

XVII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Решения. Финал. Первый день. 8 класс

1. (Б.Френкин) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC совпадают соответственно с центрами вписанной и описанной окружностей треугольника ADC . Известно, что $AB = 1$. Найдите длины остальных сторон и углы четырехугольника.

Ответ. $BC = CD = DA = 1$, $\angle A = \angle C = 72^\circ$, $\angle B = \angle D = 108^\circ$.

Решение. Так как центры вписанных окружностей треугольников ABC и ADC лежат на серединном перпендикуляре к AC , эти треугольники равнобедренные. Кроме того, поскольку центры описанных окружностей лежат вне этих треугольников, углы B и D тупые. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . Тогда $\angle AOC = 360^\circ - 2\angle B$. С другой стороны, так как O — центр вписанной окружности треугольника ADC , то $\angle AOC = 90^\circ + \angle D/2$. Аналогично получаем, что $360^\circ - 2\angle D = 90^\circ + \angle B/2$, откуда $\angle B = \angle D = 108^\circ$ и $ABCD$ — ромб (рис. 8.1).

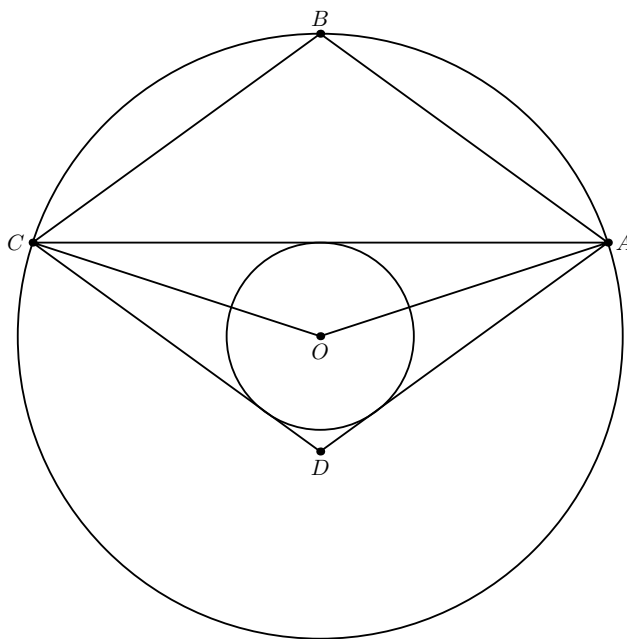


Рис. 8.1.

2. (П.Кожевников) Через вершины треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a , l_b , l_c . Пусть прямая a симметрична высоте AN_a относительно l_a . Аналогично определяем b , c . Докажите, что a , b , c пересекаются в одной точке.

Решение. Поскольку угол между прямыми a и b равен углу между высотами треугольника, точка пересечения этих прямых лежит на окружности, симметричной относительно AB окружности ABH (H — ортоцентр), т.е. на описанной окружности треугольника ABC . Прямая c пересекает описанную окружность в той же точке (рис. 8.2).

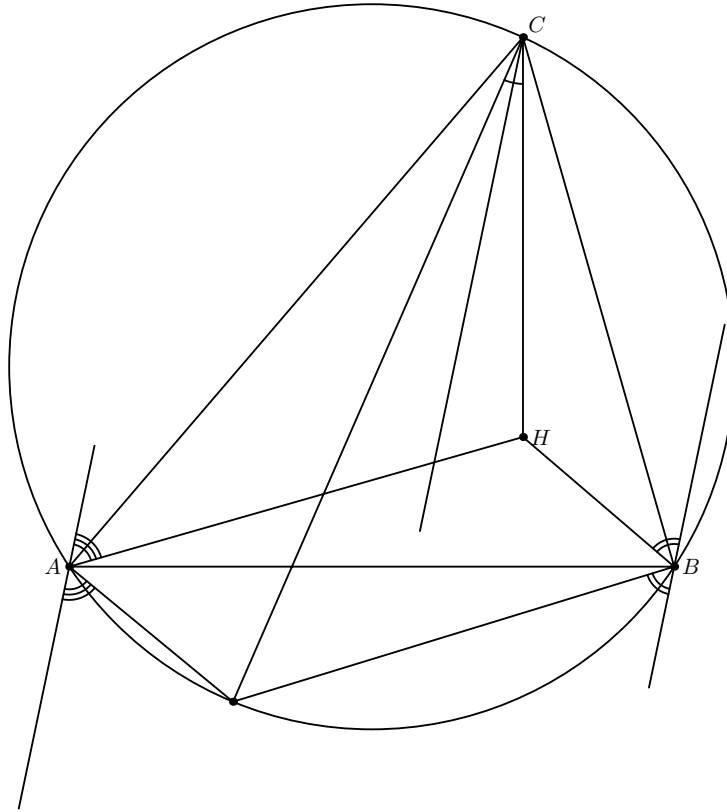


Рис. 8.2.

3. (А.Заславский) Участники тараканьих бегов бегут по окружности в одном направлении, стартовав одновременно из точки S . Таракан A бежит вдвое медленнее, чем B , и втрое медленнее, чем C . Точки X, Y на отрезке SC таковы, что $SX = XY = YC$. Прямые AX и BY пересекаются в точке Z . Найдите ГМТ пересечения медиан треугольника ZAB .

Ответ. Центр O окружности, по которой бегут тараканы..

Решение. Пусть U, V — такие точки на прямой AB , что $UA = AB = BV$. Тогда прямые US и CV проходят через Z , а параллельные им прямые, проходящие через A и B соответственно, пересекаются в центре тяжести M треугольника ABZ . Поскольку $UA = AS, VB = BC$, получаем, что $\angle AUS = \angle ASU = \angle MAB = \angle MBA$ и $\angle AMB = \angle UAS = \angle ASC = 2\angle ASB = \angle AOB$. Следовательно, M совпадает с O (рис. 8.3).

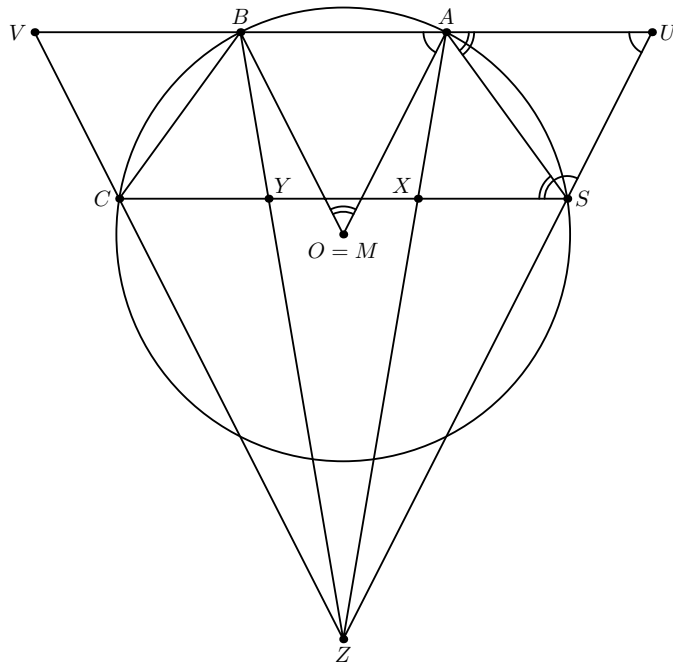


Рис. 8.3.

