соответственно. Чтобы доказать, что E' и E'' совпадают, используем двойные отношения.

Имеем $(C, D, T, E') = (BC, BD, BT, BE') = (C, U, B, Q') = (A, B, D, R) = (C, D, B, P) = (AC, AD, AB, AP) = (C, D, T, E'')$ (второе равенство получено проекцией из B на k, третье гомотетией между k и ω с центром S), ч.т.д.

Примечание. Доказать, что точки B, Q' и E лежат на одной прямой, можно и по-другому. Пусть R' — вторая точка пересечения прямой SP и окружности k. Так как S — центр гомотетии k и ω, получаем, что $AP \parallel CR'$ и $BQ' \parallel DR$. Поэтому $\angle Q'CE = \angle Q'BC = \angle Q'R'C = \angle Q'PE$, то есть четырехугольник $PQ'EC$ — вписанный. Кроме того, $\angle BQ'R = \angle Q'RD = \angle PCE$. Следовательно, $\angle PQ'E + \angle BQ'P = 180°$, ч.т.д.

4. (В.Протасов) Корабль в тумане пытается пристать к берегу. Экипаж не знает, в какой стороне находится берег, но видит маяк, находящийся на маленьком острове в 10 км от берега, и понимает, что расстояние от корабля до маяка не превышает 10 км (точное расстояние до маяка неизвестно). Маяк окружен рифами, поэтому приближаться к нему нельзя.

Может ли корабль достичь берега, проплыв не больше 75 км? (Береговая линия — прямая, траектория до начала движения вычерчивается на дисплее компьютера, после чего автопилот ведет корабль по ней.)

Ответ. Да.

Решение. Пусть корабль находится в точке K, маяк — в точке M, а K' — точка на луче KM такая, что $KK' = 10$ км. Чтобы корабль причалил к берегу, выпуклая оболочка его траектории должна содержать круг с центром M и радиусом KK', но, поскольку положение точки M на отрезке KK' неизвестно, то выпуклая оболочка должна содержать объединение всех таких кругов с центрами на KK'. Очевидно, что это условие будет и достаточным.

Пусть ω, ω' — окружности с центрами K, K' соответственно и радиусами, равными KK', CC' и DD' — общие касательные к этим окружностям, X — точка на прямой CC' такая, что $\angle XKC = 30°$, XA — касательная к ω, B — середина дуги $C'D'$, лежащей вне ω, Y — проекция B на CC' (см. рис.9.4). Тогда путь $KXADD'BY$ удовлетворяет условию, а его длина равна $10(\sqrt{3} + 2\pi/3 + 1 + \pi/2 + 1) < 74$ км.

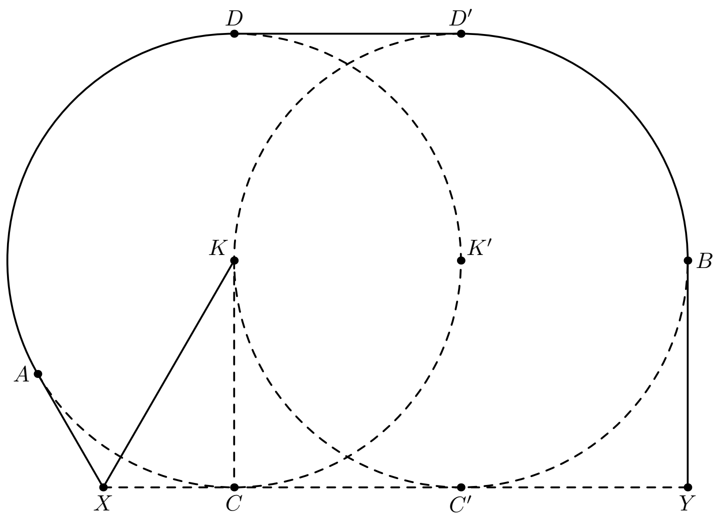


Рис. 9.4.

XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2019 г.

