Пятнадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (И.Кухарчук, 8) В треугольнике ABC AA_1, CC_1 — высоты, P — произвольная точка на стороне BC. Точка Q на прямой AB такова, что $QP = PC_1$, а точка R на прямой AC такова, что $RP = CP$. Докажите, что четырехугольник QA_1RA вписанный.

   Решение. Очевидно, что точки A, C, A_1, C_1 лежат на одной окружности, обозначим ее ω_1. Заметим также, что середины X и Y отрезков QC_1 и RC являются проекциями точки P на AB и AC соответственно, следовательно, X, Y и A_1 лежат на окружности ω_2 с диаметром AP. Пусть точка O симметрична центру ω_1 (середина AC) относительно центра ω_2. По теореме Фалеса проекции O на AB и AC являются серединами отрезков AQ и AR соответственно, т.е. O — центр окружности, проходящей через A, Q и R. Поскольку O лежит на серединном перпендикуляре к AA_1, точка A_1 также лежит на этой окружности (рис.1).

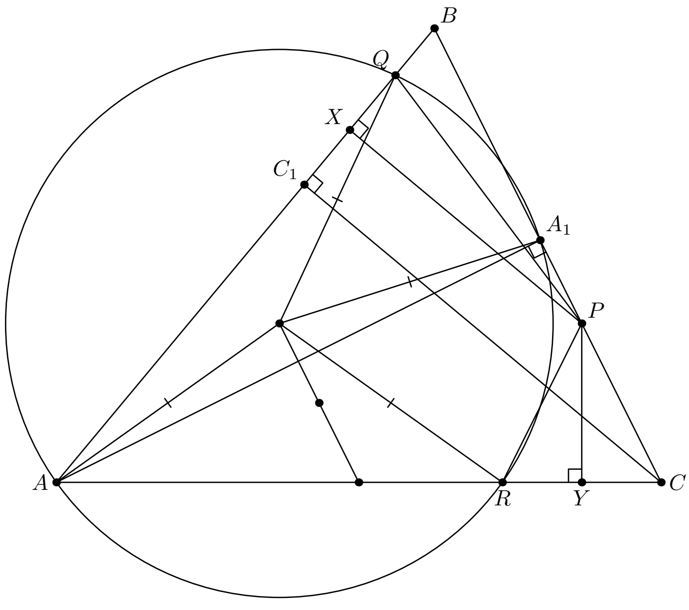

Рис. 1

2. (Д.Швецов, 8) Окружность ω_1 проходит через центр O окружности ω_2 и пересекает ее в точках A и B. Окружность ω_3 с центром в точке A и радиусом AB пересекает повторно окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D (отличных от B). Докажите, что точки C, O, D лежат на одной прямой.

   Решение. Так как дуги AC и AB окружности ω_1 равны, $\angle AOC = 180^\circ - \angle AOB$. С другой стороны, очевидно, что $\angle AOD = \angle AOB$ (рис.2), откуда и получаем искомое утверждение.

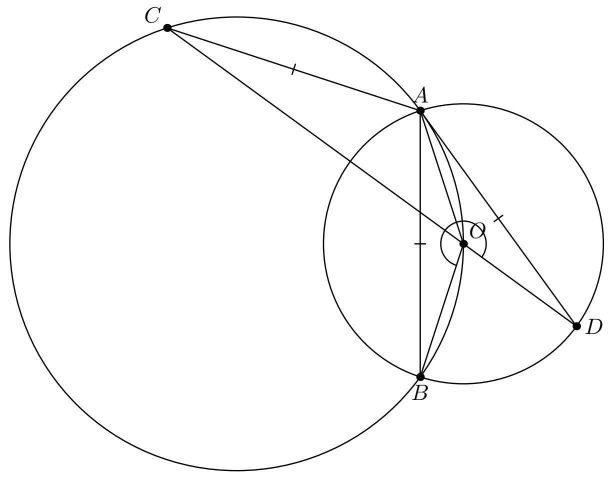

Рис. 2

3. (Л.Штейнгарц, 8) Внутри окружности расположен прямоугольник $ABCD$. Лучи BA и DA пересекают окружность в точках A_1 и A_2. Точка A_0 — середина хорды A_1A_2. Аналогично определяются точки B_0, C_0, D_0. Докажите, что отрезки A_0C_0 и B_0D_0 равны.

   Решение. Пусть X, Y — проекции центра окружности на прямые AB, CD соответственно (рис.3). Тогда $BB_1 - AA_1 = (XB_1 - XB) - (XA_1 - XA) = AX - BX = DY - CY = CC_1 - DD_1$. Следовательно, проекция отрезка A_0C_0 на прямую AB, равная $(A_1B_1 + C_1D_1 - AA_1 - CC_1)/2$, равна проекции на ту же прямую отрезка B_0D_0. Аналогично равны проекции этих отрезков на прямую AD, а значит и сами отрезки.

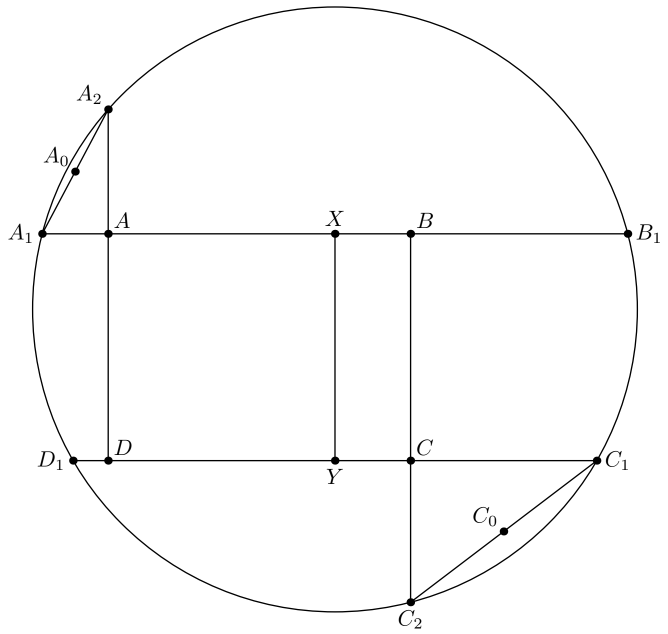

Рис. 3

4. (А.Тригуб, 8) В треугольнике ABC вневписанная окружность, лежащая напротив угла C, касается стороны AB в точке T. Пусть J — центр вневписанной окружности, лежащей напротив угла A, а M — середина AJ. Докажите, что $MT = MC$.