Примечание. Приведенное решение не меняется в случае пересекающихся отрезков AX и BV .

4. (И.Кухарчук) В остроугольном треугольнике ABC высоты AH и CH пересекают стороны BC и AB в точках A_1 и C_1 . Точки A_2 и C_2 симметричны относительно AC точкам A_1 и C_1 . Докажите, что расстояние между центрами описанных окружностей треугольников C_2HA_1 и C_1HA_2 равно AC .

Решение. Пусть M — середина AC , B_1 — основание высоты из B . Тогда $MA_1 = MC_1 = MA_2 = MC_2 = MA$, а прямые A_1C_2 и A_2C_1 пересекаются в точке B_1 . Следовательно, серединный перпендикуляр к отрезку A_2C_1 совпадает с перпендикуляром из M на B_1C_1 , который параллелен радиусу OA описанной около треугольника ABC окружности. Поэтому он пересекает перпендикуляр к AC в точке A в такой точке P , что $AP = OM = BH/2$. Через эту же точку проходит и серединный перпендикуляр к отрезку C_1H , значит, P — центр описанной окружности треугольника C_1HA_2 (рис. 8.4). Аналогично, центром описанной окружности треугольника A_2HC_1 будет точка Q , лежащая на перпендикуляре к AC из C , такая, что $CQ = OM$. Поскольку $APQC$ — прямоугольник, $PQ = AC$.

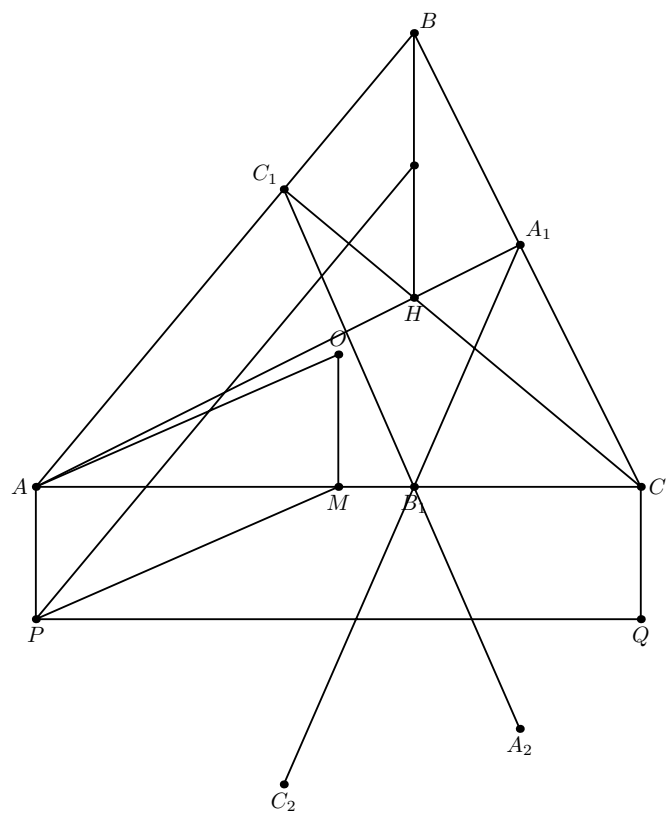


Рис. 8.4.

XVII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Решения. Финал. Второй день. 8 класс

5. (М.Saghafian) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4 — две четверки точек, не лежащих на одной окружности. Известно, что для любых i, j, k радиусы описанных окружностей треугольников $A_i A_j A_k$ и $B_i B_j B_k$ равны. Обязательно ли $A_i A_j = B_i B_j$ для любых i, j ?

Ответ. Нет.

Первое решение. Пусть $A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3$ — два неравных треугольника, вписанных в окружности с равными радиусами R , а A_4, B_4 — их ортоцентры. Тогда у всех треугольников $A_i A_j A_k$ и $B_i B_j B_k$ радиусы описанных окружностей равны R , но не все равенства $A_i A_j = B_i B_j$ имеют место.

Второе решение. Пусть $A_1 B_1 A_2 B_2$ — прямоугольник, точки A_3, A_4 лежат на прямой, параллельной $A_1 B_2$, и симметричны относительно центра прямоугольника, B_3 совпадает с A_4, B_4 — с A_3 и $A_3 A_4 \neq A_1 A_2$. Тогда точки A_1, A_2, A_3, A_4 (B_1, B_2, B_3, B_4) не лежат на одной окружности, для любых i, j, k треугольники $A_i A_j A_k$ и $B_i B_j B_k$ равны, но $A_1 A_3 \neq B_1 B_3$.

6. (М.Дидин) Дан остроугольный треугольник ABC . Точка P выбрана так, что $AP = AB$ и $PB \parallel AC$. Точка Q выбрана так, что $AQ = AC$ и $CQ \parallel AB$. Отрезки CP и BQ пересекаются в точке X . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на окружности (PXQ) .

Решение. Пусть D — вершина параллелограмма $ABDC$. Тогда $APDC$ и $AQDB$ — равнобедренные трапеции. Следовательно, серединные перпендикуляры к отрезкам PD и QD совпадают с серединными перпендикулярами к AC и AB соответственно, т.е. центр O описанной окружности треугольника ABC является также центром окружности DPQ и $\angle POQ = 2\angle A$. Кроме того, из равенств $\angle XPD = \angle ADP, \angle XQD = \angle ADQ$ получаем, что $\angle PXQ = 2\angle A$ (рис.8.6). Таким образом, O, P, Q, X лежат на одной окружности.

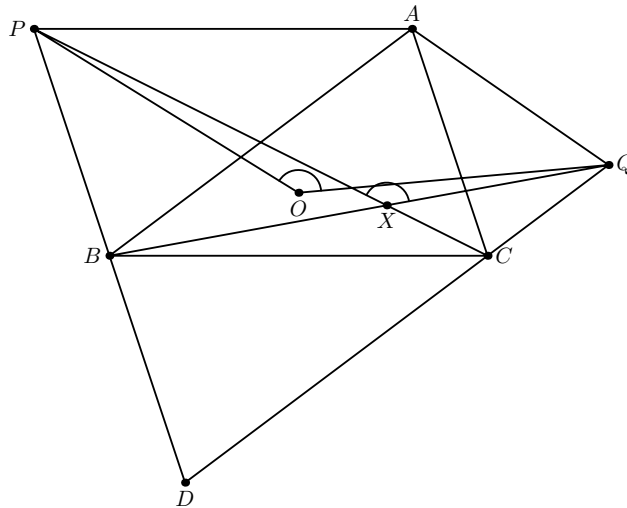


Рис. 8.6.

7. (И.Кухарчук) В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ равны углы CAB , BCA , ECD , DEC и AEC . Докажите, что середина BD лежит на CE .

