Шестнадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Д.Швецов, 8) В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. На отрезках AB_0 и BA_0 во внешнюю сторону построены как на основаниях равносторонние треугольники с вершинами C_1, C_2. Найдите угол $C_0C_1C_2$.

   Ответ. 30°.

   Решение. Так как $C_0B_0 = A_0B = A_0C_2$, $C_0A_0 = AB_0 = B_0C_1$ и $\angle C_0A_0C_2 = \angle C_0B_0C_1 = 150^\circ$, то треугольники $C_0A_0C_2$ и $C_1B_0C_0$ равны (рис.1). Поэтому $C_0C_1 = C_0C_2$ и $\angle C_1C_0C_2 = \angle A_0C_0B_0 + \angle B_0C_0C_1 + \angle A_0C_0C_2 = 120^\circ$. Следовательно, $\angle C_0C_1C_2 = \angle C_0C_2C_1 = 30^\circ$.

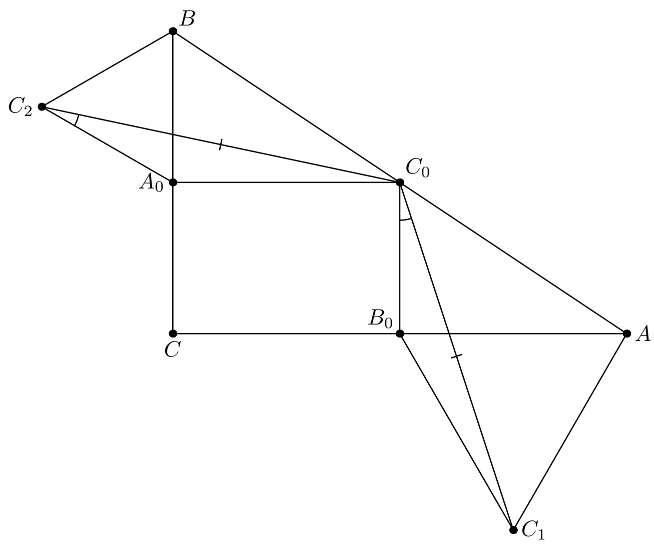

Рис. 1

2. (А.Акопян, 8) Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Окружность, проходящая через точки A и B , пересекает диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Пусть прямые AF и BC пересекаются в точке P, а прямые BE и AD в точке Q. Докажите, что PQ параллельна CD.

   Решение. Из вписанности четырехугольников $ABCD$ и $ABEF$ получаем, что $\angle CBD = \angle CAD$ и $\angle EBF = \angle EAF$. Значит, $\angle PBQ = \angle PAQ$, т.е. четырехугольник $ABPQ$ тоже вписанный (рис.2). Следовательно, прямые CD и PQ параллельны, так как обе они антипараллельны AB относительно прямых AP и BQ.

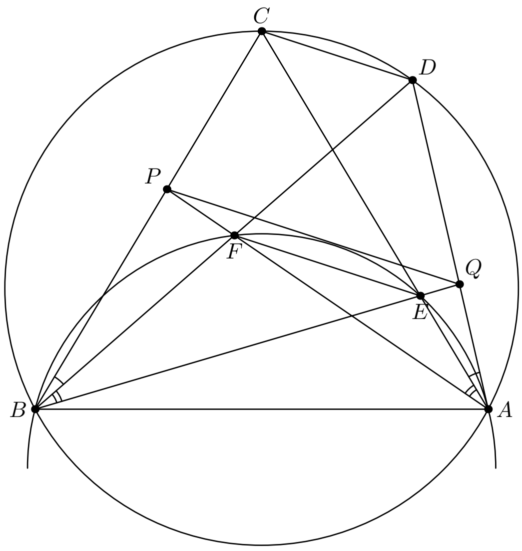

Рис. 2

3. (Н.Москвитин, 8) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, вне треугольника взята точка D, так что $\angle ADC = \angle BAC$ и отрезок CD пересекает гипотенузу AB в точке E. Известно, что расстояние от точки E до катета AC равно радиусу описанной окружности треугольника ADE. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ. $\angle A = \angle B = 45°$.

Решение. По теореме синусов радиус описанной окружности треугольника ADE равен $AE/2\sin\angle ADE$. С другой стороны, расстояние от E до AC равно $AE\sin\angle BAC$. Тогда из условия задачи следует, что $2\sin^2\angle A = 1$, т.е. $\angle A = 45°$ (рис.3).

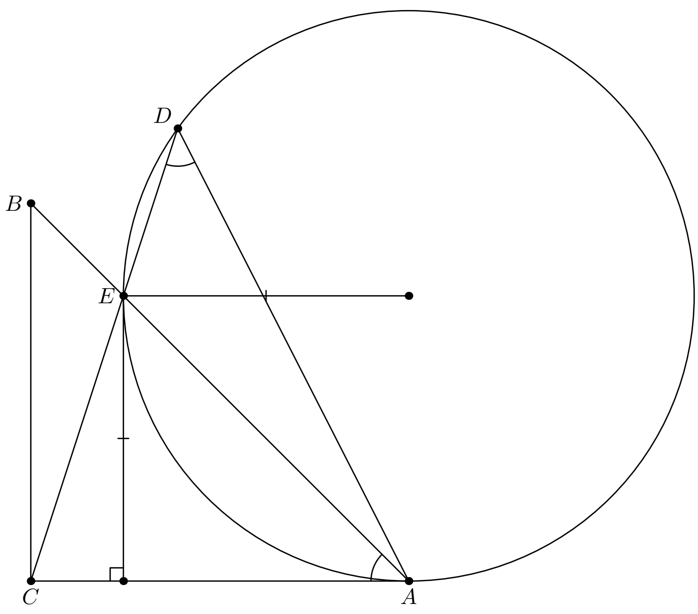

Рис. 3

4. (D.Burek, Польша, 8) Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABD лежит на прямой CF, где F — проекция D на AB.

Решение. Пусть M — середина AB. Тогда $FM = CD/2$, следовательно, диагонали трапеции $CDFM$ делят друг друга в отношении $2 : 1$, считая от точек C, D (рис.4). Значит, точка пересечения этих диагоналей совпадает с центром тяжести треугольника ABD.