   Решение. Пусть R — проекция J на прямую AC. Тогда $CR = p - AC = AT$. Также $MR = MA$ как медиана в прямоугольном треугольнике AJR и $\angle MRA = \angle MAR = \angle MAT$ (рис.4). Следовательно, треугольники MTA и MCR равны по двум сторонам и углу между ними, а значит $MT = MC$.

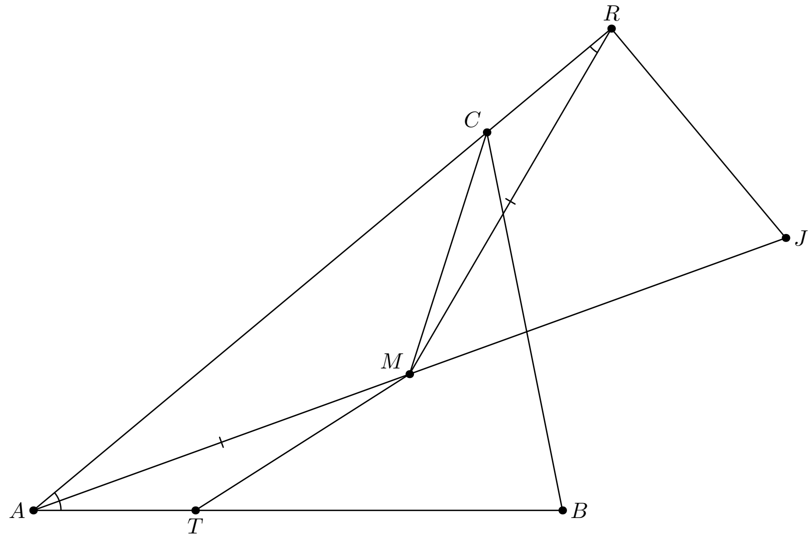

Рис. 4

5. (Ф.Ивлев, 8–9) На плоскости даны точки A, B, C и D общего положения и проходящая через B и C окружность ω. Точка P движется по ω. Обозначим через Q точку пересечения описанных окружностей треугольников ABP и PCD, отличную от P. Найдите геометрическое место точек Q.

   Решение. Поскольку $\angle(QA, QD) = \angle(QA, BA) + \angle(BA, DC) + \angle(DC, DQ) = \angle(QP, PB) + \angle(BA, DC) + \angle(PC, PQ) = \angle(PC, PB) + \angle(BA, DC)$ — не зависит от положения точки P, геометрическим местом точек Q будет окружность, проходящая через A и D.

6. (А.Акопян, 8–9) Два четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ симметричны друг другу относительно точки P. Известно, что четырехугольники A_1BCD, AB_1CD и ABC_1D вписанные. Докажите, что $ABCD_1$ тоже вписанный.

   Решение. Из условия следует, что $\angle(AD_1, D_1B) = \angle(AD_1, AB_1) + \angle(A_1B, D_1B) = \angle(A_1D, A_1B) + \angle(AB_1, B_1D) = \angle(AC, CD) + \angle(CD, BC) = \angle(AC, BC)$. Значит, точки A, B, C, D_1 лежат на одной окружности.

7. (П.Бибиков, 8–9) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_A, BH_B, CH_C. Пусть X — произвольная точка отрезка CH_C, а P — точка пересечения окружностей с диаметрами H_CX и BC, отличная от H_C. Прямые CP и AH_A пересекаются в точке Q, а прямые XP и AB — в точке R. Докажите, что точки A, P, Q, R, H_B лежат на одной окружности.

Решение. Так как четырехугольник $BCPH_C$ вписанный, то $\angle CPH_C = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \angle AHH_C$, где H — ортоцентр треугольника ABC. Поэтому четырехугольник $HQPH_C$ вписанный, т.е. $\angle CQH = \angle HH_CP$. Но $\angle HH_CP = \angle H_CRP$, поскольку H_CP — высота прямоугольного треугольника H_CRX. Таким образом, точки A, R, P и Q лежат на одной окружности. Кроме того, из вписанности четырехугольника H_CPH_BC получаем, что $\angle PH_BA = \angle PH_CC = \angle PRB$, следовательно, H_B лежит на той же окружности (рис.7).

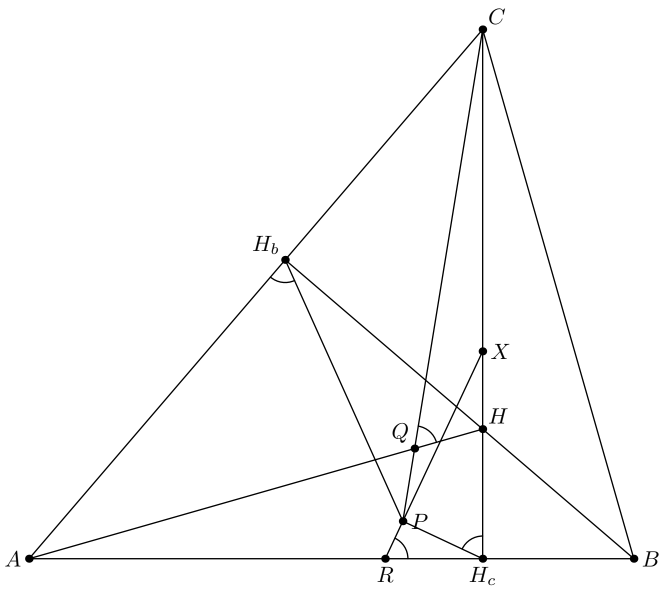

Рис. 7

8. (M.Etesamifard, 8–9) Окружность ω_1 проходит через вершину A параллелограмма $ABCD$ и касается лучей CB, CD. Окружность ω_2 касается лучей AB, AD и касается внешним образом ω_1 в точке T. Докажите, что T лежит на диагонали AC.

   Решение. Пусть T' — точка пересечения ω_1 с лучом AC. При гомотетии с центром T', переводящей C в A, лучи CB, CD переходят в лучи AD, AB соответственно. Поэтому окружность ω_1 переходит в окружность ω', касающуюся этих лучей и ω_1 в точке T'. Следовательно, ω' совпадает с ω_2, а T' — с T.

9. (Е.Бакаев, 8–9) В остроугольном треугольнике ABC A_M — середина стороны BC, A_H — основание высоты, опущенной на эту сторону. Аналогично определяются точки B_M, B_H, C_M, C_H. Докажите, что одно из отношений $A_MA_H : A_HA$, $B_MB_H : B_HB$, $C_MC_H : C_HC$ равно сумме двух других.