Решение. Из условия следует, что $CD \parallel AE$. Пусть прямая, проходящая через B и параллельная AE , пересекает AC и CE в точках P и Q соответственно. Тогда точки P и Q делят в одинаковом отношении основания CA и CE подобных равнобедренных треугольников ABC и CDE . Поэтому $\angle CBQ = \angle CDQ$, $BCDQ$ — параллелограмм и середины отрезков BD и CQ совпадают (рис. 8.7).

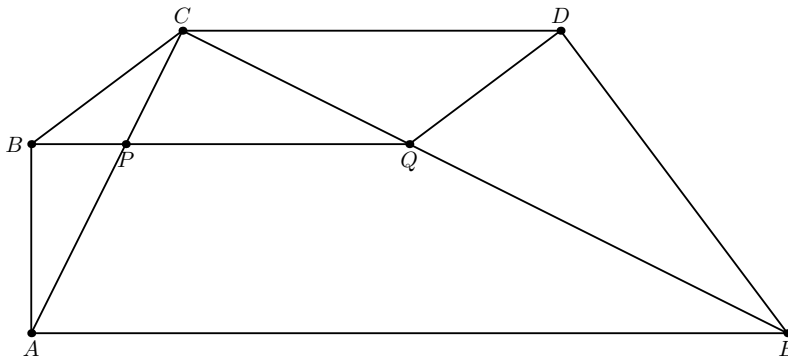


Рис. 8.7.

8. (С.Берлов) Существует ли выпуклый многоугольник, у которого длины всех сторон равны, а любые три вершины образуют тупоугольный треугольник?

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное. Пусть длины сторон многоугольника равны 1. Будем считать, что сторона AB горизонтальна, а многоугольник лежит над ней. Рассмотрим полосу, ограниченную перпендикулярами к отрезку AB в его концах. Так как углы в вершинах A и B тупые, вершины, соседние с A и B , лежат по разные стороны от этой полосы. Поэтому найдется вершина C , лежащая внутри полосы. В треугольнике ABC тупым может быть только угол C , значит, расстояние от C до прямой AB меньше $1/2$. Из двух вершин, соседних из C , хотя бы одна лежит ниже C , пусть это правая вершина. Рассмотрим самую правую вершину D многоугольника. Обе соседних с ней вершины лежат между прямой AB и параллельной ей прямой, проходящей через C (рис. 8.8). Так как расстояние между этими прямыми меньше $1/2$, каждая из соответствующих сторон образует с вертикалью угол, больший 60° , следовательно, $\angle D < 60^\circ$ — противоречие.

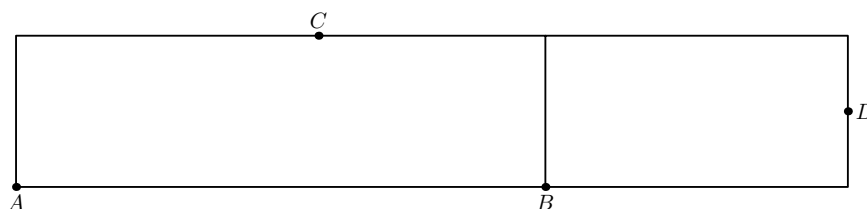


Рис. 8.8.

XVII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Решения. Финал. Первый день. 9 класс

1. (Ф.Ивлев, А.Марданов) Через точку внутри треугольника провели три чевианы. Оказалось, что длины шести отрезков, на которые они разбивают стороны треугольника, образуют в каком-то порядке геометрическую прогрессию. Докажите, что длины чевиан тоже образуют геометрическую прогрессию.

Решение. Будем считать, что длина наименьшего из шести отрезков равна 1. Тогда длины остальных равны q, q^2, q^3, q^4 и q^5 , где $q \geq 1$ — знаменатель прогрессии. По теореме Чевы произведение каких-то трех из этих отрезков равно произведению трех остальных, т.е. $\sqrt{q^{15}}$. Это возможно только при $q = 1$. Значит, данный треугольник равносторонний, а чевианы являются его медианами, т.е. их длины равны.

2. (М.Волчкевич) Дан вписанный в окружность пятиугольник. Докажите, что отношение его площади к сумме диагоналей не превосходит четверти радиуса окружности.

Решение. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ — пятиугольник, вписанный в окружность с центром O . Тогда для каждого $i = 1, \dots, 5$ $S_{OA_{i-1}A_iA_{i+1}} \leq OA_i \cdot A_{i-1}A_{i+1}/2$ (считаем, что $A_{i+5} = A_i$). Сумма площадей этих пяти четырехугольников не меньше удвоенной площади пятиугольника, откуда и следует искомое неравенство.

3. (М.Дидин, И.Фролов) Внутри остроугольного неравнобедренного треугольника ABC отмечена точка T , такая что $\angle ATB = \angle BTC = 120^\circ$. Окружность с центром E проходит через середины сторон треугольника ABC . Оказалось, что точки B, T, E лежат на одной прямой. Найдите угол ABC .

Ответ. 30°

Решение. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB соответственно, D — вершина правильного треугольника ACD , построенного во внешнюю сторону. Известно, что точка T лежит на отрезке BD . При гомотетии с центром B и коэффициентом $1/2$ прямая B_0D переходит в серединный перпендикуляр к отрезку A_0C_0 , следовательно, E — середина BD и $\angle C_0EA_0 = 60^\circ$ (рис.9.3). Соответственно $\angle ABC = \angle A_0B_0C_0 = 30^\circ$.

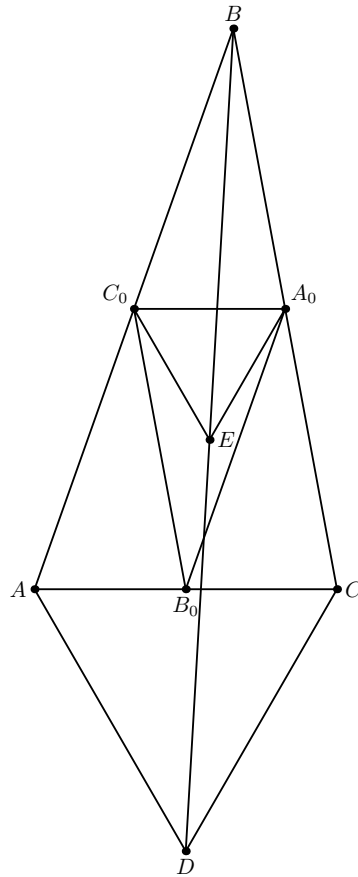


Рис. 9.3.

4. (M.Saghafian) Назовем расстоянием между треугольниками $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ наименьшее из расстояний A_iB_j . Можно ли так расположить на плоскости пять треугольников, чтобы расстояние между любыми двумя из них равнялось сумме радиусов их описанных окружностей?

Ответ. Нет.

Решение. Назовем *облаком* треугольника объединение трех кругов с центрами в его вершинах и радиусами, равными радиусу описанной окружности. Расстояние между двумя треугольниками равно сумме радиусов их описанных окружностей тогда и только тогда, когда соответствующие облака касаются. Но пять облаков не могут попарно касаться в силу непланарности графа K_5 .