5. (А.Акопян). Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности радиуса R. Пусть h_1 и h_2 — высоты опущенные из точки A на стороны BC и CD соответственно. Аналогично h_3 и h_4 — высоты опущенные из точки C на стороны AB и AD. Докажите, что

$$\frac{h_1 + h_2 - 2R}{h_1 h_2} = \frac{h_3 + h_4 - 2R}{h_3 h_4}.$$

Решение. Обозначим через a длину касательной к вписанной окружности из точки A, аналогично определим b, c и d. Вычисляя площадь $ABCD$ тремя способами, получаем $h_1(b+c) + h_2(c+d) = h_3(a+b) + h_4(a+d) = 2R(a+b+c+d)$. Умножим обе части искомого равенства на $a+b+c+d$. Тогда числитель левой части будет равен $h_1(a+d)+h_2(a+b)$, аналогичное выражение получим для правой части. Таким образом, надо доказать равенство $(a+b)/h_1 + (a+d)/h_2 = (b+c)/h_3 + (c+d)/h_4$. Это равенство очевидно, поскольку, вычисляя двумя способами площадь треугольника ABC, мы получаем $h_1(b+c) = h_3(a+b)$ и аналогичное равенство верно для h_2 и h_4.

6. (M.Saghafian) Любые три последовательные вершины невыпуклого многоугольника образуют прямоугольный треугольник. Обязательно ли у многоугольника найдется угол, равный 90 или 270 градусам?

Ответ. Нет.

Первое решение. (Н.Белухов) Пусть $A = (0,1)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$, $D = (2,0)$, $E = (2,1)$, $F = (3,0)$, а G — точка пересечения BE с прямой, проходящей через F и перпендикулярной AF (рис. 9.6). Тогда семиугольник $ABCDEFG$ — искомый.

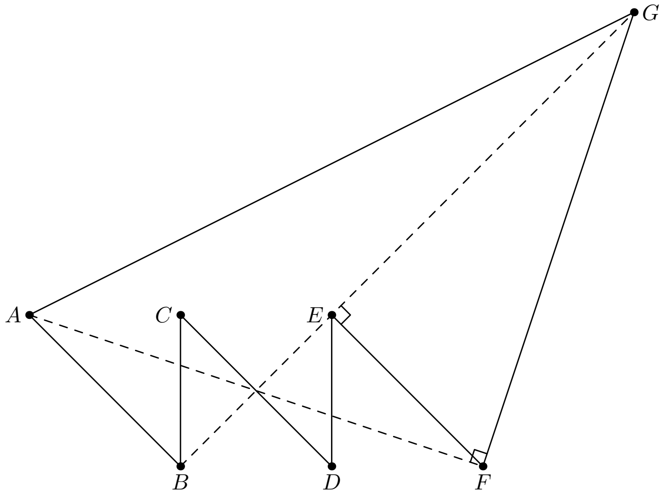


Рис. 9.6.

Второе решение. Возьмем прямоугольник со сторонами 2 и $\sqrt{3}$ и построим на каждой из его сторон во внешнюю сторону трапецию с отношением сторон $1 : 1 : 1 : 2$, меньшее основание которой совпадает со стороной прямоугольника. Любые три последовательные вершины полученного невыпуклого двенадцатиугольника образуют треугольник с углами $30°$, $60°$ и $90°$, а углы двенадцатиугольника равны $60°$ или $330°$.

Третье решение. (Найдено участниками олимпиады.) Зафиксируем точки A_4, A_5 и некоторую точку A_3, лежащую на окружности с диаметром A_4A_5 так, что $A_3A_4 < A_3A_5$. Пусть A_2 — произвольная точка внутри треугольника $A_3A_4A_5$, удовлетворяющая условию $\angle A_3A_2A_4 = 90°$, а A_1 — такая точка, что $A_3A_1 \parallel A_4A_2$ и $\angle A_4A_1A_5 = 90°$. Если A_2 лежит вблизи отрезка A_4A_5, то $\angle A_1A_2A_5 < 90°$. А, если угол между прямой A_2A_4 и касательной к окружности $A_3A_4A_5$ в точке A_3 мал, то $\angle A_1A_2A_5 > 90°$. Поэтому существует положение точки A_2, при котором $\angle A_1A_2A_5 = 90°$. Соответствующий пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ искомый.

7. (Ф.Юдин) Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его сторон AC и AB в точках E и F соответственно. Точки X, Y на ω таковы, что $\angle BXC = \angle BYC = 90°$. Докажите, что прямые EF и XY пересекаются на средней линии треугольника ABC.

Первое решение. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон треугольника, прямая EF пересекает B_0C_0 в точке Z, а прямые A_0B_0 и A_0C_0 в точках M и N соответственно. Тогда M и N являются проекциями вершин C и B на биссектрисы углов B и C соответственно, следовательно, M и N лежат на окружности $BXYC$. Кроме того, поскольку $A_0C_0 \parallel AC$

и $A_0B_0 \parallel AB$, то $ZE/ZN = ZB_0/ZC_0 = ZM/ZF$, то есть степени Z относительно окружности $BXYC$ и вписанной окружности равны, а, значит, Z лежит на XY.