   Решение. Заметим, что, например, $C_MC_H = |AC_H - BC_H|/2$. Следовательно, $C_MC_H/C_HC = |\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B|/2$. Из этого и двух аналогичных равенств сразу следует утверждение задачи.

10. (А.Тригуб, 8–9) В треугольнике ABC N — середина дуги ABC описанной окружности треугольника, NP и NT — касательные к вписанной окружности. Прямые BP и BT пересекают второй раз описанную окружность треугольника в точках P_1 и T_1 соответственно. Докажите, что $PP_1 = TT_1$.

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности. Так как BN — внешняя биссектриса угла B, то $\angle IBN = 90^\circ = \angle IPN = \angle ITN$. Значит, точки B, I, N, T, P лежат на одной окружности, а поскольку $IT = IP$, то BI — биссектриса угла PBT. Поэтому точки P_1 и T_1 симметричны относительно диаметра описанной окружности, проходящего через N, т.е. $NP_1 = NT_1$. Кроме того $\angle NPB = \angle NTB$ и $NP = NT$, следовательно треугольники NPN_1 и NTT_1 равны, откуда получаем утверждение задачи (рис.10).

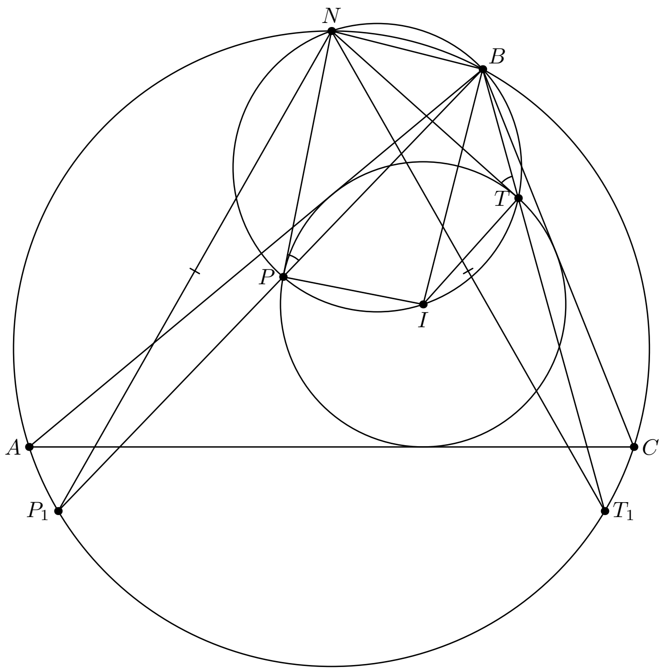

Рис. 10

11. (M.Saghafian, 8–9) Мортеза отметил на плоскости шесть точек и нашел площади всех 20 треугольников с вершинами в этих точках. Может ли оказаться, что все полученные числа целые, а их сумма равна 2019?

Ответ. Нет.

Решение. Рассмотрим любые четыре из отмеченных точек. Если они образуют выпуклый четырехугольник $ABCD$, то $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} + S_{BCD}$. Если же одна из точек лежит внутри треугольника, образованного тремя другими, то площадь этого треугольника равна сумме площадей трех внутренних. Таким образом, в любом случае сумма площадей четырех треугольников с вершинами в рассматриваемых точках будет четной. Если просуммировать такие суммы по всем четверкам, то площадь каждого треугольника будет посчитана трижды, следовательно, сумма площадей всех 20 треугольников также четна.

12. (Б.Френкин, 8–11) Пусть $A_1A_2A_3$ — остроугольный треугольник, радиус описанной окружности равен 1, O — ецј центр. Из вершин A_i проведены чевианы через O до пересечения с противолежащими сторонами в точках B_i соответственно ($i = 1, 2, 3$).

(a) Из трцх отрезков B_iO выберем самый длинный. Какова его наименьшая возможная длина?

(б) Из трчх отрезков B_iO выберем самый короткий. Какова его наибольшая возможная длина?

Ответ. (а), (б) 1/2.

Решение. Вначале покажем, что из двух отрезков B_iO длиннее тот, который направлен к меньшей стороне (ясно, что при равенстве сторон отрезки равны). Пусть, например, $A_1A_3 < A_2A_3$. Так как $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1$, имеем $\angle OA_2B_1 < \angle OA_1B_2$. В треугольниках A_1OB_2 и A_2OB_1 имеем $A_1O = A_2O$, $\angle A_1OB_2 = \angle A_2OB_1$. Отсюда $B_1O < B_2O$, что и требовалось.

(а) Пусть в остроугольном треугольнике $A_1A_2A_3$, вписанном в окружность радиуса 1, сторона A_1A_2 наименьшая. Тогда отрезок B_3O самый длинный среди B_iO. Так как $\angle A_3 \leq 60°$, то $\angle A_1OA_2 \leq 120°$ и $\angle OA_1A_2 \geq 30°$. Опустим из O перпендикуляр OP на A_1A_2. Тогда $1/2 \leq OP \leq B_3O$. Равенство достигается в равностороннем треугольнике.

б) Пусть в остроугольном треугольнике $A_1A_2A_3$, вписанном в окружность радиуса 1, сторона A_1A_2 наименьшая, а сторона A_2A_3 наибольшая, т.е. отрезок B_1O самый короткий среди B_iO. Будем двигать точку A_1 по описанной окружности в направлении точки A_2. При этом отрезок B_1O увеличивается, поскольку отклоняется от перпендикуляра из O на A_2A_3. Когда угол $A_1A_3A_2$ станет равен $180° - 2\angle A_2A_1A_3$, получим равнобедренный треугольник, в котором $A_1A_3 = A_2A_3 \geq A_1A_2$.

В треугольнике $A_1B_1A_3$ отрезок A_3O является биссектрисой, поэтому $B_1O/A_1O = B_1A_3/A_1A_3 = B_1A_3/A_2A_3$. Нетрудно видеть, что последнее отношение не больше 1/2 при $A_1A_2 \leq A_1A_3$. Значит, $B_1O \leq 1/2$. Равенство достигается в равностороннем треугольнике.

13. (Г.Филипповский, 9–10) В остроугольном треугольнике ABC с высотой $AT = h$ проведена прямая через центры O и I описанной и вписанной окружностей. Эта прямая пересекает стороны AB и AC в точках F и N соответственно, приччм около четырчхугольника $BFNC$ можно описать окружность. Найдите сумму расстояний от ортоцентра треугольника ABC до его вершин.