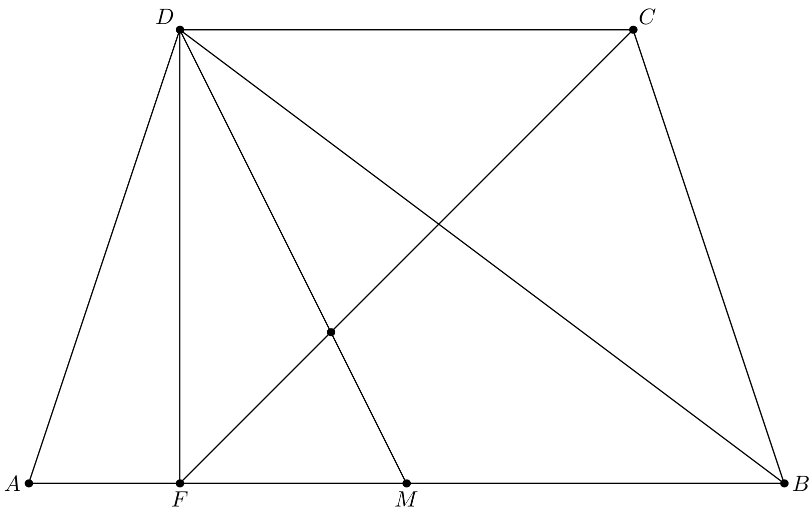

Рис. 4

5. (А.Куликова, Д.Прокопенко, 8–9) В треугольнике ABC проведены высоты BB_1, CC_1 и диаметр AD описанной окружности. Прямые BB_1 и DC_1 пересекаются в точке E, а прямые CC_1 и DB_1 — в точке F. Докажите, что $\angle CAE = \angle BAF$.

Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда прямые AH и AD являются изогоналями относительно угла B_1AC_1. По теореме об изогоналях прямые AE и AF также являются изогоналями.

6. (А.Акопян, 8–9) Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q. Пусть O — точка пересечения общих внешних касательных к ω_1 и ω_2. Прямая, проходящая через точку O, пересекает ω_1 и ω_2 в точках A и B соответственно, так, что эти две точки лежат по одну сторону от PQ. Прямая PA повторно пересекает ω_2 в точке C, а прямая QB повторно пересекает ω_1 в точке D. Докажите, что O, C и D лежат на одной прямой.

Решение. Из вписанности четырехугольников $ADPQ$ и $BPCQ$ следует, что $\angle DAC = \angle DQP = \angle BCP$, т.е. $AD \parallel BC$ (рис.6). Поскольку точка O является центром гомотетии данных окружностей и A при этой гомотетии переходит в B, то D переходит в C.

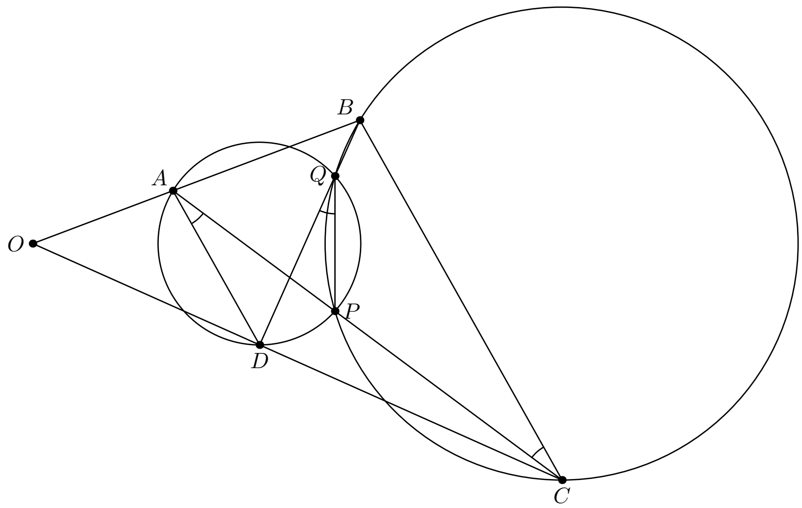

Рис. 6

7. (В.Стародуб, Украина, 8–9 Докажите, что точки пересечения средних линий треугольника ABC со сторонами треугольника, вершинами которого являются центры вневписанных окружностей, лежат на одной окружности.

   Решение. Пусть A_b — проекция A на внешнюю биссектрису угла B, аналогично определим точки A_c, B_c, B_a, C_a, C_b. Известно. что A_bA_c — средняя линия треугольника ABC. Следовательно, надо доказать вписанность шестиугольника $A_bC_bB_cA_cC_aB_a$.

   Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Тогда четырехугольники $AA_bI_aA_c$ и BCB_cC_b — вписанные. Поэтому $\angle A_cA_bI_a = \angle A_cAI_a = (\pi - \angle B)/2 = \angle CBI_a = \angle C_bB_cI_a$, т.е. четырехугольник $A_bA_cB_cC_b$ вписанный (рис.7). При этом серединные перпендикуляры к A_cB_c и A_bC_b проходят через середины сторон AB, AC соответственно и параллельны биссектрисам углов C, B соответственно. Значит центром окружности $A_bA_cB_cC_b$ является центр вписанной окружности серединного треугольника. Отсюда получаем, что точки B_a, C_a лежат на этой же окружности.