Второе решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, H — ортоцентр треугольника BIC, k — окружность с диаметром IH, а Γ — окружность с диаметром BC. Очевидно, что XY — радикальная ось окружностей ω и Γ.

Пусть K и L — проекции B и C на прямые CI и BI соответственно. Известно, что K и L лежат на прямой EF. Следовательно, EF — радикальная ось окружностей k и Γ.

Осталось доказать, что средняя линия ℓ треугольника ABC, противолежащая вершине A является радикальной осью k и ω.

Пусть M и N — проекции A на прямые BI и CI соответственно. Известно, что M и N лежат на прямой ℓ. Покажем, что степени M относительно k и ω равны. Тогда аналогично получим, что равны степени N относительно этих окружностей, что и завершит решение задачи.

Заметим, что поляра EF точки A относительно ω проходит через L. Значит, поляра L относительно ω проходит через A. С другой стороны, эта поляра перпендикулярна IL. Следовательно, она совпадает с прямой AM. соответственно поляра M относительно ω совпадает с прямой CL. Пусть MP и MQ — касательные из M к ω. Тогда P и Q лежат на прямой CL (рис.9.7). Следовательно, $ML \cdot MI = MP^2$ и степени M относительно k и ω равны.

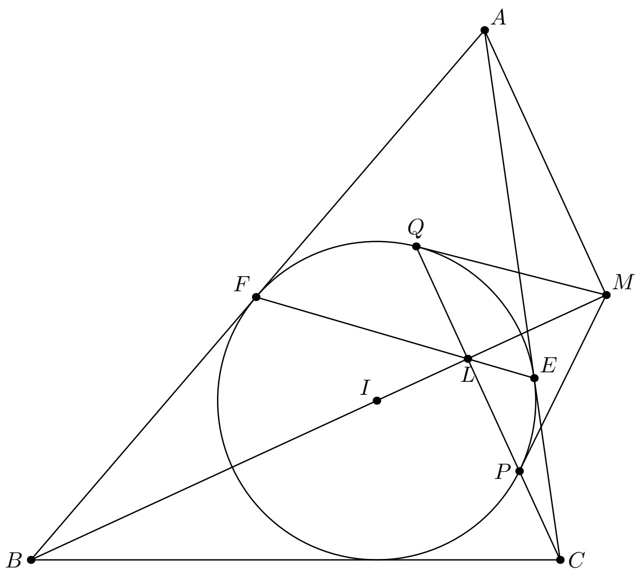


Рис. 9.7.

8. (И.Фролов) В шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ никакие четыре вершины не лежат на одной окружности, а диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 пересекаются в одной точке. Обозначим через l_i радикальную ось окружностей $A_iA_{i+1}A_{i-2}$ и $A_iA_{i-1}A_{i+2}$ (мы считаем, что точки A_i и A_{i+6} совпадают). Докажите, что прямые l_i, $i = 1, \dots, 6$, пересекаются в одной точке.

   Решение. Зафиксируем точки $A_1, \dots, A_5$ и будем двигать A_6 по прямой, проходящей через A_3 и точку пересечения диагоналей четырехугольника $A_1A_2A_4A_5$. Заметим, что центр O окружности $A_1A_2A_5$ при этом фиксирован, а центр O' окружности $A_1A_3A_6$ движется по серединному перпендикуляру к отрезку A_1A_3, причем соответствие между A_6 и O' проективно (так как $\angle O'A_1A_6 = \pi/2 - \angle A_6A_3A_1 = const$). Поскольку радикальная ось l_1 перпендикулярна прямой OO', соответствие между A_6 и l_1 также проективно, значит, проективно и соответствие между вращающимися вокруг точек A_1 и A_2 прямыми l_1 и l_2. Следовательно, точка пересечения этих прямых будет двигаться по некоторой конике. Поскольку обе прямые совпадают с A_1A_2, когда A_6 попадает на окружность $A_1A_2A_3$, эта коника распадается на A_1A_2 и еще одну прямую, которая, очевидно, проходит через A_3. Кроме того, когда A_6 попадает на окружность $A_2A_3A_5$, точка пересечения лежит на l_3, следовательно, она лежит на l_3 и при остальных положениях A_6. Таким образом, l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке. Аналогично получаем, что три оставшихся радикальных оси проходят через ту же точку.

XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

Ратмино, 30 июля 2019 г.

1. (A.Dadgarnia) В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$. Точка A' диаметрально противоположна A на описанной окружности треугольника. Точки E, F на сторонах AB, AC соответственно таковы. что $A'B = BE$, $A'C = CF$. Пусть K — вторая точка пересечения окружностей AEF и ABC. Докажите, что прямая EF делит пополам отрезок $A'K$.

Первое решение. Пусть точка K' симметрична A' относительно прямой EF. Так как $\angle BA'E = \angle CA'F = 45^\circ$, получаем, что $\angle EK'F = \angle EA'F = 45^\circ$ и четырехугольник $AK'EF$ — вписанный. Поэтому $\angle K'EB = \angle K'FC$. Кроме того, $K'E : EB = A'E : EB = \sqrt{2} = A'F : FC = K'F : FC$, следовательно, треугольники $K'EB$ и $K'FC$ подобны. Значит, $\angle BK'C = 45^\circ$, четырехугольник $AK'BC$ — вписанный и K' совпадает с K (рис.10.1).

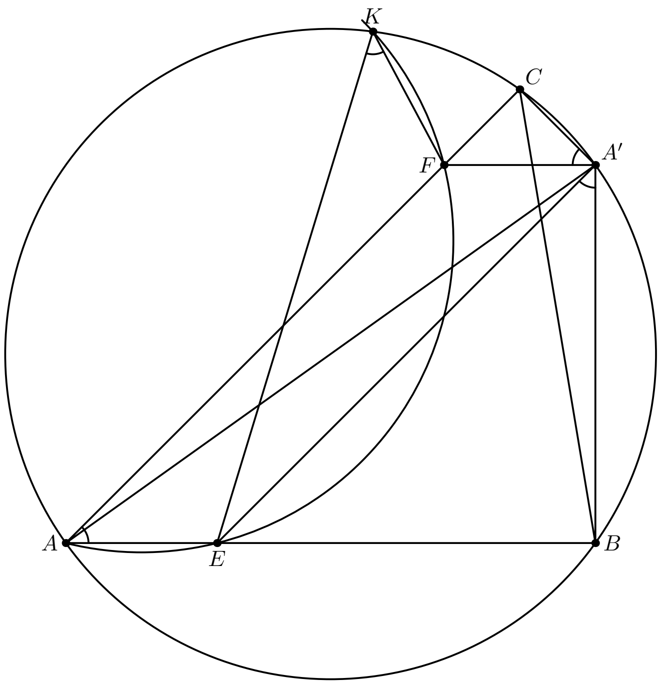


Рис. 10.1.

Второе решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Заметим, что треугольники EBA' и FCA' — равнобедренные, прямоугольные, следовательно, $AEA'F$ — параллелограмм, а O — середина EF. Кроме того, O лежит на серединном перпендикуляре к AK, но не совпадает с центром окружности $AKEF$. Значит $EF \parallel AK$, т.е. EF — средняя линия в треугольнике $AA'K$, откуда следует утверждение задачи.

2. (Ф.Ивлев) Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC, K — основание высоты, проведенной из вершины A, а L — точка касания вписанной окружности γ со стороной BC. Описанные окружности треугольников LKB_1 и A_1LC_1 вторично пересекают прямую B_1C_1 в точках X и Y соответственно. Окружность γ пересекает эту прямую в точках Z и T. Докажите, что $XZ = YT$.

   Решение. Так как $BC \parallel B_1C_1$, четырехугольники KB_1XL и A_1LYC_1 являются равнобокими трапециями. Поэтому $\angle BLX = \angle CKB_1 = \angle BA_1C_1 = \angle CLY$, т.е. X и Y симметричны относительно прямой IL (I — центр вписанной окружности треугольника ABC) (рис.10.2). Очевидно, что Z и T также симметричны относительно IL, следовательно, $XZ = YT$.