XVII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Решения. Финал. Второй день. 9 класс

5. (П.Кожевников) Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . На стороне BC нашлись точки X и Y такие, что $AX = BX$ и $AY = CY$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника AXY , проходит через центры описанных окружностей треугольников AOB и AOC .

Решение. Из условия следует, что OX — серединный перпендикуляр к AB , т.е. центр O_1 описанной окружности треугольника AOB лежит на OX и $\angle AO_1X = \angle AO_1B/2 = \pi - 2\angle C = \angle AYC$ (рис.9.5). При других расположениях точек рассуждение аналогично.

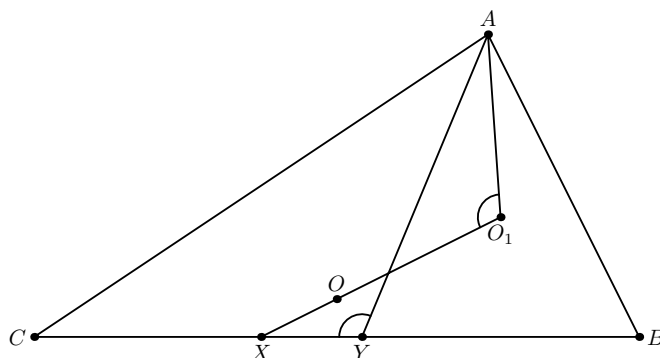


Рис. 9.5.

6. (П.Рябов) Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O . На отрезках BC и AD выбраны соответственно точки M и N . К окружности AMC проведена касательная из C до пересечения с лучом NB в точке P ; к окружности BND из D проведена касательная до пересечения с лучом MA в точке R . Докажите, что $\angle BOP = \angle AOR$.

Решение. Заметим, что $\angle NBD = \angle ADR$ и $\angle MAC = \angle BCP$ (рис.9.6). Следовательно, точки P и R изогонально сопряжены в подобных треугольниках BOC и AOD , откуда получаем искомое равенство.

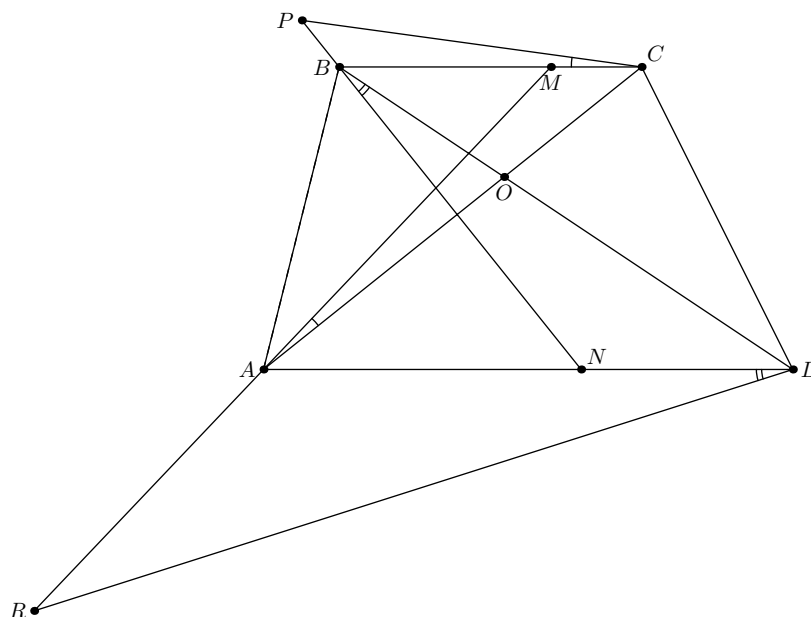


Рис. 9.6.

7. (М.Дидин, Ф.Ивлев, И.Фролов) На плоскости проведены три прямые, образующие остроугольный неравносторонний треугольник. Федя, у которого есть циркуль и линейка, хочет провести все высоты этого треугольника. Ваня с ластиком пытается ему помешать. За ход Федя проводит либо прямую через две отмеченные точки, либо окружность с центром в отмеченной точке, проходящую через другую отмеченную точку. После этого Федя отмечает любое количество точек (точки пересечения проведенных линий, случайные точки на проведенных линиях и случайные точки плоскости). Ваня за ход стирает не более трех отмеченных точек. (Федя не может использовать стертые точки в своих построениях, пока не отметит их снова). Ходят по очереди, начинает Федя. Изначально никакие точки плоскости не отмечены. Может ли Федя провести высоты?

Ответ. Да.

Решение. Заметим, что, если дана прямая на плоскости, то Федя может отметить достаточно много точек на ней, затем построить окружности с центрами в этих точках и отметить точки их пересечения и наконец, проведя прямые через точки пересечения пар окружностей, получить достаточно много прямых, перпендикулярных данной. Повторяя эти операции для перпендикулярной прямой, Федя получит много прямых, параллельных исходной прямой. Таким образом, Федя может построить много прямых, параллельных стороне AB данного треугольника ABC и отметить их точки пересечения A_i, B_i с BC, AC соответственно. Далее, строя окружности с центрами на AC , проходящие через точки A_i ,

и отмечая точки пересечения пар таких окружностей, Федя сможет построить точки, симметричные A_i относительно AC , и перпендикуляры из A_i на AC . Аналогично строятся перпендикуляры из точек B_i на BC . Точки пересечения этих перпендикуляров — ортоцентры треугольников CA_iB_i лежат на высоте из вершины C .

8. (А. Dadgarnia) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω с центром I . Прямые AC и BD пересекаются в точке P , AB и CD — в точке E , AD и BC — в точке F . Точка K на описанной окружности треугольника EIF такова, что $\angle IKP = 90^\circ$. Луч PK пересекает ω в точке Q . Докажите, что описанная окружность треугольника EQF касается ω .

Решение. Пусть W, X, Y, Z — точки касания сторон AB, BC, CD, DA с ω . Тогда P — точка пересечения диагоналей четырехугольника $WXYZ$. При инверсии относительно ω точки E, F переходят в середины M, N этих диагоналей, а окружность IEF в прямую Гаусса MN . Так как точка K лежит на окружности с диаметром IP , инверсная точка K' лежит на поляре точки P — прямой EF , которая является также радикальной осью ω и окружности с диаметром IP , на которой лежат точки M, N . Прямая PK при инверсии переходит в окружность с диаметром IK' , следовательно, $K'Q$ касается ω (рис.9.8), а значит, и окружности MNQ .