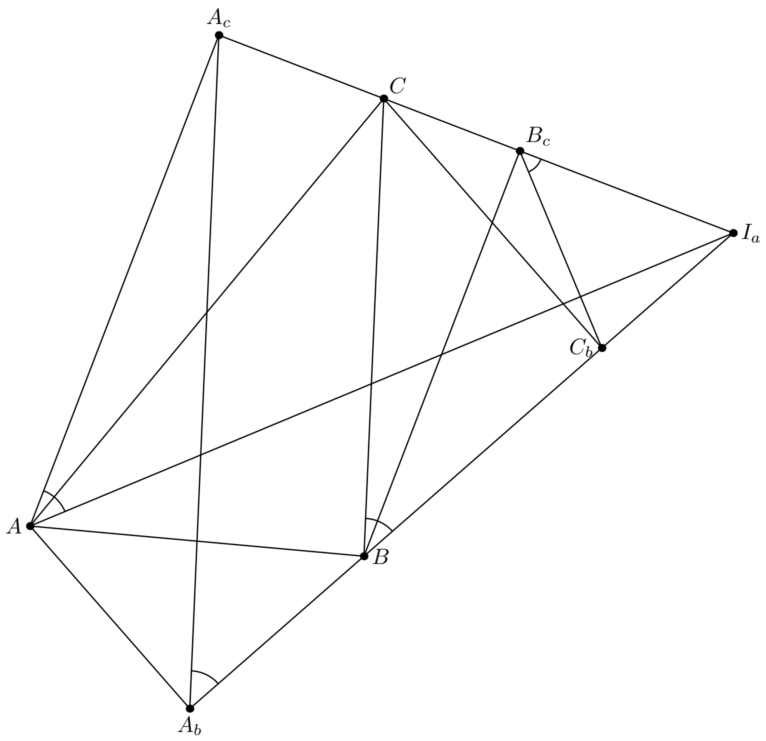

Рис. 7

8. (П.Рябов, 8–9) Две окружности пересекаются в точках P и R. Через точку P проведены прямые l_1, l_2. Прямая l_1 вторично пересекает окружности в точках A_1 и B_1. Касательные в этих точках к описанной окружности треугольника A_1RB_1 пересекаются в точке C_1. Прямая C_1R пересекает A_1B_1 в точке D_1. Аналогично определены точки A_2, B_2, C_2, D_2. Докажите, что окружности D_1D_2P и C_1C_2R касаются.

   Решение. Докажем, что они касаются в точке R. Заметим, что точки D_1, D_2, P, R лежат на одной окружности, так как D_1R и D_2R — соответствующие линии в подобных треугольниках A_1RB_1 и A_2RB_2. Пусть касательные к окружностям в точках A_1 и A_2 пересекаются в точке X, а в B_1 и B_2 в точке Y. Заметим, что $\angle A_1XA_2 = \angle A_1RA_2$ (углу поворота), следовательно точки A_1, X, R, A_2 лежат на одной окружности. Аналогично точки X, R, C_1, C_2, Y лежат на одной окружности. Чтобы доказать, что окружности касаются достаточно доказать, что $D_1D_2 \parallel C_1C_2$. Имеем $\angle D_1D_2R = \angle D_1PR = \angle RXC_1 = \angle RC_2C_1$, следовательно, прямые параллельны, ч.т.д.

9. (Г.Филипповский, Украина, 8–9) Постройте треугольник ABC по вершине A, центру описанной окружности O и прямой Эйлера, если известно, что прямая Эйлера отсекает на сторонах AB и AC равные отрезки от вершины A.

   Решение. Из условия следует. что прямая Эйлера параллельна внешней биссектрисе угла A. Так как AO и AH — изогонали, то $AO = AH$. Значит, мы можем найти H как вторую точку пересечения окружности с центром A и радиусом AO с прямой Эйлера. Пусть теперь AH вторично пересекает описанную окружность в точке D. Тогда B и C — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку HD с описанной окружностью.

Примечание. Так как в любом треугольнике AH равно удвоенному расстоянию от O до BC, а в нашем треугольнике AH равно радиусу описанной окружности, угол A равен 60 или 120 градусам. Легко видеть, что при $\angle A = 60^\circ$ прямая Эйлера параллельна внешней биссектрисе угла A, а при $\angle A = 120^\circ$ — внутренней. Таким образом, в данном треугольнике $\angle A = 60^\circ$.

10. (А. Иванищук, 8–9) Дана замкнутая ломаная $A_1A_2\dots A_n$ и окружность ω, которая касается каждой из прямых $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$. Звено ломаной называется *хорошим*, если оно касается окружности, и *плохим* в противном случае (т.е. если продолжение этого звена касается окружности). Докажите, что плохих звеньев четное количество.

    Решение. Пусть O — центр окружности, а T_i — точка ее касания с прямой A_iA_{i+1} (считаем, что A_{n+1} совпадает с A_1.) Назовем треугольник ABC *положительно ориентированным* если вершины A, B, C идут против часовой стрелки и *отрицательно ориентированным* в противном случае.

    Заметим, что треугольники OA_iT_i и $OA_{i+1}T_i$ ориентированы одинаково тогда и только тогда, когда звено A_iA_{i+1} плохое. С другой стороны, треугольники $OA_{i+1}T_i$ и $OA_{i+1}T_{i+1}$ всегда ориентированы по-разному. Следовательно, звено A_iA_{i+1} плохое тогда и только тогда, когда треугольники OA_iT_i и $OA_{i+1}T_{i+1}$ ориентированы поразному. Значит, число плохих звеньев равно числу перемен ориентации в последовательности треугольников $OA_1T_1, OA_2T_2, \dots, OA_nT_n$, которое, очевидно, четно.

11. (А.Уткин, 8–9) В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$, AD — биссектриса. Построен равносторонний треугольник PDQ с высотой DA. Прямые PB и QC пересекаются в точке K. Докажите, что AK — симедиана треугольника ABC.

    Решение. Докажем, что точки P и B лежат по разные стороны от AD. Действительно, в противном случае пусть U — точка пересечения AD и PD, а V — точка пересечения AC и QD. Тогда $AUDV$ — ромб, поскольку $\angle UAD = \angle VAD = \angle UDA = \angle VDA = 30^\circ$. Применяя теорему Паппа к точкам (P, A, Q) и (B, D, C), получим, что $PB \parallel QC$, что противоречит условию задачи (рис.11).

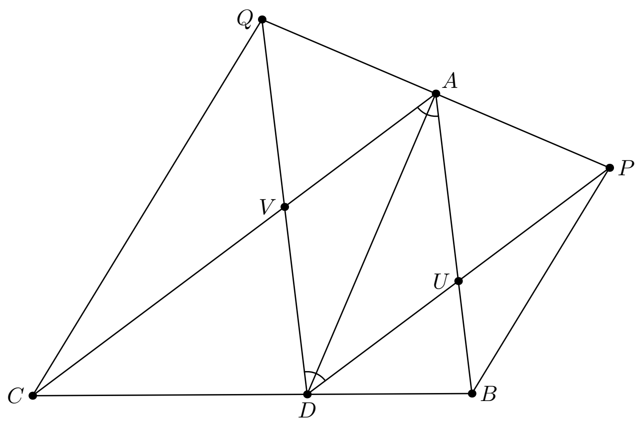

Рис. 11

Теперь заметим, что по теореме об изогоналях точки пересечения прямых PB и QC, PC и QB изогональны относительно угла A. Но, как показано выше, прямые PC и

QB параллельны, а поскольку $AP = AQ$, то они параллельны медиане треугольника ABC, откуда и получаем утверждение задачи.

