Семнадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Семнадцатой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

Задачи олимпиады рассчитаны на учащихся последних четырех классов средней школы. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решенные задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого её пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. **Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением**. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме **не раньше 1 декабря 2020 и не позднее 1 марта 2021 года**. Для этого нужно зайти на сайт **https://contest.yandex.ru/geomshar/**, справа наверху указать язык (русский), слева наверху нажать "Регистрация"и следовать появляющимся инструкциям.

ВНИМАНИЕ:

1. Решение каждой задачи (и каждого её пункта, если задача имеет пункты) должно содержаться в отдельном файле формата pdf, doc, docx или jpg. Если решение состоит из нескольких файлов, то нужно создать из них архив (zip или rar) и загрузить его.

2. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. **Во всех случаях необходимо убедиться перед отправкой, что файл хорошо читается**.

3. Если несколько раз загружается решение одной и той же задачи, то в системе проверки остается только последнее. **Поэтому при необходимости что-то изменить Вам следует снова загрузить решение задачи полностью.**

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomshar@yandex.ru. (НЕ присылайте работы на этот адрес!)**

Финальный тур предполагается провести летом 2021 года под Москвой. На него будут приглашены победители заочного тура, не закончившие к этому времени школу. Критерии прохождения на финал определяются после проверки работ заочного тура в зависимости от количества участников с тем или иным результатом. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** не позднее 1 июня 2021 г. Свои результаты Вы сможете узнать после публикации списков по адресу **geomshar@yandex.ru**.

1. (8) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямая проходящая через середину его высоты CH и вершину A пересекает CB в точке K. Пусть L — середина BC, а T — точка на отрезке AB такая, что $\angle ATK = \angle LTB$. Известно, что $BC = 1$. Найдите периметр треугольника KTL.

2. (8) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает прямые BC, AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Точки O, O_1 — центры описанных окружностей треугольников ABC и A_1BC_1 соответственно. Докажите, что $C_1O_1 \perp AO$.

3. (8) Высоты AA_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H; B_0 — середина стороны AC. Прямая, проходящая через вершину B параллельно AC, пересекает прямые B_0A_1, B_0C_1 в точках A', C' соответственно. Докажите, что прямые AA', CC', BH пересекаются в одной точке.

4. (8) Дан квадрат $ABCD$ с центром O. Из точки P, лежащей на меньшей дуге CD описанной около квадрата окружности, проведены касательные к его вписанной окружности, пересекающие сторону CD в точках M и N. Прямые PM и PN пересекают отрезки BC и AD соответственно в точках Q и R. Докажите, что медиана треугольника OMN из вершины O перпендикулярна отрезку QR и равна его половине.

5. (8–9) На плоскости отмечено пять точек. Найдите наибольшее возможное число подобных треугольников с вершинами в этих точках.

6. (8–9) В угол вписаны три окружности Γ_1, Γ_2, Γ_3 (радиус Γ_1 наименьший, а радиус Γ_3 наибольший), притом Γ_2 касается Γ_1 и Γ_3 в точках A и B соответственно. Пусть l —– касательная в точке A к Γ_1. Рассмотрим все окружности ω, касающиеся Γ_1 и l. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внутренних касательных к парам окружностей ω и Γ_3.

7. (8–9) В треугольник ABC вписана окружность с центром I, касающаяся сторон CA, AB в точках E, F соответственно. Точки M, N на прямой EF таковы, что $CM = CE$ и $BN = BF$. Прямые BM и CN пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PI делит пополам отрезок MN.

8. (8–9) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведен луч l из вершины B. На луче внутри треугольника взяты точки P и Q так, что $\angle BAP = \angle QCA$. Докажите, что $\angle PAQ = \angle PCQ$.

9. (8–9) В параллелограмме $ABCD$ точки E и F выбираются на сторонах BC и AD соответственно так, что $EF = ED = DC$. Пусть M —– середина BE, а MD пересекает EF в точке G. Докажите, что углы EAC и GBD равны.

10. (8–9) Докажите, что две изотомические прямые треугольника не могут пересекаться внутри его серединного треугольника. (*Изотомическими прямыми треугольника* ABC *называются две прямые, точки пересечения которых с прямыми* BC, CA, AB *симметричны относительно середин соответствующих сторон треугольника.*)

11. (8–9) Во вписанном пятиугольнике отметили середины четырех сторон, после чего сам пятиугольник стерли. Восстановите его.