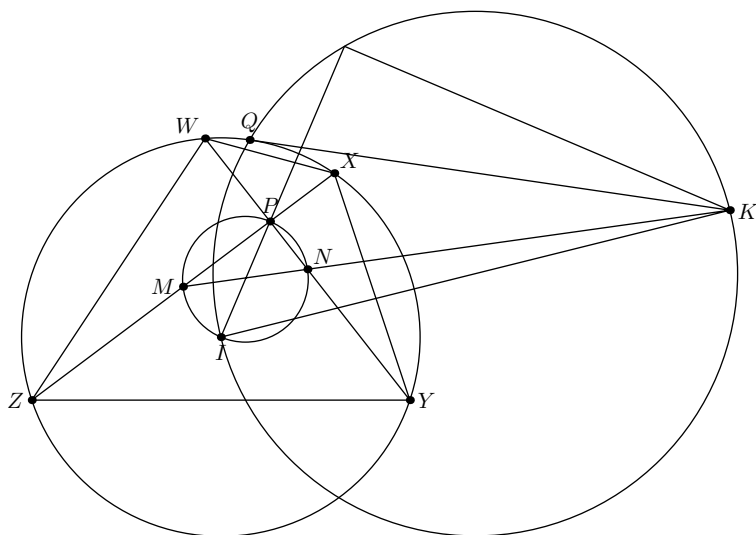


Рис. 9.8.

XVII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Решения. Финал. Первый день. 10–11 классы

1. (Д.Швецов) В треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$), CH — высота; HA_1, HB_1 — биссектрисы углов $\angle CHB, \angle AHC$ соответственно; E, F — середины отрезков HB_1 и HA_1 соответственно. Докажите, что прямые AE и BF пересекаются на биссектрисе угла ACB .

Первое решение. Пусть M — середина биссектрисы CL треугольника ABC . Тогда, в силу подобия треугольников ABC, ACH и CHB , $\angle BAF = \angle MAC$, $\angle ABE = \angle MBC$. Следовательно, точка пересечения прямых AE и BF изогонально сопряжена M , т.е. лежит на CL (рис. 10.1).

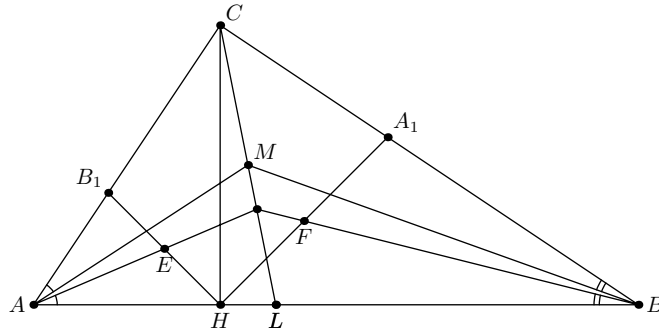


Рис. 10.1.

Второе решение. Так как AE — медиана треугольника AHB_1 , $\sin \angle B_1AE : \sin \angle HAE = AH : AB_1 = (AH + CH) : AC$ (второе равенство следует из свойства биссектрисы). Аналогично $\sin \angle A_2BF : \sin \angle HBF = (CH + HB) : BC$. В силу подобия треугольников AHC и CHB эти отношения равны, и по теореме Чевы прямые AE и BF пересекаются на биссектрисе.

2. (А.Заславский) В неравнобедренном треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Биссектриса угла C пересекает прямые A_0C_0 и B_0C_0 в точках B_1 и A_1 . Докажите, что прямые AB_1, BA_1 и A_0B_0 пересекаются в одной точке.

Решение. Точки A_1, B_1 являются проекциями A, B на биссектрису CL , т.е. AB_1BA_1 — трапеция. Поэтому точка T пересечения AB_1 с A_1B , L и середины отрезков AA_1, BB_1 лежат на одной прямой и образуют гармоническую четверку (рис. 10.2). Спроецировав эти точки на CL прямыми параллельными AB , и сделав гомотетию с центром L и коэффициентом

2, получим гармоническую четверку C, L, A_1, B_1 . Значит, T лежит на A_0B_0 .

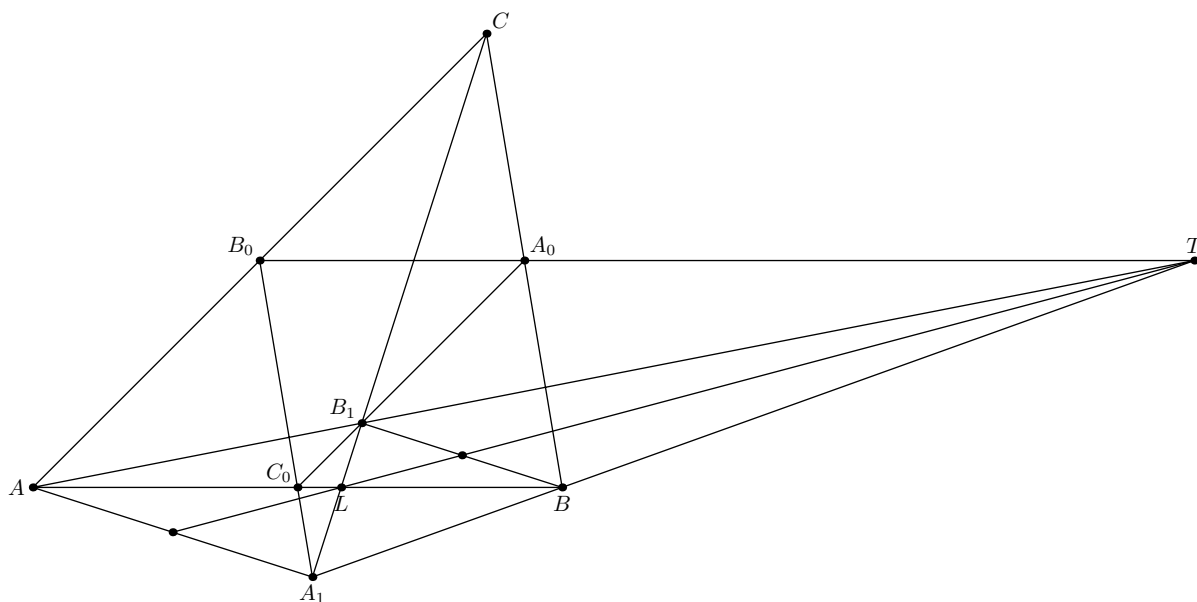


Рис. 10.2.

3. (К.Кноп, Г.Челноков) Биссектриса угла A треугольника ABC ($AB > AC$) пересекает описанную окружность в точке P . Перпендикуляр к AC в точке C пересекает биссектрису угла A в точке K . Окружность с центром в точке P и радиусом PK пересекает меньшую дугу PA описанной окружности в точке D . Докажите, что в четырехугольник $ABDC$ можно вписать окружность.

Решение. Дуга AB , не содержащая C , больше дуги AC , не содержащей B , поскольку $AB > AC$ по условию. Меньшая дуга BP равна меньшей дуге CP , поскольку AP – биссектриса. Следовательно, дуга ACP меньше 180° , и точка K принадлежит хорде EC , где E – точка, диаметрально противоположная точке A . Из этого следует также, что $PK < PC$ и, значит, точка D лежит на меньшей дуге PC .

Требуется доказать, что $AB + DC = AC + BD$.