Ответ. $2h$.

Решение. Из вписанности четырехугольника $BNFC$ следует, что $\angle ONA = \angle B$. С другой стороны, $\angle OAC = \pi/2 - \angle B$. Поэтому $AO \perp OI$. Опустим перпендикуляр IT на AH. Так как AI — биссектриса угла OAH, прямоугольные треугольники AOI и ATI равны, т.е. $AT = AO = R$ и $h = AH = R + r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC (рис.13). Известно, что сумма расстояний от O до сторон треугольника равна $R + r$, а сумма расстояний от ортоцентра до вершин вдвое больше, откуда и получаем ответ.

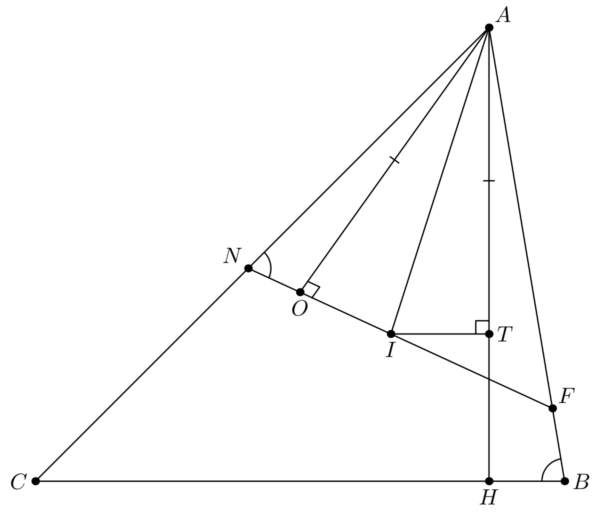

Рис. 13

14. (С.Арутюнян, 9–11) Сторона AC треугольника ABC касается вписанной окружности в точке K, а соответствующей вневписанной в точке L. Точка P — проекция центра вписанной окружности на серединный перпендикуляр к AC. Известно, что касательные в точках K и L к описанной окружности треугольника BKL пересекаются на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые AB и BC касаются окружности PKL.

Решение. Будем считать, что $AB > BC$. Пусть M — середина AC, N — середина дуги ABC, NW и KD — диаметры описанной и вписанной окружностей соответственно. Из условия получаем, что касательные к окружности BKL в точках K и L пересекаются в точке W, т.е. BW — симедиана треугольника BKL. Кроме того, точки B, D, L лежат на одной прямой, а прямая BW делит отрезок KD пополам. Поэтому треугольники BKL и BDK подобны, т.е. $\angle BMC = \angle BID = (\angle C - \angle A)/2$. Тогда $\angle BMN = (\pi - \angle C + \angle A)/2 = \angle BNM$ и $BM = BN$. Пусть S — такая точка на дуге AWC, что $\angle SBC = \angle ABM$. Тогда $\angle SNB = \angle ABM + \angle BAC = \angle BMC = \angle NSB$, т.е. $BS = BN = BM$ (рис.14). Из подобия треугольников ABM и SBC получаем, что $AB \cdot BC = BM \cdot BS = BM^2 = (2AB^2 + 2BC^2 - AC^2)/4$. Следовательно, $AC^2 = 2(AB - BC^2)$ или $AC = \sqrt{2}KL$. Применив теорему Стюарта к треугольнику AWC и чевиане WK, получаем $WK^2 = WC^2 - AK \cdot KC = WI^2 - (AM^2 - MK^2) = WI^2 - MK^2 = WI^2 - PI^2 = WP^2$ (по теореме о трезубце $WC = WI$). Таким образом, точки P, K, L лежат на окружности с центром W.

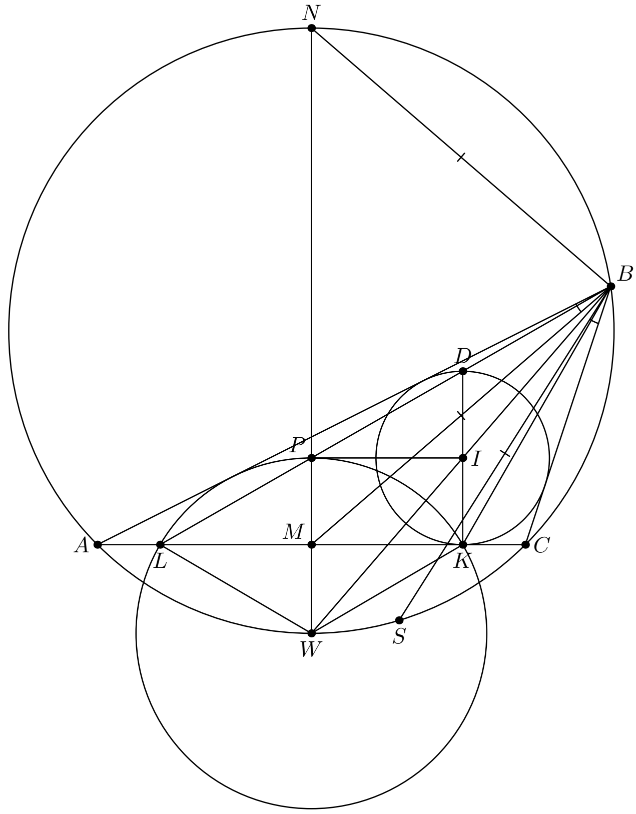

Рис. 14

Пусть R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC. Тогда расстояние от W до прямой AB равно $BW \sin\frac{\angle B}{2} = 2R\cos\frac{\angle C-\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2} = R(\sin\angle A + \sin\angle C)$. По теореме Карно $R + r = R(\sin\angle A + \sin\angle B + \sin\angle C)$, следовательно, это расстояние равно $R(1-\cos\angle B)+r = WM + MP = WP$, что равносильно утверждению задачи.

15. (M.Etesamifard, 9–11) Окружность ω, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Перпендикуляр из E на DF пересекает прямую BC в точке X, а перпендикуляр из F на DE пересекает BC в точке Y. Отрезок AD пересекает ω во второй раз в точке Z. Докажите, что описанная окружность треугольника XYZ касается ω.

    Решение. Пусть I — центр ω. Заметим, что $\angle FYX = \angle ICB = \angle FEX$, т.е. четырехугольник $XYEF$ — вписанный. Кроме того, прямые BC, EF и касательная к ω в точке Z пересекаются в одной точке T — полюсе прямой AD относительно ω. Поэтому $TZ^2 = TF \cdot TE = TX \cdot TY$, т.е. TZ — касательная к окружности XYZ (рис.15).