12. (A.Mudgal, P.Srivastava, Индия, 8–10) В неравнобедренном треугольнике ABC H — ортоцентр. Биссектриса угла BHC пересекает прямые AB и AC в точках P и Q соответственно. Перпендикуляры, восставленные к AB и AC из P и Q, пересекаются в точке K. Докажите, что прямая KH делит отрезок BC пополам.

    Решение. Заметим, что A— ортоцентр треугольника BHC. Поэтому можно, поменяв роли точек A и H, переформулировать задачу.

    Пусть H — ортоцентр неравнобедренного треугольника ABC. Биссектриса угла A пересекает высоты BH, CH в точках P и Q соответственно. Перпендикуляры, восставленные к BH и CH из P и Q, пересекаются в точке K. Докажите, что AK делит пополам отрезок BC.

    Пусть M — середина хорды BC, а S и T — середины дуг BAC и BC окружности ABC. Тогда T лежит на прямой APQ и надо доказать, что A, K, M лежат на одной прямой.

    Пусть L — точка пересечения KH и PQ, N — проекция M на прямую $APQT$, а R — точка пересечения AH и MN (рис.12).

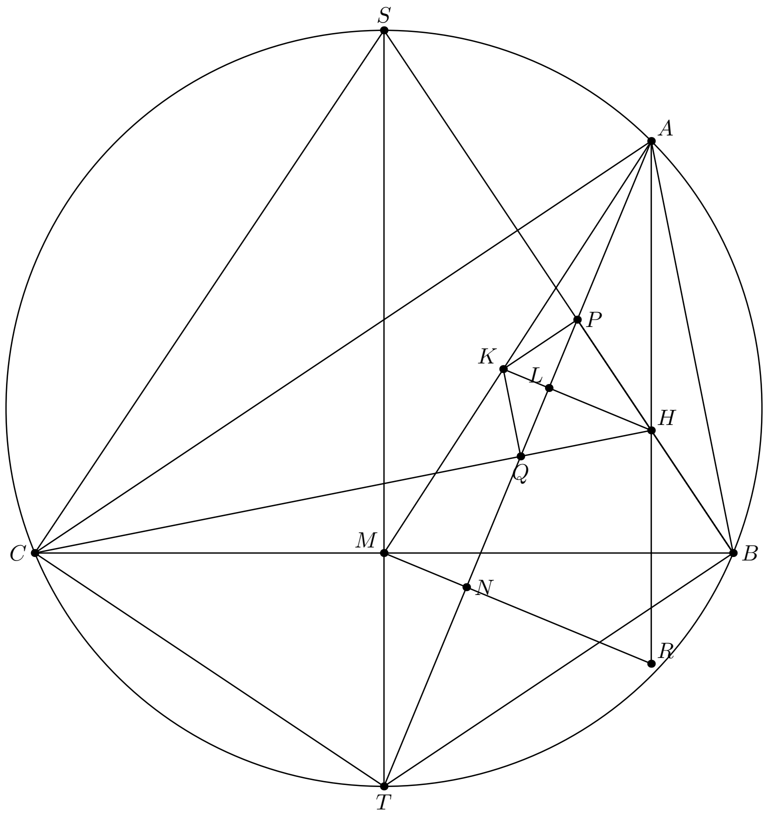

Рис. 12

Легко видеть, что $HPKQ$ и $SBTC$ — подобные дельтоиды, а L, M — точки пересечения их диагоналей. Поэтому $HL : LK = SM : MT$. Так как $AS \parallel MN$, получаем.

что $SM : MT = AN : NT$. Наконец, из параллельности прямых AHR и SMT следует, что $AN : NT = RN : NM$. Тогда, поскольку прямые HLK и RNM параллельны и $HL : LK = RN : NM$, то A, K, M лежат на одной прямой.

13. (А.Уткин, 9–11) В треугольнике ABC I — центр вписанной окружности, вневписанная окружность с центром I_A касается стороны BC в точке A'. Через I проведена прямая $l \perp BI$. Оказалось, что l пересекает I_AA' в точке K, лежащей на средней линии, параллельной BC. Докажите, что $\angle B \leq 60^\circ$.

    Решение. Пусть AH_A — высота треугольника, M — ее середина, а N — точка пересечения AH_A с BI. Тогда точки A', I, M — проекции K на прямые BC, BI, AH_A соответственно — лежат на одной прямой, следовательно, четырехугольник $BKNH_A$ вписанный и $\angle BKH_A = \angle BNH_A = 90^\circ - \angle B/2$.

    Так как середина M_C стороны AB равноудалена от B и H_A, а $M_CK \parallel BH_A$, то $\angle BKH_A < \angle BM_CH_A = 180^\circ - 2\angle B$, откуда и следует искомое неравенство.

14. (Ф.Ивлев, 9–11) Докажите, что в неравнобедренном треугольнике одна из окружностей, касающихся вписанной и описанной окружностей внутренним, а одной из вневписанных внешним образом, проходит через вершину треугольника.

    Решение. Пусть ω и ω_A — вписанная и вневписанная, противоположная вершине A окружности. Обозначим через t их общую внутреннюю касательную, отличную от прямой BC.

    Рассмотрим инверсию с центром A, меняющую местами ω и ω_A. Она переводит прямую t в окружность s, проходящую через A, касающуюся ω внутренним образом, а ω_A внешним и касающуюся в A прямой, параллельной t.

    Поскольку прямые BC и t симметричны относительно внутренней биссектрисы угла A, касательные в точке A к s и описанной около треугольника ABC окружности совпадают. Следовательно, s — окружность из условия задачи.

15. (А.Акопян, 9–11) Окружность, проходящая через вершины B и D четырехугольника $ABCD$, пересекает его стороны AB, BC, CD и DA в точках K, L, M и N соответственно. Окружность, проходящая через точки K и M, пересекает прямую AC в точках P и Q. Докажите, что точки L, N, P и Q лежат на одной окружности.

    Решение. Применив к шестиугольнику $BKMDNL$ теорему Паскаля, получаем, что прямые KM и LN пересекаются в точке X, лежащей на прямой AC (рис.15). Тогда $KX \cdot XM = LX \cdot XN = PX \cdot XQ$, ч.т.д.