Пусть окружность с центром в точке P и радиусом PD второй раз пересекает хорду DB в точке M . Опустим перпендикуляр PH из точки P на хорду BD . По лемме Архимеда точка H разбивает длину ломаной BDC на две равные части, то есть $BH = HD + DC$, но поскольку, очевидно, $MH = HD$, то $BM = DC$.

Рассмотрим точку N , симметричную точке C относительно биссектрисы AP . Тогда, во-первых, $AC = AN$, а, во-вторых, $PC = PN$, то есть точки

C, N, B лежат на одной окружности с центром в P . Осталось доказать, что $BN = DM$.

Опустим перпендикуляр PL на хорду EC и перпендикуляр PR на хорду BA . Тогда $BN = 2BR = 2PL = 2DH = DM$ (рис.10.3).

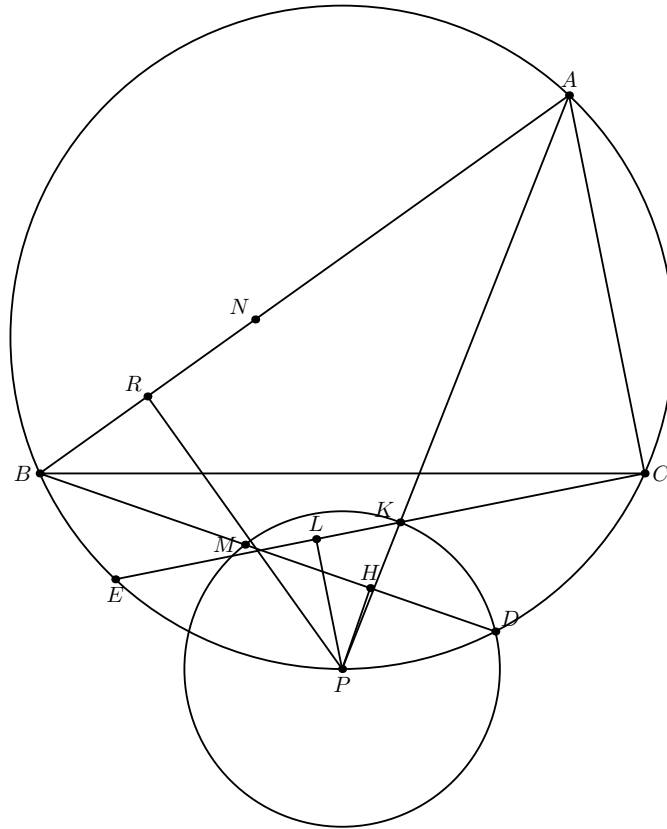


Рис. 10.3.

Второе равенство верно, поскольку треугольник PRB равен треугольнику CLP по гипотенузе и острому углу ($\angle BPR = 90^\circ - \angle PBA = \angle PCE = \angle PCL$). Третье равенство верно, поскольку треугольник PLK равен треугольнику DHP по гипотенузе и острому углу ($\angle LPK = \angle PAC = \angle PAB = \angle PDH$).

4. (Т.Корчемкина) Может ли треугольник быть разверткой четырехугольной пирамиды?

Ответ. Да.

Решение. Возьмем треугольник SAB с $SA = SB > AB$. Пусть S' — середина AB , A', B' — точки на отрезках SA, SB такие, что $SA' = SB' = S'A, C, D$ — середины BB', AA' соответственно. Тогда треугольник можно согнуть по отрезкам $A'B'$ и CD так, что точка S совместится с S' .

Теперь треугольники SAD , $SA'D$, SBC и $SB'C$ равны, поэтому можно, согнув по SC и SD , совместить A с A' и B с B' . В результате получим пирамиду $SABCD$ (рис.10.4).

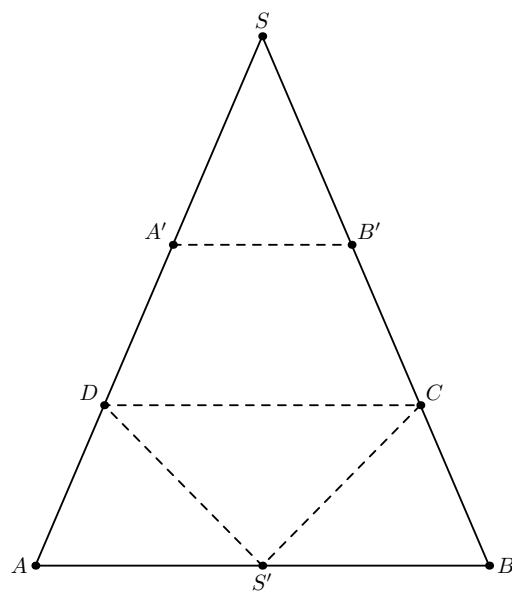


Рис. 10.4.

XVII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Решения. Финал. Второй день. 10–11 классы

5. (П.Кожевников) Секущая пересекает первую окружность в точках A_1, B_1 , а вторую — в точках A_2, B_2 . Вторая секущая пересекает первую окружность в точках C_1, D_1 , а вторую — в точках C_2, D_2 . Докажите, что точки $A_1C_1 \cap B_2D_2$, $A_1C_1 \cap A_2C_2$, $A_2C_2 \cap B_1D_1$, $B_2D_2 \cap B_1D_1$ лежат на одной окружности, соосной с данными двумя.

Решение. Пусть X — точка пересечения прямых A_1C_1 и A_2C_2 . Тогда степень точки относительно первой окружности равна $XA_1 \cdot XC_1$, а относительно второй — $XA_2 \cdot XC_2$. Отношение этих степеней равно (рис. 10.5)

$$\frac{XA_1 \cdot XC_1}{XA_2 \cdot XC_2} = \frac{\sin \angle B_2A_2C_2 \sin \angle D_2C_2A_2}{\sin \angle B_1A_1C_1 \sin \angle D_1C_1A_1} = \frac{A_2D_2 \cdot B_2C_2}{R_2^2} : \frac{A_1D_1 \cdot B_1C_1}{R_1^2}.$$

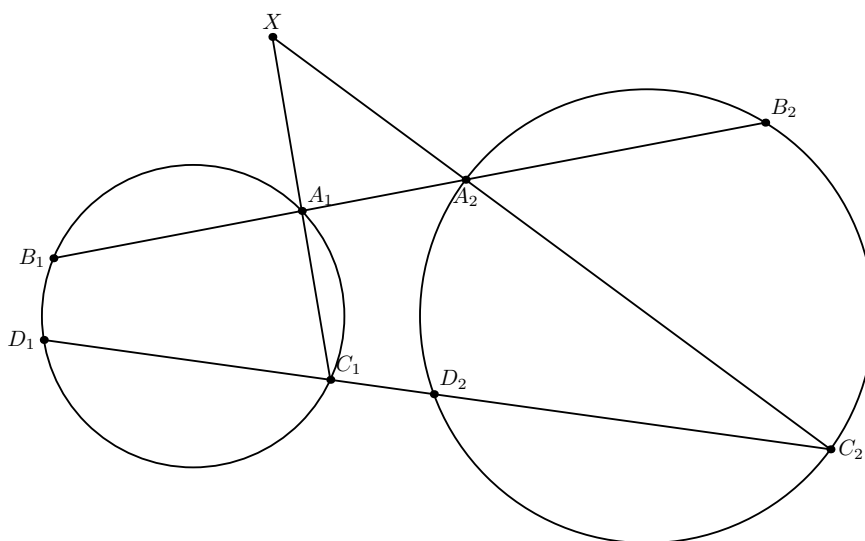


Рис. 10.5.