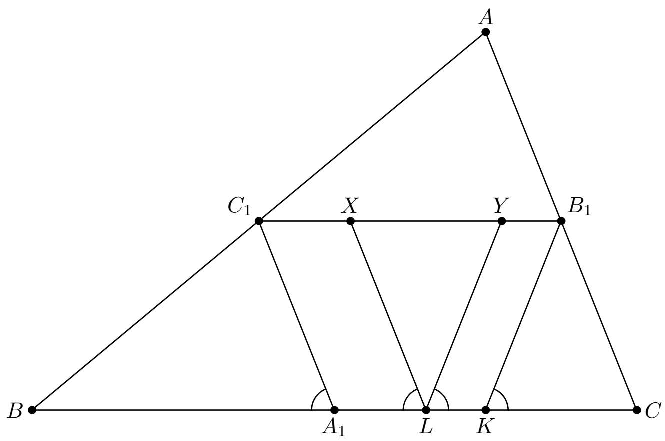


Рис. 10.2.

3. (A.Bhattacharya) Пусть точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Точка A_1, лежащая на дуге BC описанной около треугольника окружности ω, удовлетворяет условию $\angle BA_1P = \angle CA_1Q$. Точки B_1 и C_1 определены аналогично. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

   Первое решение. Пусть A_1' — точка Микеля прямых BP, BQ, CP и CQ. Тогда $\angle BA_1'C = (\pi - \angle BPC) + (\pi - \angle BQC) = \pi - \angle A$ (рис.10.3), следовательно, A_1' лежит на ω. Кроме того, A_1' — центр поворотной гомотетии, переводящей B в P, а Q в C (а также центр поворотной гомотетии, переводящей B в Q и P в C). Поэтому $\angle BA_1'P = \angle CA_1'Q$. Значит

A_1' совпадает с A_1 (условие $\angle BA_1P = \angle CA_1Q$ однозначно определяет точку A_1, поскольку при ее движении по дуге BC один из углов возрастает, а другой убывает). Тогда, поскольку треугольник A_1BP подобен треугольнику A_1QC, а треугольник A_1BQ — треугольнику A_1PC, мы получаем, что $BA_1 : A_1C = (BA_1 : A_1P) \cdot (PA_1 : A_1C) = (BQ : PC) \cdot (BP : QC) = (BP \cdot BQ) : (CP \cdot CQ)$. Найдя аналогично отношения $CB_1 : B_1A$ и $AC_1 : C_1B$, получим, что произведение трех найденных отношений равно единице. По теореме Чевы получаем, что главные диагонали вписанного шестиугольника $AC_1BA_1CB_1$ пересекаются в одной точке.

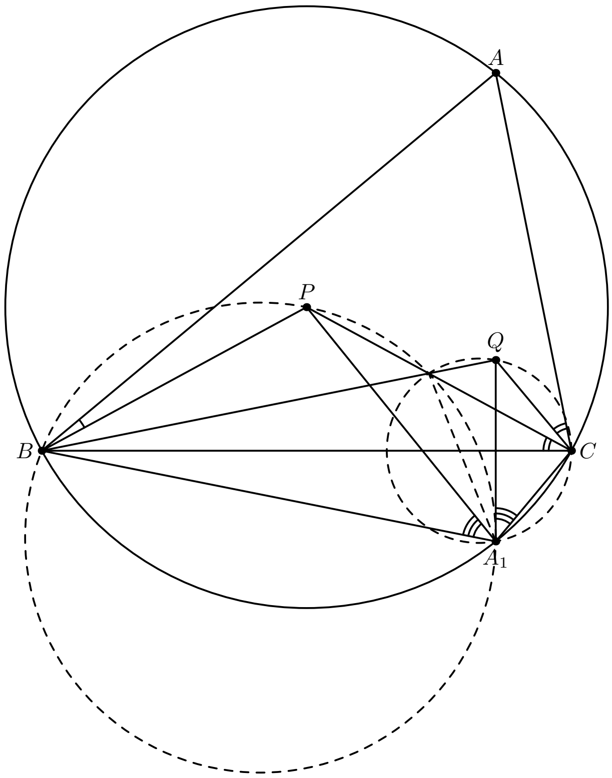


Рис. 10.3.

Второе решение. Поскольку биссектрисы углов BA_1C и PA_1Q совпадают, прямые, симметричные BA_1, CA_1, PA_1 и QA_1 относительно биссектрис углов PBQ, PCQ, BPC и BQC соответственно, пересекаются в одной точке или параллельны. Так как биссектрисы углов PBQ и PCQ совпадают с биссектрисами углов B и C треугольника ABC, а точка A_1 лежит на описанной окружности этого треугольника, то эти четыре прямые параллельны, т.е. A_1 изогонально сопряжена относительно четырехсторонника $BPCQ$ бесконечно удаленной точке его прямой Гаусса (т.е. совпадает с точкой Микеля прямых BP, BQ, CP и CQ). Но прямые, проходящие через A, B, C и параллельные прямым Гаусса четырехсторонников $BPCQ$, $APCQ$, $APBQ$ соответственно, пересекаются в точке гомотетичной середине отрезка PQ относительно центра тяжести треугольника ABC с коэффициентом -2. Соответственно прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в изогонально сопряженной точке.