12. (8–10) Есть набор монет радиусами $1, 2, 3, \ldots, 10$ см. Можно положить две из них на стол так, чтобы они касались друг друга, и добавлять монеты по одной так, чтобы очередная касалась хотя бы двух уже лежащих. Новую монету нельзя класть на старую. Можно ли положить несколько монет так, чтобы центры каких-то трёх монет оказались на одной прямой?

13. (9–11) В треугольнике ABC точка M — середина дуги BAC описанной окружности Ω, I — центр вписанной окружности, N — вторая точка пересечения прямой AI с Ω, E — точка касания стороны BC с соответствующей вневписанной окружностью, Q — вторая точка пересечения окружности IMN с прямой, проходящей через I и параллельной BC. Докажите, что прямые AE и NQ пересекаются на Ω.

14. (9–11) Пусть γ_A, γ_B, γ_C — вневписанные окружности треугольника ABC, касающиеся сторон BC, CA, AB соответственно. Обозначим через l_A общую внешнюю касательную окружностей γ_B и γ_C, отличную от BC. Аналогично определим l_B, l_C. Из точки P, лежащей на l_A, проведем отличную от l_A касательную к γ_B и найдем точку X ее пересечения с l_C. Аналогично найдем точку Y пересечения касательной из P к γ_C с l_B. Докажите, что прямая XY касается γ_A.

15. (9–11) Дан вписанный пятиугольник $APBCQ$. Точка M внутри треугольника ABC такова, что $\angle MAB = \angle MCA$, $\angle MAC = \angle MBA$ и $\angle PMB = \angle QMC = 90°$. Докажите, что прямые AM, BP и CQ пересекаются в одной точке.

16. (9–11) Рассмотрим две окружности Ω и ω, касающиеся друг друга внутренним образом в точке A. Пусть хорда BC окружности Ω касается окружности ω в точке K. Пусть также O — центр ω. Докажите, что окружность BOC делит отрезок AK пополам.

17. (9–11) Дан остроугольный треугольник ABC. Точки A_0 и C_0 — середины меньших дуг BC и AB соответственно. Окружность, проходящая через A_0 и C_0, пересекает прямые AB и BC в точках P и S, Q и R соответственно (все эти точки различны). Известно, что $PQ \parallel AC$. Докажите, что $A_0P + C_0S = C_0Q + A_0R$.

18. (10–11) Пусть AM — медиана неравнобедренного треугольника ABC, T — точка касания вписанной окружности ω со стороной BC, S — вторая точка пересечения ω с отрезком AT. Докажите, что вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AM, BC и касательной к ω в точке S, касается описанной окружности треугольника ABC.

19. (10–11) Точка P лежит внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$. Общие внутренние касательные к вписанным окружностям треугольников PAB и PCD пересекаются в точке Q, а общие внутренние касательные к вписанным окружностям

треугольников PBC и PAD — в точке R. Докажите, что P, Q, R лежат на одной прямой.

20. (10–11) Отображение f ставит в соответствие каждому невырожденному треугольнику на плоскости окружность ненулевого радиуса, причем выполняются следующие условия:

    — Если произвольное подобие σ переводит треугольник Δ_1 в Δ_2, то σ переводит окружность $f(\Delta_1)$ в $f(\Delta_2)$.

    — Для любых четырех точек общего положения A, B, C, D окружности $f(ABC)$, $f(BCD)$, $f(CDA)$ и $f(DAB)$ имеют общую точку.

    Докажите, что для любого треугольника Δ окружность $f(\Delta)$ совпадает с окружностью девяти точек треугольника Δ .

21. (10–11) В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность и около неё можно описать окружность. От трапеции остались: вершина A, центр вписанной окружности I, описанная окружность ω и ее центр O. Восстановите трапецию с помощью одной лишь линейки.

22. (10–11) Дан выпуклый многогранник и точка K, не принадлежащая ему. Для каждой точки M многогранника строится шар с диаметром MK. Докажите, что в многограннике существует единственная точка, принадлежащая всем таким шарам.

23. (10–11) В пространстве даны шесть точек общего положения. Для каждых двух из них покрасим красным точки пересечения (если они есть) отрезка между ними и поверхности тетраэдра с вершинами в четырех оставшихся точках. Докажите, что число красных точек четно.

24. (11) В усеченную треугольную пирамиду вписана сфера, касающаяся оснований в точках T_1, T_2. Пусть h — высота пирамиды, R_1, R_2 — радиусы окружностей, описанных около ее оснований, O_1, O_2 — центры этих окружностей. Докажите, что

$$R_1R_2h^2 = (R_1^2 - O_1T_1^2)(R_2^2 - O_2T_2^2).$$