Шестнадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Шестнадцатой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

Задачи олимпиады рассчитаны на учащихся последних четырех классов средней школы. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решенные задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого её пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. **Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением**. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме **не раньше 1 декабря 2019 и не позднее 1 марта 2020 года**. Для этого нужно зайти на сайт **https://contest.yandex.ru/geomshar/**, справа наверху указать язык (русский), слева наверху нажать "Регистрация"и следовать появляющимся инструкциям.

ВНИМАНИЕ:

1. Решение каждой задачи (и каждого её пункта, если задача имеет пункты) должно содержаться в отдельном файле формата pdf, doc, docx или jpg. Если решение состоит из нескольких файлов, то нужно создать из них архив (zip или rar) и загрузить его.

2. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. **Во всех случаях необходимо убедиться перед отправкой, что файл хорошо читается**.

3. Если несколько раз загружается решение одной и той же задачи, то в системе проверки остается только последнее. **Поэтому при необходимости что-то изменить Вам следует снова загрузить решение задачи полностью.**

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomshar@yandex.ru. (НЕ присылайте работы на этот адрес!)**

Финальный тур состоится летом 2020 года под Москвой. На него будут приглашены победители заочного тура, не закончившие к этому времени школу. Критерии прохождения на финал определяются после проверки работ заочного тура в зависимости от количества участников с тем или иным результатом. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** не позднее 1 июня 2020 г. Свои результаты Вы сможете узнать после публикации списков по адресу **geomshar@yandex.ru**.

1. (8) В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. На отрезках AB_0 и BA_0 во внешнюю сторону построены как на основаниях равносторонние треугольники с вершинами C_1, C_2. Найдите угол $C_0C_1C_2$.

2. (8) Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Окружность, проходящая через точки A и B , пересекает диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Пусть прямые AF и BC пересекаются в точке P, а прямые BE и AD в точке Q. Докажите, что PQ параллельна CD.

3. (8) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, вне треугольника взята точка D, так что $\angle ADC = \angle BAC$ и отрезок CD пересекает гипотенузу AB в точке E. Известно, что расстояние от точки E до катета AC равно радиусу описанной окружности треугольника ADE. Найдите углы треугольника ABC.

4. (8) Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABD лежит на прямой CF, где F — проекция D на AB.

5. (8–9) В треугольнике ABC проведены высоты BB_1, CC_1 и диаметр AD описанной окружности. Прямые BB_1 и DC_1 пересекаются в точке E, а прямые CC_1 и DB_1 — в точке F. Докажите, что $\angle CAE = \angle BAF$.

6. (8–9) Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q. Пусть O — точка пересечения общих внешних касательных к ω_1 и ω_2. Прямая, проходящая через точку O, пересекает ω_1 и ω_2 в точках A и B соответственно, так, что эти две точки лежат по одну сторону от PQ. Прямая PA повторно пересекает ω_2 в точке C, а прямая QB повторно пересекает ω_1 в точке D. Докажите, что O, C и D лежат на одной прямой.

7. (8–9) Докажите, что точки пересечения средних линий треугольника ABC со сторонами треугольника, вершинами которого являются центры вневписанных окружностей, лежат на одной окружности.

8. (8–9) Две окружности пересекаются в точках P и R. Через точку P проведены прямые l_1, l_2. Прямая l_1 вторично пересекает окружности в точках A_1 и B_1. Касательные в этих точках к описанной окружности треугольника A_1RB_1 пересекаются в точке C_1. Прямая C_1R пересекает A_1B_1 в точке D_1. Аналогично определены точки A_2, B_2, C_2, D_2. Докажите, что окружности D_1D_2P и C_1C_2R касаются.

9. (8–9) Постройте треугольник ABC по вершине A, центру описанной окружности O и прямой Эйлера, если известно, что прямая Эйлера отсекает на сторонах AB и AC равные отрезки от вершины A.

10. (8–9) Дана замкнутая ломаная $A_1A_2\ldots A_n$ и окружность ω, которая касается каждой из прямых $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$. Звено ломаной называется *хорошим*, если оно касается окружности, и *плохим* в противном случае (т.е. если продолжение этого звена касается окружности). Докажите, что плохих звеньев четное количество.

11. (8–9) В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$, AD — биссектриса. Построен равносторонний треугольник PDQ с высотой DA. Прямые PB и QC пересекаются в точке K. Докажите, что AK — симедиана треугольника ABC.

12. (8–10) В неравнобедренном треугольнике ABC H — ортоцентр. Биссектриса угла BHC пересекает прямые AB и AC в точках P и Q соответственно. Перпендикуляры, восставленные к AB и AC из P и Q, пересекаются в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам.

13. (9–11) В треугольнике ABC I — центр вписанной окружности, вневписанная окружность с центром I_A касается стороны BC в точке A'. Через I проведена прямая $l \perp BI$. Оказалось, что l пересекает I_AA' в точке K, лежащей на средней линии, параллельной BC. Докажите, что $\angle B \leq 60^\circ$.

14. (9–11) Докажите, что в неравнобедренном треугольнике одна из окружностей, касающихся вписанной и описанной окружностей внутренним, а одной из вневписанных внешним образом, проходит через вершину треугольника.

15. (9–11) Окружность, проходящая через вершины B и D четырехугольника $ABCD$, пересекает его стороны AB, BC, CD и DA в точках K, L, M и N соответственно. Окружность, проходящая через точки K и M, пересекает прямую AC в точках P и Q. Докажите, что точки L, N, P и Q лежат на одной окружности.

16. (9–11) В треугольнике ABC чевианы AP и AQ симметричны относительно биссектрисы. Точки X, Y — проекции B на AP и AQ соответственно, а точки N и M — проекции C на AP и AQ соответственно. Докажите, что XM и NY пересекаются на BC.

17. (10–11) Хорды A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются в точке D. Прямая A_1B_1 пересекает серединный перпендикуляр к отрезку DD', где точка D' инверсна к D, в точке C. Докажите, что $CD \parallel A_2B_2$.

18. (10–11) Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку BB_1 пересекает прямые AA_1, CC_1 в точках A_0, C_0. Докажите, что описанные окружности треугольников A_0IC_0 и ABC касаются.

19. (10–11) Четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB \perp CD$ и $AD \perp BC$. Докажите, что существует точка, расстояния от которой до прямых, содержащих стороны четырехугольника пропорциональны этим сторонам.

20. (10–11) К вписанной окружности треугольника ABC проведена касательная, параллельная BC. Она пересекает внешнюю биссектрису угла A в точке X. Точка Y — середина дуги BAC описанной окружности. Докажите, что угол XIY прямой.

21. (10–11) Диагонали вписанно-описанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке L. Даны три отрезка, равные AL, BL, CL. Восстановите четырехугольник с помощью циркуля и линейки.

22. (10–11) Дан вписанный в окружность Ω четырехугольник $ABCD$. На диагонали AC берутся пары точек P, Q таких, что лучи BP и BQ симметричны относительно биссектрисы угла B. Найдите геометрическое место центров окружностей PDQ.

23. (10–11) Назовем *почти выпуклым* несамопересекающийся многоугольник, у которого ровно один внутренний угол больше 180°.

    На плоскости даны 1000000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Может ли оказаться, что существует ровно десять различных почти выпуклых 1000000-угольников с вершинами в этих точках?

24. (11) Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, а J – центр сферы, касающейся грани BCD и плоскостей остальных граней (вне самих граней). Отрезок IJ пересекает сферу, описанную около тетраэдра, в точке K. Что больше: IK или JK?