4. (Л.Емельянов) Докажите, что сумма двух нагелиан больше полупериметра треугольника.

   Решение. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C', а соответствующие вневписанные окружности — в точках A'', B'', C''. Будем считать, что $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$. Тогда $AA'' \geq BB'' \geq CC''$ и надо доказать, что сумма нагелиан BB'' и CC'' больше полупериметра p. Пусть CH — высота треугольника, а A_1 — такая точка на луче BA, что $BA_1 = p$ (рис.10.4.1). Тогда $AB'' = AA_1 = p-c$ и $p < BB''+B''A_1$. Докажем, что $B''A_1 < CH$, тогда получим, что $p < BB'' + CH < BB'' + CC''$.

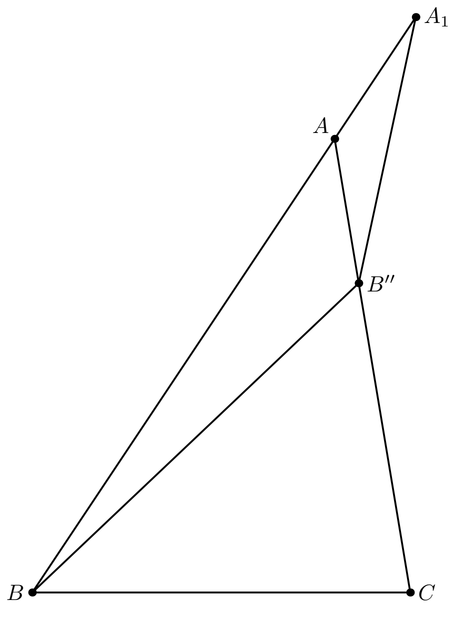


Рис. 10.4.1

Поскольку $A_1B'' = 2(p-c)\cos\frac{\angle A}{2}$, $CH = AC\sin\angle A = 2AC\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}$, надо доказать, что $AC\sin\frac{\angle A}{2} > p - c$.

Пусть P — проекция C на биссектрису угла A. Тогда P лежит на отрезке $A'C'$, поскольку $\angle C \geq \angle B$ (рис.10.4.2). При этом $PC = AC\sin\frac{\angle A}{2}$,

$A'C = p - c$ и $\angle PA'C = (\pi + \angle B)/2$, следовательно, CP — наибольшая сторона треугольника $A'CP$, ч.т.д.

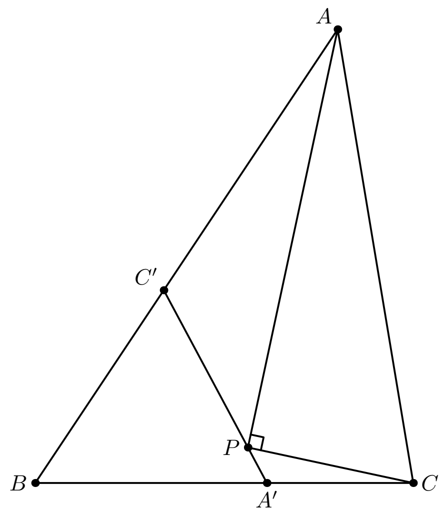


Рис. 10.4.2

XV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2019 г.

5. (Д.Швецов) Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC; A_0, C_0 — точки пересечения описанной окружности треугольника A_1BC_1 с прямыми A_1B_1 и C_1B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_0 и CC_0 пересекаются на медиане треугольника ABC или параллельны ей.

Первое решение. Пусть прямые AA_0 и BC пересекаются в точке X, а прямые CC_0 и AB — в точке Y. Достаточно доказать, что $BX : XC = BY : YA$. Поскольку центр окружности A_1BC_1 лежит на прямой BB_1, являющейся биссектрисой угла $A_1B_1C_1$, точки A_0 и C_1 симметричны относительно прямой BB_1, так же, как и точки A_1 и C_0 (рис.10.5). Пусть BA_0 и AC пересекаются в точке Z. Тогда, применяя теорему Менелая к треугольнику BCZ и прямой AA_0X, получаем, что $BX : XC = (BA_0 : A_0Z) \cdot (ZA : AC) = (2/AC) \cdot (BC_1 : C_1A) \cdot AB_1$. Аналогично получаем выражение для $BY : YA$, после чего остается доказать, что $(BC_1 : C_1A) \cdot AB_1 = (BA_1 : A_1C) \cdot CB_1$. Но это в точности теорема Чевы для ортоцентра.