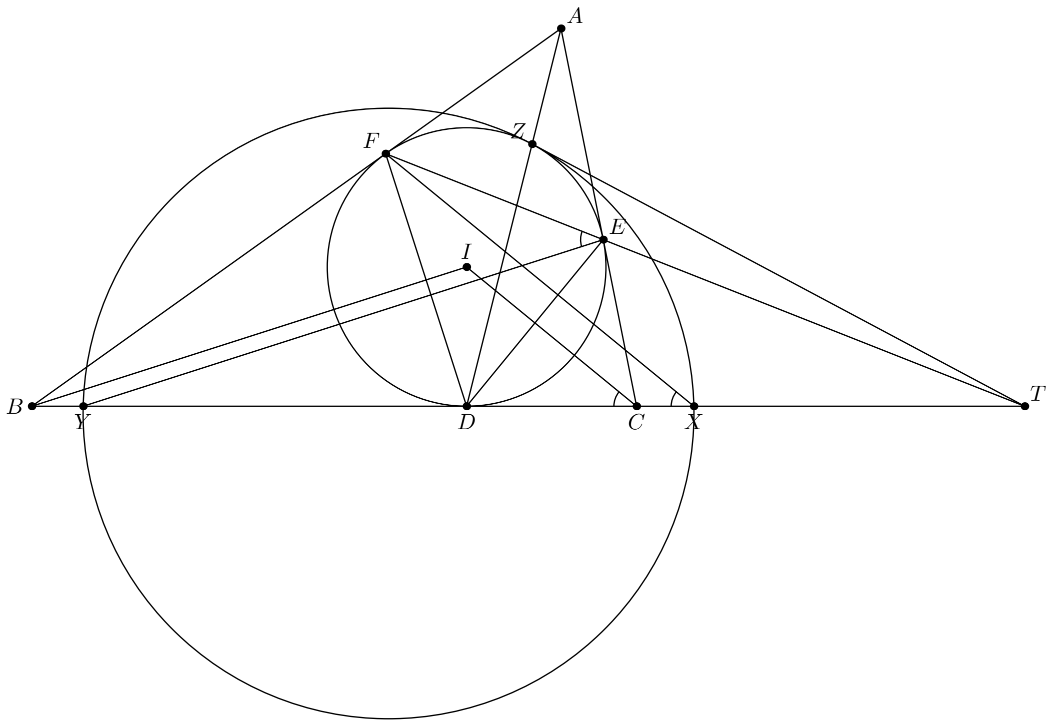

Рис. 15

16. (М.Плотников, 9–11) В треугольнике ABC AH_1 и BH_2 — высоты; касательная к описанной окружности в точке A пересекает BC в точке S_1, а касательная в точке B пересекает AC в точке S_2; T_1 и T_2 — середины отрезков AS_1 и BS_2. Докажите, что T_1T_2, AB и H_1H_2 пересекаются в одной точке.

    Решение. Очевидно, что точка T_1 лежит на средней линии B_0C_0 треугольника ABC, а прямая T_1A касается окружности AB_0C_0. Значит, $T_1A^2 = T_1B_0 \cdot T_1C_0$. Но точки B_0, C_0 лежат на окружности Эйлера треугольника ABC, следовательно, T_1 лежит на радикальной оси этой окружности и описанной окружности треугольника. Проведя аналогичное рассуждение для точки T_2, получаем, что T_1T_2 — радикальная ось описанной окружности и окружности Эйлера. Поскольку точки A, B, H_1, H_2 лежат на одной окружности, прямые AB и H_1H_2 являются радикальными осями этой окружности с описанной окружностью и окружностью Эйлера соответственно. Ясно, что три радикальные оси пересекаются в одной точке.

17. (Е.Бакаев, 10–11) Даны три окружности. Первая и вторая пересекаются в точках A_0 и A_1, вторая и третья — в точках B_0 и B_1, третья и первая — в точках C_0 и C_1. Пусть $O_{i,j,k}$ — центр описанной окружности треугольника $A_iB_jC_k$. Через все пары точек вида $O_{i,j,k}$ и $O_{1-i,1-j,1-k}$ провели прямые. Докажите, что эти 4 прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

    Решение. Пусть O — радикальный центр данных окружностей. Если O лежит вне окружностей, то существует окружность с центром O, перпендикулярная трем данным, и при инверсии относительно нее каждая из данных окружностей переходит в себя. Соответственно эта инверсия меняет местами точки A_0 и A_1, B_0 и B_1, C_0 и C_1, а значит, и окружности $A_iB_jC_k$ и $A_{1-i}B_{1-j}C_{1-k}$. Поэтому прямые, соединяющие центры таких пар окружностей, проходят через O.

Если же O лежит внутри данных окружностей, то их можно перевести в себя композицией инверсии и центральной симметрии с центром O. Следовательно, и в этом случае все четыре прямые проходят через O.

18. (Н.Белухов, А.Заславский, 10–11) Четырехугольник $ABCD$ без равных и без параллельных сторон описан около окружности с центром I. Точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA. Известно, что $AB\cdot CD = 4IK\cdot IM$. Докажите, что $BC\cdot AD = 4IL\cdot IN$.

Решение. Построим точку J такую, что $\triangle AJB \sim \triangle DIC$. Тогда четырехугольник $AJBI$ вписанный. Пусть k — его описанная окружность, а IK вторично пересекает k в точке J'. Поскольку $KJ : AB = IM : CD$, $IK\cdot KJ' = KA\cdot KB = AB^2/4$ и $4IK\cdot IM = AB\cdot CD$, получаем, что $KJ = KJ'$ (рис.18).