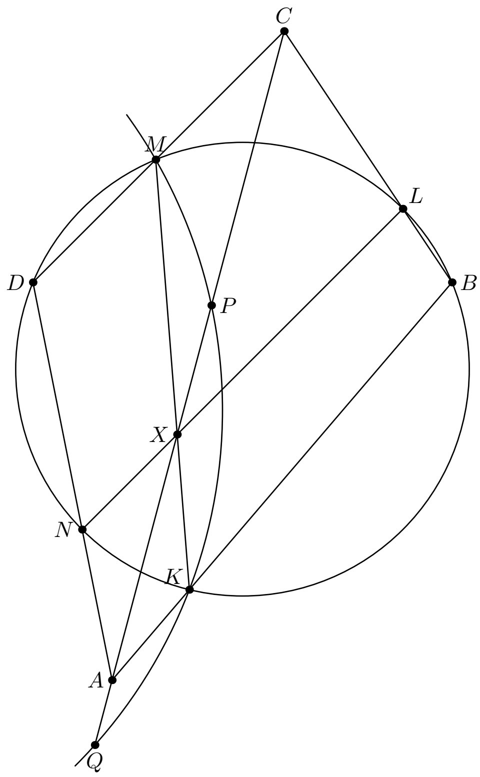

Рис. 15

16. (П.Рябов, 9–11) В треугольнике ABC чевианы AP и AQ симметричны относительно биссектрисы. Точки X, Y — проекции B на AP и AQ соответственно, а точки N и M — проекции C на AP и AQ соответственно. Докажите, что XM и NY пересекаются на BC.

    Решение. Заметим, что точки M, N, X и Y лежат на одной окружности Ω. Действительно, из подобия треугольников ABX и ACM следует, что $AX : AM = AB : AC$. Аналогично, $AN : AY = AC : AB$. Значит, $AX \cdot AN = AY \cdot AM$. При этом, поскольку серединные перпендикуляры к XN и YM проходят через середину T стороны BC, то T — центр Ω.

    Пусть AH — высота треугольника, а Z — точка пересечения прямых MN и XY. Тогда Z лежит на AH, потому что AH, MN и XY — радикальные оси окружностей Ω, $ABXY$ и $ACMN$ (рис.16).

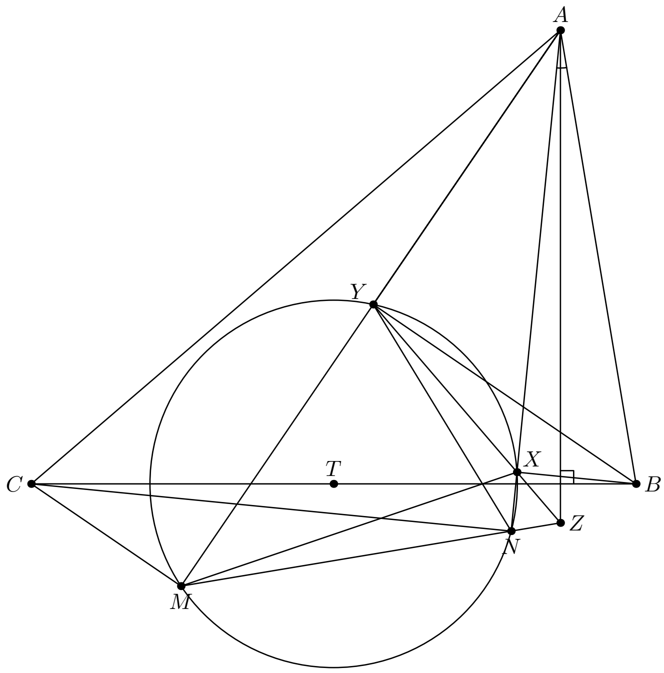

Рис. 16

Наконец, пусть MX и NY пересекаются в точке W. Тогда W — полюс прямой AZ относительно окружности $XMYN$, следовательно, $AZ \perp TW$, т.е. W лежит на BC.

Примечание. Когда задания олимпиады были опубликованы, выяснилось, что задача была независимо предложена на Балканской олимпиаде.

17. (А.Казаков, 10–11) Хорды A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются в точке D. Прямая A_1B_1 пересекает серединный перпендикуляр к отрезку DD', где точка D' инверсна к D, в точке C. Докажите, что $CD \parallel A_2B_2$.

    Решение. Так как C лежит на радикальной оси данной окружности и точки D, $CD^2 = CB_1 \cdot CA_1$, следовательно, $\angle CDB_1 = \angle DA_1C = \angle A_2B_2D$.

18. (Д.Швецов, Ю.Зайцева, 10–11) Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку BB_1 пересекает прямые AA_1, CC_1 в точках A_0, C_0. Докажите, что описанные окружности треугольников A_0IC_0 и ABC касаются.

    Первое решение. Серединный перпендикуляр к BB_1 и биссектриса угла A пересекаются на описанной окружности треугольника ABB_1, следовательно, $\angle IBA_0 = \angle IAB$. Аналогично $\angle IBC_0 = \angle ICB$. Тогда $\angle A_0BC_0 = \angle A_1IC$, т.е. точки I, A_0, C_0, B лежат на одной окружности (рис.18). Касательная к этой окружности в точке B образует с прямой BB_1 угол, равный $\angle BC_0A_0 + \angle A_0BI = \angle IAC + \angle AIB_1 = \angle BB_1C$. Такой же угол образует BB_1 с касательной к окружности ABC. Значит, обе окружности касаются в точке B.