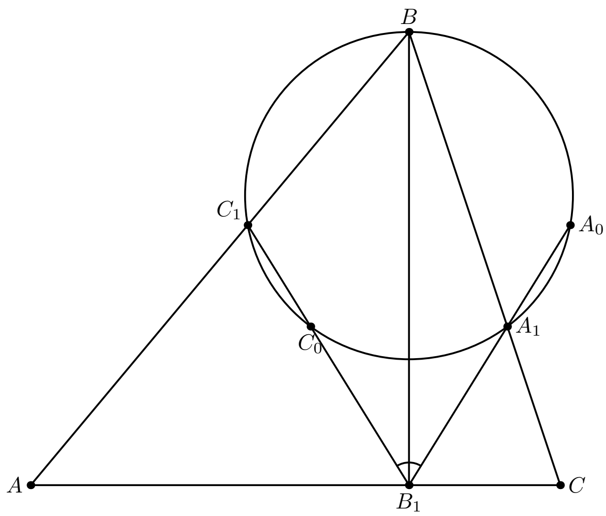


Рис. 10.5

Второе решение. Так как точки A_0, C_0 симметричны относительно BH точкам C_1, A_1 соответственно, а треугольники HAC_1 и HCA_1 подобны, то треугольники HAA_0 и HCC_0 также подобны. Поэтому точка пересечения прямых AA_0 и CC_0 совпадает с отличной от H точкой пересечения окружностей HAC и HA_0C_0, т.е. проекцией ортоцентра на медиану.

6. (А.Мостовой) В остроугольном треугольнике ABC ($AC > AB$) провели биссектрису AK и медиану AT, последнюю продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника в точке D. Точка F симметрична K относительно T. Даны углы треугольника ABC, найдите угол FDA.

   Ответ. $(\angle B - \angle C)/2$.

   Первое решение. Пусть M — середина дуги BC. Тогда $\angle MFT = \angle MKT = \angle MKC = \angle A/2 + \angle C = \angle ACM = \angle ADM = \angle TDM$, т.е. четырехугольник $MDFT$ — вписанный (рис.10.6). Поэтому $\angle ADF = \angle TDF = \angle TMF = \angle TMK = (\angle B - \angle C)/2$.

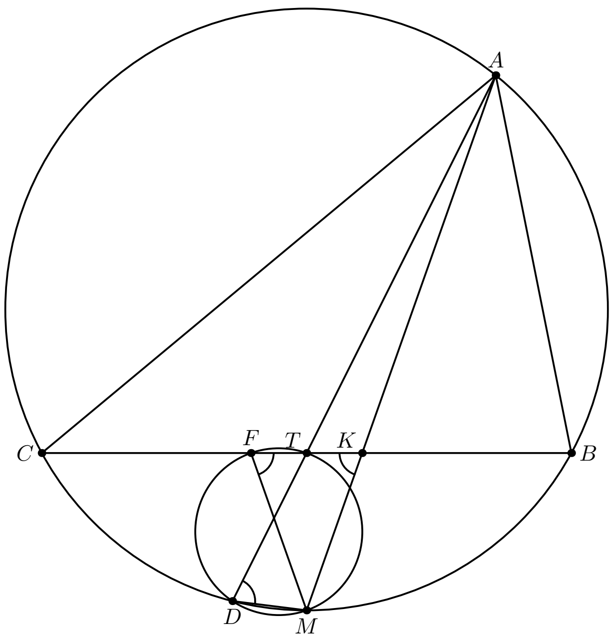


Рис. 10.6

Второе решение. Проведём симедиану из вершины A до пересечения с окружностью в точке Q. Так как точки D и Q симметричны относительно серединного перпендикуляра к BC, вместо угла FDA будем искать равный ему угол KQT. В треугольнике AQT AK и TK — биссектрисы, следовательно, $\angle KQT = \angle KQA/2$, а последний угол как раз и будет равен разности углов B и C, поскольку точка пересечения луча QK с окружностью образует вместе с вершинами треугольника равнобокую трапецию.