Такие же отношения степеней получаются для трех остальных точек пересечения. Но геометрическим местом точек с фиксированным отношением степеней является окружность, соосная с двумя данными

6. (Д.Бродский) Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке S . Биссектриса угла ASC пересекает основания трапеции в точках K и L (K лежит на отрезке SL). Точка X выбрана на

отрезке SK , а точка Y — на продолжении отрезка SL за точку L так, что $\angle AXC - \angle AYC = \angle ASC$. Докажите, что $\angle BXD - \angle BYD = \angle BSD$.

Решение. Пусть C' — точка, симметричная C относительно SX , Y' — такая точка на луче CX , что $SX \cdot SY' = SB \cdot SD = SA \cdot SC$. Тогда $SX \cdot SY' = SC' \cdot SA$, т.е. X, Y', A, C' лежат на одной окружности (рис. 10.6). Следовательно, $\angle AY'S = \angle SC'X = \angle SCX$. Аналогично $\angle XY'C = \angle SAX$, значит $\angle AXC = \angle SAX + \angle SCX + \angle ASC = \angle AY'C + \angle ASC$ и Y' совпадает с Y . Тогда аналогично получаем, что $\angle ASD = \angle BXD - \angle BYD$.

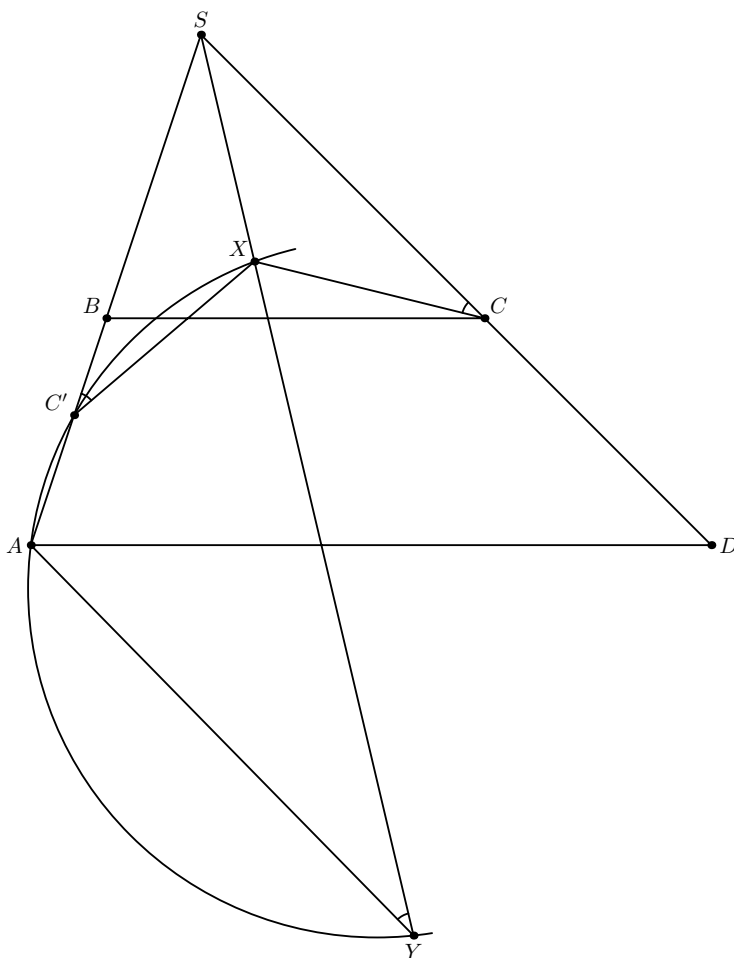


Рис. 10.6.

Примечание. Можно также показать, что $\angle XAY = \angle XCY$, $\angle XBY = \angle XDY$.

7. (М.Еtesamifard) В прямоугольном треугольнике ABC I — центр вписанной окружности, M — середина гипотенузы AB . Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке C пересекает прямую,

проходящую через I и параллельную AB , в точке P . Точка H — ортоцентр треугольника PAB . Докажите, что точка пересечения прямых CH и PM лежит на вписанной окружности треугольника ABC .

Решение. Поскольку точки A, B, H, P образуют ортоцентрическую четверку, H лежит на поляре точки P относительно окружности с диаметром AB , т.е. описанной окружности треугольника ABC . Очевидно, что C также лежит на этой поляре, следовательно, $MP \perp CH$. Докажем, что CH проходит через центр Q гомотетии описанной и вписанной окружностей треугольника ABC .

Пусть S — середина дуги AB описанной окружности, T — проекция M на прямую PI , T' — образ T при инверсии относительно описанной окружности. Так как точки T и C лежат на окружности с диаметром MP , T' лежит на образе этой окружности — прямой CH . Заметим, что точки T', C, Q лежат на прямых MS, SI, MI соответственно, причем $T'M : T'S = R^2/r : (R^2/r + R) = R : (R + r)$, $CS : CI = (R + r) : r$ (поскольку $SI = SA = SB = R\sqrt{2}$), $QI : QM = r : R$. По теореме Менелая Q, T', C лежат на одной прямой.

Пусть теперь F — точка Фейербаха треугольника ABC . Поскольку диаметром окружности девяти точек является отрезок MC , точки C, Q, F являются попарными центрами гомотетий трех окружностей: девяти точек, описанной и вписанной. Следовательно, F лежит на прямой CH , а поскольку $\angle CFM = 90^\circ$, F является точкой пересечения CH и MP (рис. 10.7).