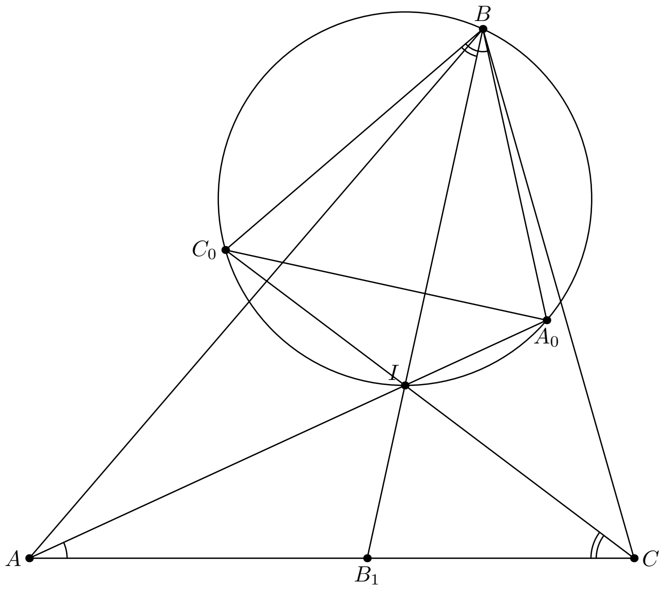

Рис. 18

Второе решение. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 повторно пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A', B', C' соответственно. Обозначим через M и N середины отрезков BB_1 и BI соответственно. Заметим, что по теореме о трезубце $A'C'$ — серединный перпендикуляр к отрезку BI.

Для решения задачи достаточно доказать подобие четырехугольников A_0IC_0B и $A'BC'B'$. Действительно, так как четырехугольник $A'BC'B'$ вписанный, окружность A_0IC_0 проходит через B. Также из параллельности прямых A_0C_0 и $A'C'$ получаем, что окружности A_0IC_0 и $A'IC'$ касаются в точке I. Симметрия относительно $A'C'$ сохраняет первую окружность, проходящую через B и I, а вторую переводит в описанную около треугольника ABC. Следовательно, окружности A_0IC_0 и ABC касаются в точке B.

Чтобы доказать подобие, заметим, что треугольники A_0IC_0 и $A'BC'$ подобны, а отрезки IM и BN являются их соответственными высотами. По.тому достаточно доказать равенство $BM : BI = B'N : B'B$ или $BB_1 : BI = (B'I + B'B) : B'B$. Вычитая из обеих частей по единице, получаем $IB_1 : BI = B'I : B'B$. Но $IB_1 : BI = AB_1 : AB = B'C : B'B = B'I : B'B$, ч.т.д.

19. (А.Заславский, 10–11) В четырехугольнике $ABCD$ $AB \perp CD$ и $AD \perp BC$. Докажите, что существует точка, расстояния от которой до прямых, содержащих стороны четырехугольника пропорциональны этим сторонам.

Решение. Из условия следует, что высоты AA' и CC' треугольника ABC пересекаются в точке D. Отразим медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B, относительно его биссектрисы из той же вершины и найдем точку пересечения L полученной прямой с $A'C'$. Так как точки A, C, A', C' лежат на окружности с диаметром AC, $\angle LA'C = \angle DAC = \pi/2 - \angle BCA$. Поэтому отношение расстояний от L до AB и CD равно $\sin\angle LA'B/\sin\angle LA'C = \operatorname{tg}\angle BCA$. Но $AB = 2R\sin\angle BCA$, $CD = 2R\cos\angle BCA$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Следовательно, расстояния от L до сторон AB и CD пропорциональны этим сторонам. Аналогично получаем искомую пропорциональность для сторон AD и BC.

Кроме того, так как L лежит на прямой, симметричной медиане треугольника относительно его биссектрисы, расстояния от L до AB и BC также пропорциональны этим сторонам, т.е. L — искомая точка.

20. (М.Дидин, 10–11) К вписанной окружности треугольника ABC проведена касательная, параллельная BC. Она пересекает внешнюю биссектрису угла A в точке X. Точка Y — середина дуги BAC описанной окружности. Докажите, что угол XIY прямой.

    Первое решение. Обозначим точку касания вписанной окружности с прямой, параллельной BC через D, а со сторонами BC, CA, AB через A', B', C' соответственно. Пусть M — середина BC. Будем считать, что $AB > AC$, и обозначим через Z и T проекции Y на AB и IA' соответственно. Тогда треугольники AYZ и IAB' подобны, потому что $\angle AYZ = \angle IAB' = \angle A/2$ и $\angle AZY = \angle IB'A = 90°$. Значит, $AY : AZ = IA : IB'$. С другой стороны, по лемме Архимеда Z делит пополам ломаную ABC, т.е. $AZ = (c-b)/2 = A'M = YT$. Кроме того, $IB' = ID$. Следовательно, $AY : YT = AI : ID$ (рис.20).

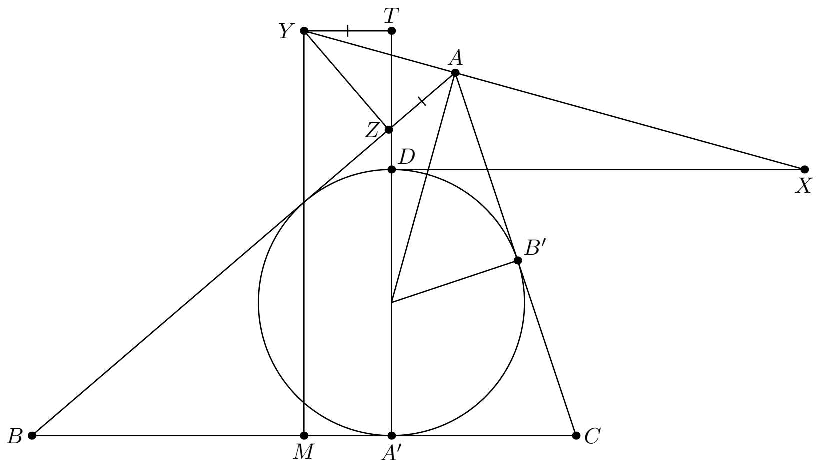

Рис. 20

Поскольку $AY \perp AI$ и $YT \perp ID$, существует поворотная гомотетия с центром A и углом 90°, переводящая Y в I, а T в D, тогда прямая AI перейдет в AX, а TI в DX. Поэтому I перейдет в X, а прямая YI в IX, ч.т.д.

Второе решение. Поскольку полюсом прямой DX относительно вписанной окружности является точка D, а прямой AX — середина A_0 отрезка $B'C'$, надо доказать, что $DA_0 \parallel IY$. Заметим, что треугольник $A'B'C'$ гомотетичен треугольнику $I_aI_bI_c$, образованному центрами вневписанной окружности, причем точке Y при этой гомотетии соответствует A_0, а точке I ортоцентр треугольника $A'B'C'$. Но точка D, диаметрально противоположная A', симметрична ортоцентру относительно A_0, ч.т.д.