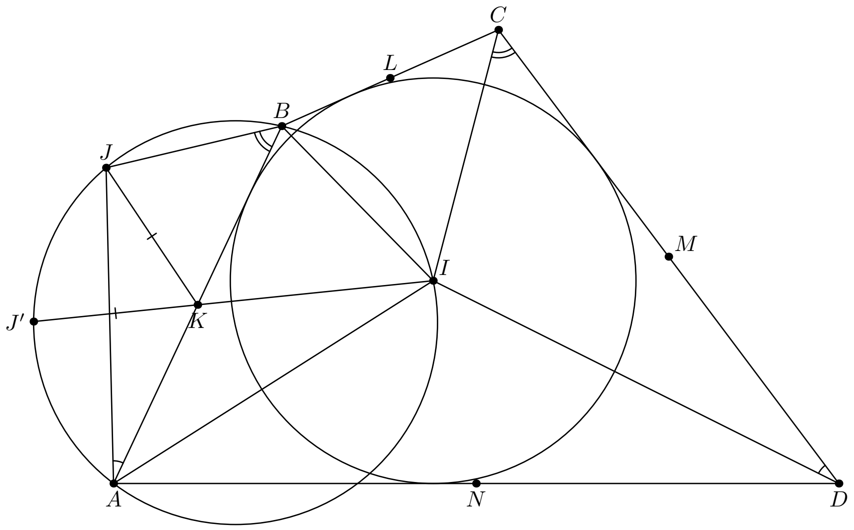

Рис. 18

Если AB — диаметр k, то $\angle AIB = 90^\circ$ и $AD\|BC$ — противоречие. Значит, AB — не диаметр k. Если $J = J'$, то $\angle ICB = \angle AIK$, $\angle IDA = \angle BIK$ и $BC = r(\operatorname{ctg}\angle IBK + \operatorname{ctg}\angle AIK) = r(\operatorname{ctg}\angle IAK + \operatorname{ctg}\angle BIK) = AD$ — противоречие. Тогда, поскольку $KJ = KJ'$, то J и J' симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB.

Далее, $\triangle AIK \sim \triangle J'BK \simeq \triangle JAK \sim \triangle IDM$. Отсюда и из равенств $\angle IAK = \angle IAD$, $\angle IDM = \angle IDA$ получаем, что $\triangle AIK \sim \triangle ADI \sim \triangle IDM$. Аналогично, $\triangle BIK \sim \triangle BCI \sim \triangle ICM$.

Пусть P и Q — середины IA и IB. Тогда $\triangle IND \sim \triangle KPI \simeq \triangle IQK \sim \triangle CLI$. Следовательно, $IN : ND = CL : LI$ и $4IL\cdot IN = AD\cdot BC$, ч.т.д.

Примечание. Описанный четырехугольник $ABCD$ без равных и без параллельных сторон удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда центр вписанной окружности I совпадает с центром тяжести вершин A, B, C, и D.

19. (А.Уткин, 10–11) В треугольнике ABC AL_a, BL_b, CL_c — биссектрисы, K_a — точка пересечения касательных к описанной окружности в вершинах B и C; K_b, K_c определены аналогично. Докажите, что прямые K_aL_a, K_bL_b и K_cL_c пересекаются в одной точке.

Решение. Так как треугольник ABK_c равнобедренный, то, применив теорему синусов к треугольникам AL_cK_c и BL_aK_c, получим, что $\sin\angle AK_cL_c : \sin\angle BK_cL_c = AL_c : BL_c$. Из этого и двух аналогичных соотношений, применив теорему Чевы, получаем утверждение задачи.

20. (А.Заславский, 10–11) В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, M — середина AB. Прямая MH пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке K, лежащей на описанной окружности треугольника. Точка P — проекция K на AC. Докажите, что $PH \parallel BC$.

Решение. Пусть Q — проекция K на BC. Тогда PQ — прямая Симсона точки K, следовательно, PQ делит пополам отрезок HK, а угол между PQ и высотой CH (прямой Симсона точки C) равен половине угла COK. Но OK — серединный перпендикуляр к отрезку CL, где L — вторая точка пересечения CH с описанной окружностью. Поэтому $\angle HCK = \angle CLK = \angle COK/2$, т.е. $PQ \parallel CK$. Значит PQ делит пополам отрезок CH. Кроме того, прямая MH вторично пересекает описанную окружность в точке C', диаметрально противоположной C, причем $C'M = MH$. Поэтому $CK \perp KC'$, т.е. соответственные стороны треугольников CPQ и BHC' перпендикулярны. Тогда и медианы этих треугольников перпендикулярны, следовательно, CH делит пополам отрезок PQ и $CPHQ$ — параллелограмм (рис.20).

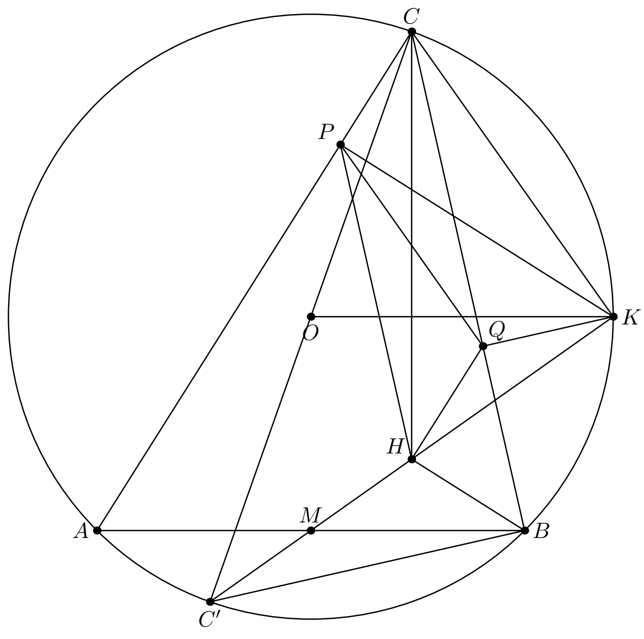

Рис. 20

21. (А.Сгибнев, А.Заславский, 10–11) Дан эллипс Γ и его хорда AB. Найдите геометрическое место ортоцентров вписанных в Γ треугольников ABC.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой AB. Тогда уравнение эллипса примет вид $(x-x_a)(x-x_B)+y(ax+by+c)=0$, причем $b>0$. Ортоцентр H имеет координаты (x_C, h), где h находится из условия перпендикулярности прямых AH и BC: $(x_C-x_A)(x_C-x_B)+hy_C=0$, т.е.

$h = -(x_C - x_A)(x_C - x_B)/y_C$. Но по теореме Виета ордината второй точки пересечения прямой XH с эллипсом равна $(x_C - x_A)(x_C - x_B)/by_C$. Таким образом, ГМТ ортоцентров — эллипс, полученный сжатием данного к прямой AB с коэффициентом $-b$. Поскольку этот коэффициент равен отношению квадратов диаметров эллипса, перпендикулярного и параллельного AB, полученный эллипс будет подобен данному, а их большие оси перпендикулярны.