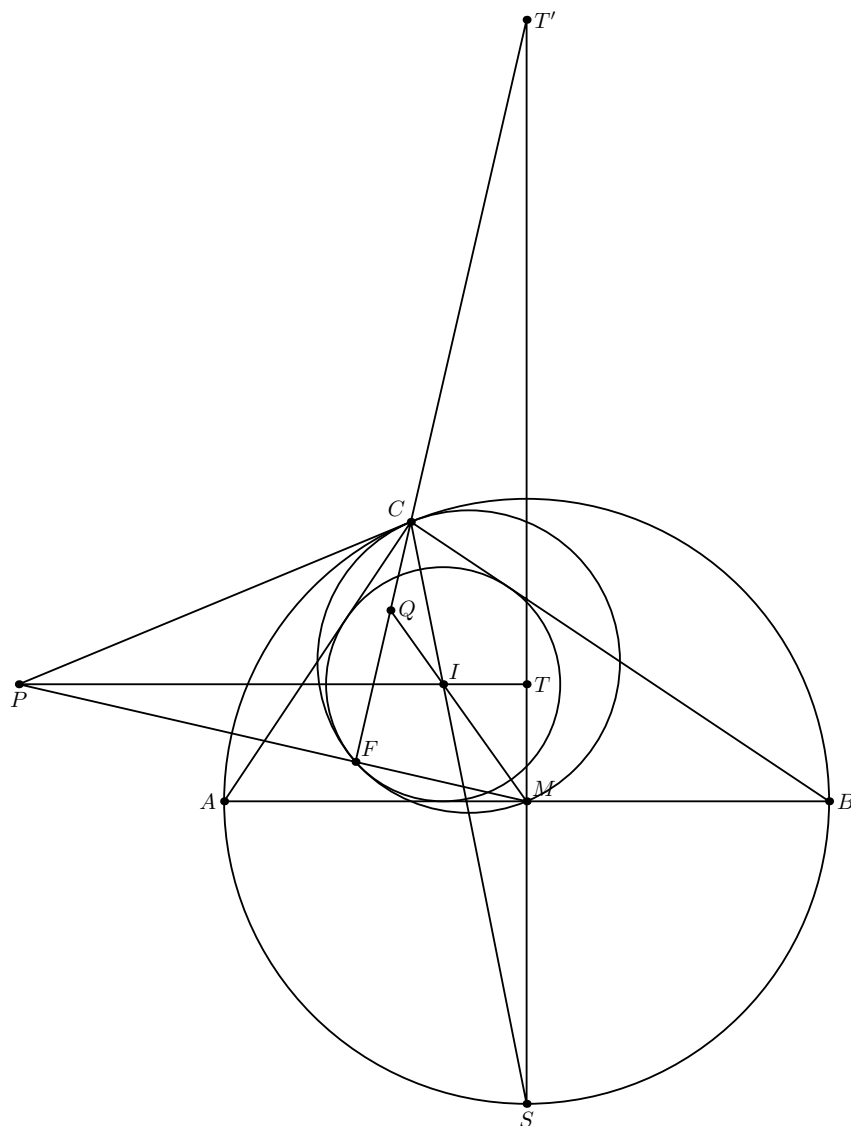


Рис. 10.7.

8. (М.Дидин) На аттракционе "Весёлая парковка" у машинки только 2 положения руля: "вправо" и "совсем вправо". В зависимости от положения руля, машинка едет по дуге радиуса r_1 или r_2 . Машинка выехала из точки A на север и проехала расстояние l , повернув при этом на угол $\alpha < 2\pi$. Где она могла оказаться (найдите ГМТ — концов возможных траекторий)?

Решение. Поскольку известны длина траектории и угол поворота, можно найти суммы длин дуг каждого из двух радиусов. Поэтому задачу можно переформулировать.

На плоскости даны точка A и выходящий из нее луч ℓ . Также даны два числа $r_1 > r_2$ и два угла $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 < \pi$. Найти ГМТ — концов B траекторий Γ , обладающих следующими свойствами:

- Γ начинается в A и касается в A луча ℓ ;
- Γ состоит из дуг радиусов r_1 и r_2 , причем суммарные угловые меры дуг каждого радиуса равны $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$ соответственно;
- две соседние дуги имеют в общем конце общую касательную и лежат по одну сторону от нее.

Ответ. Пусть O_1, O_2 — концы удовлетворяющих первому условию дуг с радиусами r_1, r_2 соответственно и угловыми мерами $2(\alpha_1 + \alpha_2)$. Рассмотрим круги W_1, W_2 с центрами O_1, O_2 и радиусами $2(r_1 - r_2) \sin \alpha_2, 2(r_1 - r_2) \sin \alpha_1$ соответственно. Искомое ГМТ — пересечение этих кругов.

Доказательство. Пусть PQ — произвольный участок кривой Γ радиуса r_1 , R — такая точка на отрезке PQ , что $PR : PQ = r_2 : r_1$. Дуга PR , касающаяся Γ в точке P имеет радиус r_2 , а касательная к ней в точке R параллельна касательной к Γ в точке Q . Заменяем дугу PQ на PR , а часть QB кривой Γ перенесем на вектор $\vec{QR}$. Поступив так с каждым из участков длины r_1 , перенесем точку B в точку O_2 , при этом $O_2 \vec{B} = \frac{r_1 - r_2}{r_1} \sum P_i \vec{Q}_i$. Аналогично $O_1 \vec{B} = \frac{r_2 - r_1}{r_2} \sum Q_i \vec{P}_{i+1}$ (считаем, что $Q_0 = A, P_{n+1} = B$).

Отложим все дуги, из которых состоит Γ , на единичной окружности, начиная с точки X . Конец последней дуги попадет в точку Y такую, что $\smile XY = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ и вектор $O_1 O_2$ переходит в XY при гомотетии H с коэффициентом $1/(r_1 - r_2)$. Покрасим дуги, полученные из дуг радиуса r_1 в красный цвет, а остальные в синий. Сопоставим каждой дуге вектор от ее начала до конца. При гомотетии H вектор $O_2 B$ перейдет в сумму красных векторов, а BO_1 в сумму синих. Пусть Z — такая точка дуги XY , что $\smile XZ = 2\alpha_1$. Гомотетия H переводит граничные окружности W_2 и W_1 в окружности с центрами X, Y соответственно, проходящие через Z .

Докажем, что длина $O_2 B$ максимальна, когда красный вектор ровно один. Пусть сонаправленная $O_2 B$ касательная t к единичной окружности касается ее в точке E . Рассмотрим дугу T длины $2\alpha_1$ с серединой в E . Если концы T лежат на красных дугах, разобьем эти дуги на две части. Проекция на t красного вектора длины φ , лежащего вне T меньше $\varphi \cos \alpha_1$, следовательно, сумма проекций на t всех красных векторов меньше проекции T . Аналогично длина $O_1 B$ максимальна, когда синий вектор ровно один. Таким образом B лежит внутри пересечения кругов.

Пусть D — образ B при гомотетии H . Найдем на дуге XY такие точки E, F, G , что $\vec{XE} + \vec{FG} = \vec{XD}$. Пусть E, G — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку DZ с дугами XZ, YZ , а F — вторая точка пересечения дуги XY с прямой, проходящей через Z и параллельной EG . Тогда $DEFG$ — параллелограмм, что равносильно требуемому равенству. Легко видеть, что точки E, F, G по точке D строятся однозначно (рис. 10.8).

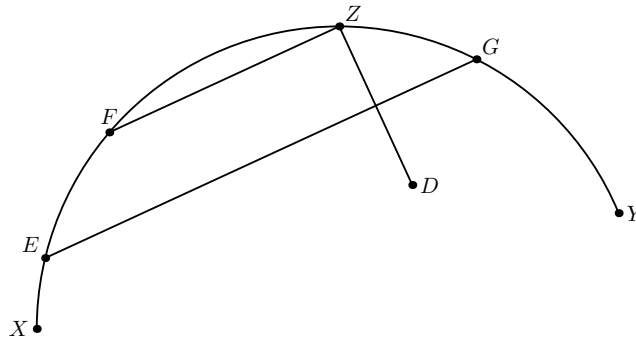


Рис. 10.8.