7. (Tran Quang Hung) Пусть P — произвольная точка на стороне BC треугольника ABC, K — центр вписанной окружности треугольника PAB, а F — точка касания вписанной окружности треугольника PAC со стороной BC. Точка G на CK такова, что $FG \parallel PK$. Найдите геометрическое место точек G.

   Решение. Лемма. Пусть I_B и I_C — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, противолежащих вершинам B и C. Пусть вневписанная окружность, противолежащая B, касается BC в точке T, а прямая ℓ проходит через T и параллельна BI_C. Пусть P — произвольная точка на прямой BC, а прямая PI_C пересекает ℓ в точке Q. Тогда $CQ \perp PI_B$.

   Доказательство леммы. Обозначим через R точку пересечения прямой PI_B с прямой, проходящей через T и перпендикулярной ℓ (и параллельной BI_B). Тогда $TQ : BI_C = TP : PB = TR : BI_B$, т.е. $TQ : TR = BI_C : BI_B = TC : TI_B$, а треугольники CTI_B и QTR подобны. Значит, треугольники CTQ и I_BTR также подобны. Угол поворота соответствующей поворотной гомотетии с центром T равен $\angle CTI_B = \angle QTR = 90°$, поэтому $CQ \perp PI_B$.

   Вернемся к задаче. Пусть AC и BC касаются вписанной окружности в точках X и Y соответственно, а Z — середина XY. Покажем, что искомым ГМТ будет отрезок YZ.

   Для этого заметим, что вторая общая внутренняя касательная окружностей, вписанных в треугольники ABP и ACP, проходит через Y (это известный факт). Применим лемму к треугольнику, образованному общими внутренними касательными к вписанным окружностям треугольников ABP и ACP и общей внешней касательной BC, а также точке C, лежащей на стороне PY этого треугольника. Получим, что G лежит на прямой XY (рис.10.7). При этом, когда P стремится к B, G стремится к Y; а, когда P стремится к C, G стремится к Z.

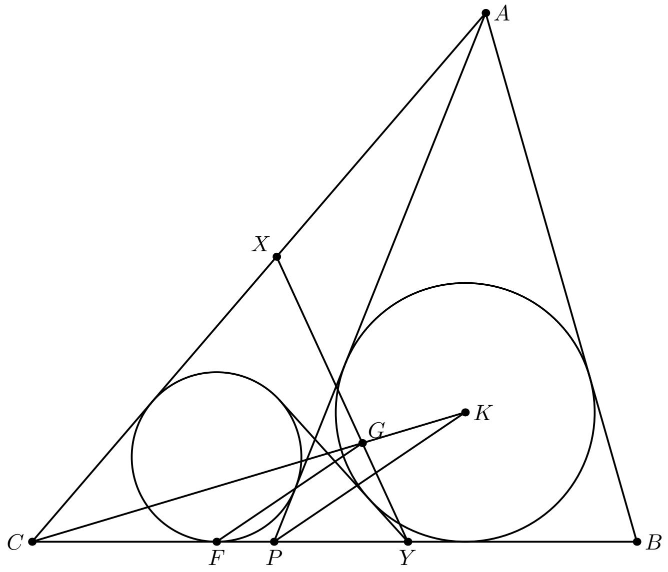


Рис. 10.7

8. (Ф.Нилов, Е.Морозов) В пространстве даны несколько точек и несколько плоскостей. Известно, что через любые две точки проходят ровно две плоскости, а каждая плоскость содержит не меньше четырех точек. Верно ли, что все точки лежат на одной прямой?

Ответ. Нет.

Решение. Рассмотрим конфигурацию из 12 точек — середин ребер куба $ABCDA'B'C'D'$ и 16 плоскостей, четыре из которых проходят через центр куба и перпендикулярны его диагоналям (сечения куба этими плоскостями являются правильными шестиугольниками), а остальные проходят через середины четырех ребер, смежных с одним ребром куба (например, ребер AB, BC, $A'B'$ и $B'C'$). Очевидно, что каждая плоскость содержит не меньше четырех точек. Кроме того, через любые две точки проходят ровно две плоскости: середины любых двух перпендикулярных ребер лежат в одном прямоугольном и одном шестиугольном сечении, середины двух параллельных ребер, лежащих в одной грани, — в двух прямоугольных, а середины двух противоположных ребер куба — в двух шестиугольных сечениях.