22. (П.Кожевников, 10–11) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена высота AA_0. Окружность γ с центром в середине AA_0 касается прямых AB и AC. Из точки X прямой BC проведены две касательные к γ. Докажите, что эти касательные высекают на прямых AB и AC равные отрезки.

    Первое решение. Рассмотрим случай, когда X лежит на отрезке BA_0. Другие случаи разбираются аналогично.

    Пусть B_0 и C_0 — середины AC и AB соответственно, одна из касательных пересекает отрезок AC_0 в точке P, а другая пересекает отрезок CB_0 в точке Q.

    Применив к описанному четырехугольнику $APXQ$ теорему Ньютона, получим, что середины отрезков AA_0, AX и PQ лежат на одной прямой, т.е. середина R отрезка PQ лежит на средней линии B_0C_0 треугольника ABC.

    Пусть точка S симметрична A относительно R. Тогда S лежит на BC и $APSQ$ — параллелограмм. Следовательно, $C_0P : A_0S = B_0Q : A_0S$ и $C_0P = B_0Q$.

    Пусть теперь одна из касательных пересекает луч C_0B в точке P', а другая — луч B_0A в точке Q'. Аналогично получаем, что $C_0P' = B_0Q'$. Следовательно, $PP' = QQ'$, ч.т.д.

    Второе решение. Пусть одна из касательных пересекает AB и AC в точках Y_1 и Y_2, а другая — в точках Z_1 и Z_2 соответственно. Поскольку соответствие между этими точками проективно, достаточно доказать равенство $Y_1Z_1 = Y_2Z_2$ для трех положений точки X, т.е. в силу симметрии для какой-нибудь точки, отличной от середины BC. При стремлении X к точке B одна из точек Z_1, Y_1 также стремится к B, а другая — к точке P касания γ со стороной AB. Пусть Q — такая отличная от A точка стороны AC, что BQ касается γ, а B_0, C_0 — середины сторон AC, AB соответственно. Тогда имеем равенство двойных отношений $(B, C_0, P, \infty) = (Q, \infty, A, B_0)$, т.е. $AQ = BP$ (рис.22).

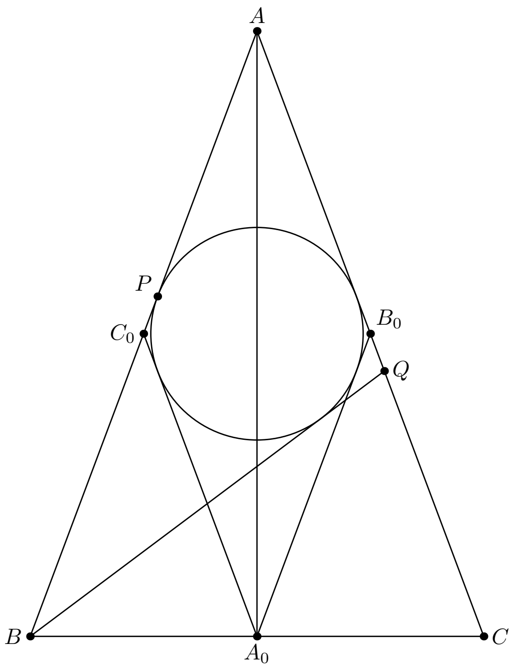

Рис. 22

23. (А.Скопенков, 10–11) На плоскости даны две замкнутые ломаные a, b (возможно, самопересекающиеся) и точки K, L, M, N. Вершины ломаных и эти точки находятся в общем положении (т.е. никакие три из них не лежат на прямой и никакие три отрезка, их соединяющие, не имеют общей внутренней точки). Каждый из отрезков KL и MN пересекает ломаную a в четном количестве точек, а каждый из отрезков LM и NK — в нечетном. Ломаная b, наоборот, пересекает каждый из отрезков KL и MN в нечетном количестве точек, а каждый из отрезков LM и NK — в четном. Докажите, что ломаные a и b пересекаются.

Первое решение. Так как вершины ломаной a находятся в общем положении, то эта ломаная разбивает плоскость на части, которые можно раскрасить в черный и белый цвета правильно (т.е. так, что соседние области разноцветны). «Программистское» пояснение нетривиальности и доказательство этого интуитивно очевидного утверждения приведено, например, в [Sk, §1.3, §2.2], [Sk18, §1.3, §2.2] .Пусть "внешняя" часть плоскости белая. Возьмем произвольную точку O самопересечения ломаной a и, отложив на ее звеньях, проходящих через O, отрезки $OA = OB = OC = OD = \varepsilon$, построим прямоугольник $ABCD$. При этом выберем ε достаточно малым, чтобы все точки пересечения ломаной a с b и отрезками KL, LM, MN, NK лежали вне этого прямоугольника. Если проделать эту операцию со всеми точками самопересечения и закрасить полученные прямоугольники белый цвет, то черная часть плоскости будет объединением нескольких непересекающихся многоугольников. Перекрасив теперь часть прямоугольников в черный цвет, соединим эти многоугольники в один многоугольник, границей которого будет несамопересекающаяся ломаная a'. Аналогично построим несамопересекающуюся ломаную b'. По построению ломаные a', b' будут пересекать друг друга и отрезки KL, LM, MN, NK в тех же точках, что и ломаные a, b. Предположим, что a' и b' не пересекаются. Тогда они делят плоскость на три части и, следовательно, какие-то две из точек K, L, M, N лежат в одной из этих частей. Но это невозможно, поскольку ломаная a' отделяет точки K и L от точек M

и N, а ломаная b' — точки K и N от точек M и L. Значит, a' и b' пересекаются, а тогда пересекаются и исходные ломаные.

Второе решение. Возьмем точку C в общем положении с вершинами ломаных и точками K, L, M, N. Обозначим через γ объединение отрезков $CK\cup CL\cup CM\cup CN$.

Как и в первом решении правильно раскрасим в черный и белый цвета части, на которые ломаная a разбивает плоскость. Обозначим через α объединение черных частей. Аналогично построим двумерное множество β по ломаной b.

Если ломаные a и b не пересекаются, то $a\cap\beta$ есть либо a, либо $\emptyset$, и $\alpha\cap b$ есть либо b, либо $\emptyset$. Тогда следующая цепочка сравнений по модулю 2 дает противоречие.

$$0 \underset{(1)}{=} |\partial(\gamma\cap\alpha\cap\beta)| \underset{(2)}{=} |\underbrace{\partial\gamma}_{=\{K,L,M,N\}}\cap\alpha\cap\beta| + |\gamma\cap\underbrace{\partial\alpha}_{=a}\cap\beta| + |\gamma\cap\alpha\cap\underbrace{\partial\beta}_{=b}| \underset{(3)}{=} 1+0+0 = 1.$$

Здесь (1) выполнено, поскольку $\gamma\cap\alpha\cap\beta$ есть объединение конечного количества невырожденных незамкнутых ломаных, у которых четное число концов. Сравнение (2) доказывается несложно (это «формула Лейбница»).