21. (А.Заславский, 10–11) Диагонали вписанно-описанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке L. Даны три отрезка, равные AL, BL, CL. Восстановите четырехугольник с помощью циркуля и линейки.

    Решение. Так как $ABCD$ — вписанный, то $AL \cdot LC = BL \cdot LD$, т.е. мы знаем длину отрезка DL. Пусть $|AL| = a$, $|BL| = b$, $|CL| = c$, $|DL| = d$.

Пусть окружность, вписанная в $ABCD$, касается сторон AB, BC, CD, DA в точках P, Q, R, S соответственно. Известно, что в описанном четырехугольнике прямые PR и QS проходят через L. Кроме того, поскольку $ABCD$ — вписанный, PR и QS являются биссектрисами углов между AC и BD.

Пусть $AS = AP = a'$, $BP = BQ = b'$, $CQ = CR = c'$, $DR = DS = d'$. По теореме о биссектрисе $AL : LB = AP : PB$, т.е. $a' : a = b' : b$. Аналогично получаем, что $a' : a = b' : b = c' : c = d' : d$. Обозначим это отношение через x. Then $AB = (a+b)x$ и аналогичные выражения получаем для BC, CD и DA.

По теореме Птолемея $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$, откуда находим

$$x = \sqrt{(a+c)(b+d)/((a+b)(c+d)+(b+c)(d+a))}.$$

Используя это значение x, мы можем построить циркулем и линейкой отрезки AB, BC, CD, DA, а значит и четырехугольник $ABCD$.

Примечание. Можно также выразив длины отрезков LP, LQ, LR, LS через a, b, c, d и угол $\varphi = \angle ALB$, найти $\cos\varphi$ из равенства $PL \cdot LR = QL \cdot LS$.

22. (A.Khurmi, K.V.Sudharshan, Индия, 10–11) Дан вписанный в окружность Ω четырехугольник $ABCD$. На диагонали AC берутся пары точек P, Q таких, что лучи BP и BQ симметричны относительно биссектрисы угла B. Найдите геометрическое место центров окружностей PDQ.

    Решение. Пусть прямые BP и BQ повторно пересекают окружность $ABCD$ в точках R и S соответственно. Так как $\angle ABP = \angle CBQ$, дуги AR и CS равны, т.е. $AC \parallel RS$. Поэтому гомотетия с центром B переводит треугольник BPQ в BRS, а окружности BPQ и $BRS = ABCD$ касаются в точке B. Пусть их общая касательная пересекает AC в точке X, а прямая DX повторно пересекает окружность $ABCD$ в точке E. Заметим, что X и E не зависят от P и Q.

    Поскольку BX — радикальная ось окружностей $ABCD$ и BPQ, а AC — радикальная ось окружностей BPQ и DPQ, то прямая DEX — радикальная ось окружностей $ABCD$ и DPQ. Следовательно, E лежит на окружности DPQ при любых положениях точек P, Q (рис.22). Таким образом искомое ГМТ состоит из точек O серединного перпендикуляра к DE, для которых окружность с центром O, проходящая через D и E, пересекает прямую AC. Точки, не удовлетворяющие этому условию, образуют некоторый интервал.

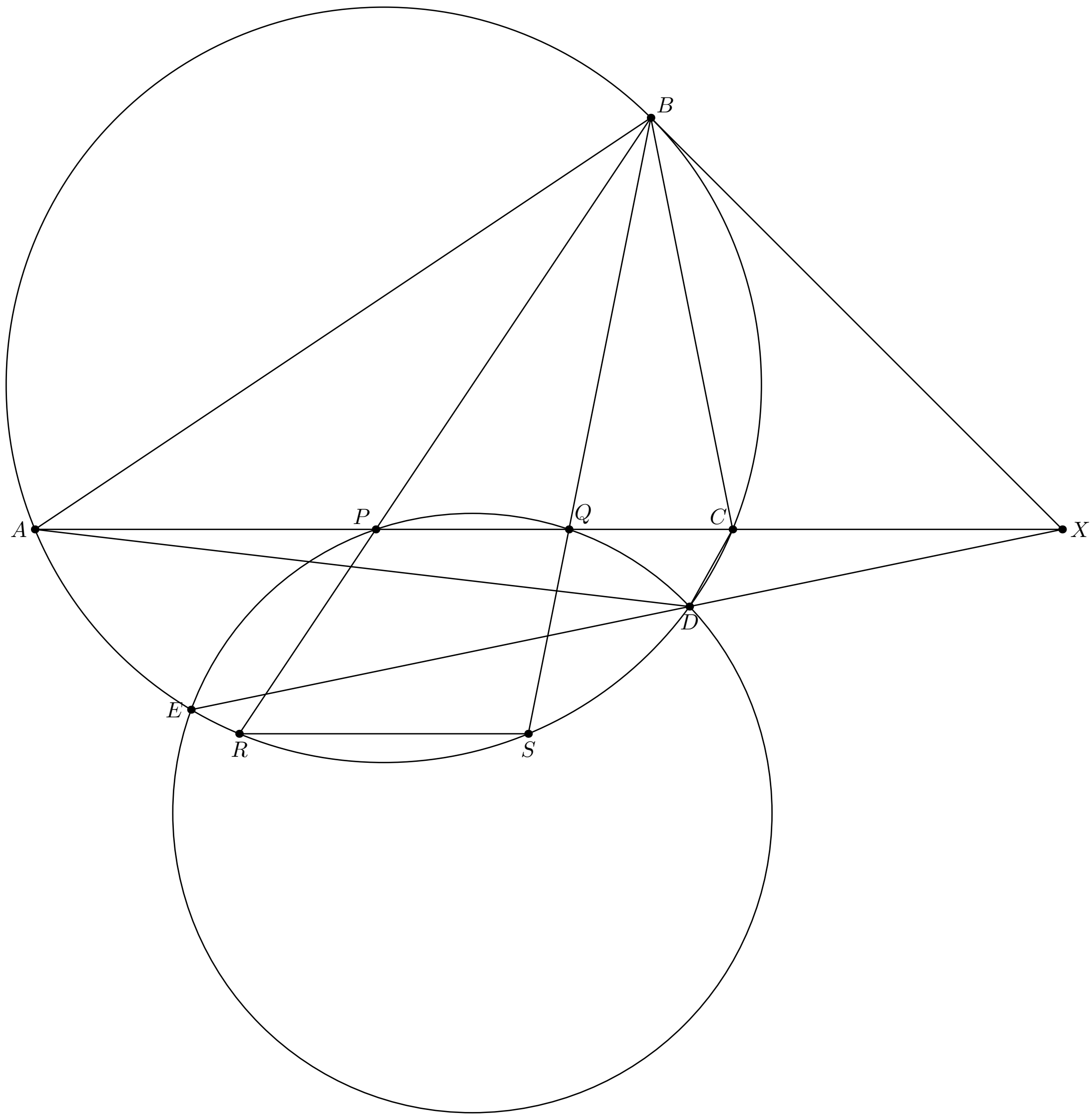

Рис. 22

23. (Н.Белухов, Болгария, 10–11) Назовем *почти выпуклым* несамопересекающийся многоугольник, у которого ровно один внутренний угол больше 180°.

На плоскости даны 1000000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Может ли оказаться, что существует ровно десять различных почти выпуклых 1000000-угольников с вершинами в этих точках?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть P_1, P_2, ..., P_n — данные точки ($n = 1000000$), а $H = H_1H_2 \ldots H_k$ — их выпуклая оболочка. Будем называть точки H_1, H_2, ..., H_k *внешними*, а остальные $n - k$ точек *внутренними*.

Пусть Q_1, Q_2, ..., Q_n такая перестановка точек P_1, P_2, ..., P_n, что $Q = Q_1Q_2 \ldots Q_n$ — почти выпуклый многоугольник. Из сторон многоугольника H ровно одна, назовем ее s,не является стороной Q.

Пусть R — вершина Q, для которой внутренний угол Q больше 180°. Тогда R —

внутренняя точка, а все остальные внутренние точки лежат внутри треугольника, с вершиной R и противоположной стороной s.

Если внутренняя точка единственна, она должна совпадать с R. Тогда любую сторону H в качестве s и мы получим $n-1>10$ способов построить многоугольник Q — противоречие.

Если есть ровно две внутренних точки — R_1 и R_2, то в качестве R можно взять любую из них. Пусть, например, $R \equiv R_1$. Тогда s — та сторона H, которую пересекает луч R_1R_2. Если это сторона H_uH_{u+1}, то Q совпадает с одним из двух многоугольников $H_1H_2\dots H_uR_1R_2H_{u+1}\dots H_k$ или $H_1H_2\dots H_uR_2R_1H_{u+1}\dots H_k$. Таким образом, в этом случае для Q есть лишь четыре варианта.

Наконец, рассмотрим случай, когда внутренних точек хотя бы три. Пусть $G = G_1G_2\dots G_m$ — их выпуклая оболочка.

Назовем вершину G_i многоугольника G *перспективной*, если лучи G_iG_{i-1} и G_iG_{i+1} пересекают одну и ту же сторону H. (Считаем, что $G_0 \equiv G_m$ и $G_{m+1} \equiv G_1$.) Любая вершина G_i, которую можно выбрать в качестве R, должна быть перспективной. Однако, не каждая перспективная G_i может быть взята как R.

Покажем, что у G не больше трех перспективных вершин. Действительно, предположим, что таких вершин не меньше четырех. Обозначим какие-то четыре из них через A, B, C, D так, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник с $\angle A + \angle B \geq 180°$. Тогда луч BC лежит внутри угла, образованного лучами AB и AD. Так как A — перспективная, все три луча пересекают одну и ту же сторону H.

Но B тоже перспективная, поэтому лучи BA и BC также пересекают одну сторону H. Поскольку лучи AB и BA не могут пересекать одну сторону H, получено противоречие.

Пусть теперь G_l — перспективная вершина G, а лучи G_lG_{l-1} и G_lG_{l+1} пересекают сторону H_uH_{u+1} многоугольника H.

Рассмотрим луч r с вершиной G_l. Будем вращать r вокруг G_l внутри угла $G_{l-1}G_lG_{l+1}$ от луча G_lG_{l-1} до G_lG_{l+1}. Пусть $J_1 \equiv G_{l-1}$, J_2, $\dots$, $J_{n-k-1} \equiv G_{l+1}$ — отличные от G_l внутренние точки, через которые проходит r при этом вращении. Обозначим также $J_0 \equiv H_u$ и $J_{n-k} \equiv H_{u+1}$. Тогда, для некоторого $0 \leq v \leq n-k-1$ получаем, что

$$Q \equiv H_1H_2\dots H_{u-1}J_0J_1\dots J_vG_lJ_{v+1}J_{v+2}\dots J_{n-k}H_{u+2}H_{u+3}\dots H_k.$$

Рассмотрим несамопересекающийся многоугольник

$$Q' = H_1H_2\dots H_{u-1}J_0J_1\dots J_{n-k}H_{u+2}H_{u+3}\dots H_k.$$

Так как Q' невыпуклый, у него есть угол, больший $180°$. Поскольку его внутренние углы в вершинах H_1, H_2, $\dots$, $H_u \equiv J_0$, $H_{u+1} \equiv J_{n-k}$, $\dots$, H_k меньше $180°$, то для некоторого $1 \leq w \leq n-k-1$ угол Q' в вершине J_w больше $180°$. Тогда $v = w-1$ или $v = w$. (Иначе у Q будет два угла, больших $180°$, в вершинах G_l и J_w.) Значит для каждой перспективной вершины G_l многоугольника G есть не больше двух вариантов Q, а общее количество почти выпуклых многоугольников не превосходит $3 \cdot 2 = 6 < 10$.

24. (И.Богданов, 11) Пусть I — центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, а J – центр сферы, касающейся грани BCD и плоскостей остальных граней (вне самих граней). Отрезок IJ пересекает сферу, описанную около тетраэдра, в точке K. Что больше: IK или JK?

Ответ. IK.

Решение. Рассмотрим плоскость, проходящую через прямую AIJ и перпендикулярную плоскости BCD. Она пересекает обе сферы по большим окружностям. Пусть касательные из A к этим окружностям пересекают плоскость BCD в точках X и Y. Тогда I и J — центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника AXY, значит, середина отрезка IJ лежит на дуге XY описанной около этого треугольника окружности. Но точки X, Y лежат внутри описанной около тетраэдра сферы, следовательно, дуга XY также лежит внутри нее и $IK > IJ/2 > JK$.