Докажем сравнение (3). Имеем

$$\{K,L,M,N\}\cap\alpha\cap\beta = (\{K,L,M,N\}\cap\alpha)\cap(\{K,L,M,N\}\cap\beta) = \{K,L\}\cap\{K,N\} = \{K\}.$$

Если $a\cap\beta=\emptyset$, то $\gamma\cap a\cap\beta=\emptyset$. Если же $a\cap\beta=a$, то

$$|\gamma\cap a\cap\beta| = |\gamma\cap a| = |KN\cap a| + |LM\cap a| = 1+1 = 0.$$

Итак, в обоих случаях $|\gamma\cap a\cap\beta|=0$. Аналогично $|\gamma\cap\alpha\cap b|=0$.

Примечания. При помощи аналогичных соображений о трехкратных пересечениях доказывается, что кольца Борромео невозможно расцепить. См. простое изложение в [Sk, §4].

Аналогично доказывается многомерная версия утверждения задачи — лемма о кольцах Борромео [AMS+]. Эта лемма играет важную роль при исследовании сложности реализуемости гиперграфов в многомерных пространствах [MTW11, ST17].

Список литературы

[AMS+] *S. Avvakumov, I. Mabillard, A. Skopenkov and U. Wagner.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, III. Codimension 2, Israel J. Math., submitted, arxiv:1511.03501.

[MTW11] *J. Matoušek, M. Tancer, U. Wagner.* Hardness of embedding simplicial complexes in R^d, J. Eur. Math. Soc. 13:2 (2011), 259–295. arXiv:0807.0336.

[Sk] *А. Скопенков.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf.

[Sk18] *A. Skopenkov.* Invariants of graph drawings in the plane, Arnold J. Math., submitted, arXiv:1805.10237.

[ST17] *A. Skopenkov and M. Tancer,* Hardness of almost embedding simplicial complexes in R^d, Discr. Comp. Geom., to appear, arXiv:1703.06305.

24. (Н.Белухов, 11) Даны два единичных куба с общим центром. Всегда ли можно занумеровать вершины каждого из кубов от 1 до 8 так, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами с одинаковыми номерами не превышало 4/5? А чтобы не превышало 13/16?

Решение. Пусть $\kappa = A_1A_2\ldots A_8$ — один из двух кубов, причем $A_1A_2A_3A_4$ — его грань и вершина A_i смежна с A_{i+4} при всех $i = 1, 2, 3, 4$; обозначим через d_1, d_2, d_3, d_4 диагонали κ. Пусть λ — второй куб, а e_1, e_2, e_3, e_4 — его диагонали. Обозначим общий центр кубов через O, а их описанную сферу через s. Пусть μ — отрезок, меньший диаметра s, а α — центральный угол, соответствующий хорде μ сферы s.

Рассмотрим множество S_i диагоналей e_j таких, что угол между d_i и e_j не превосходит α. Предположим, что для каждого $1 \le k \le 4$ объединение k множеств S_i содержит хотя бы k элементов. Тогда по лемме Холла можно выбрать представителя e'_i из каждого S_i так, что все четыре представителя будут различны, и, сопоставив концам каждой диагонали d_i концы соответствующей e'_i, получим, что расстояния между вершинами каждой пары не превосходит μ.

Рассмотрим теперь различные значения k и найдем соответствующие границы для μ.

$k = 4$: пусть P — центр сферической шапочки, отсекаемой от s плоскостью $A_1A_2A_3A_4$. (Т.е. P — такая точка на s, что $PA_1 = PA_2 = PA_3 = PA_4$ и $A_1A_2A_3A_4$ разделяет O и P.)

Нам нужно, чтобы объединение восьми шапочек с центрами A_i и радиусами α содержало все вершины λ, т.е. покрывало s. Это равносильно условию $\mu \ge PA_1$; обозначим $PA_1 = \mu_4$.

$k = 3$: пусть Q — такая точка меньшей из дуг большого круга $\smile A_1A_3$, что $A_2Q = A_4Q = \mu$ и $A_1Q \le QA_3$. Аналогично определим R и S на дугах $\smile A_1A_6$ и $\smile A_1A_8$.

Можно считать, что объединение шапочек с центрами A_2, A_4, A_5, A_3, A_6, A_8 и радиусами α содержит не менее шести вершин λ. Это равносильно тому, что дополнение этого объединения содержит не более двух вершин λ. Это дополнение состоит из двух связных компонент, симметричных относительно O; следовательно, каждая из компонент содержит не более одной вершины λ. Одна из этих компонент лежит внутри равностороннего сферического треугольника QRS и содержит точки сколь угодно близкие к Q, R, и S, значит, необходимо и достаточно выполнение неравенства $QR \le 1$ или $\mu \ge \mu_3$, где μ_3 — значение μ, при котором достигается равенство. Легко убедиться, что $\mu_3 > \mu_4$.

При $k = 2$ и $k = 1$ обозначим через T_i множество всех d_j, для которых угол между e_i и d_j не превосходит α.

$k = 2$: предположим, что $S_1 \cup S_2$ не содержит e_1, e_2 и e_3. Тогда $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ не содержит d_1 и d_2. Из случая $k = 3$ известно, что для исключения этого случая должно быть $\mu \ge \mu_3$.

$k = 1$: предположим, что S_1 не содержит e_i. Тогда объединение всех T_i не содержит d_1. Из случая $k = 4$ известно, что для исключения этого случая должно быть $\mu \ge \mu_4$.

Таким образом, $\mu \geq \mu_3$ всегда подходит. Чтобы убедиться, что $\mu < \mu_3$ не подходят, рассмотрим куб λ с центром O и ребром QR, построенным при разборе случая $k = 3$. Не более одной из вершин Q и R куба λ могут быть сопоставлены A_1; но для любой другой вершины κ расстояние до второй из этих точек не меньше μ_3. Таким образом, наименьшее расстояние, удовлетворяющее условию задачи, равно $\mu_3 = \sqrt{\frac{9-2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{6}}$. Поскольку $4/5 < \mu_3 < 13/16$, ответ на первый вопрос задачи отрицательный, а на второй положительный.