Семнадцатая олимпиада по геометрии
им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (И.Кухарчук, 8) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямая проходящая через середину его высоты CH и вершину A пересекает CB в точке K. Пусть L — середина BC, а T — точка на отрезке AB такая, что $\angle ATK = \angle LTB$. Известно, что $BC = 1$. Найдите периметр треугольника KTL.

   Ответ. 1.

   Решение. Пусть точки M, N симметричны L относительно AB и AC соответственно. Тогда $AM = AL = AN$ и $\angle MAN = 2\angle BAC$. В прямоугольных треугольниках ABC и ACH прямые AK и AL — медианы, следовательно, $\angle CAK = \angle LAB$ и $\angle NAK = \angle NAC + \angle CAK = \angle CAL + \angle LAB = \angle BAC$. Значит, AK — биссектриса угла MAN и $KM = KN$ (рис. 1). С другой стороны, $KM = KT + TL$, т.е. периметр треугольника KTL равен $KM + KL = NL = BC = 1$.

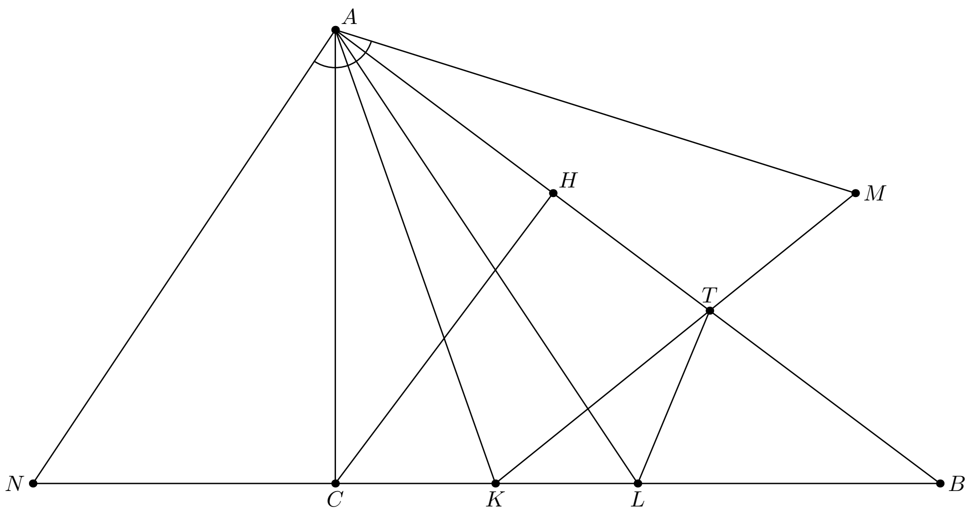

Рис. 1

2. (Д.Швецов, 8) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает прямые BC, AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Точки O, O_1 — центры описанных окружностей треугольников ABC и A_1BC_1 соответственно. Докажите, что $C_1O_1 \perp AO$.

   Решение. Рассмотрим случай остроугольного треугольника ABC, остальные случаи аналогичны. Так как $\angle AOC = 2\angle ABC = 2(180° - \angle A_1BC_1) = \angle A_1O_1C_1$, треугольники AOC и $C_1O_1A_1$ подобны и одинаково ориентированы (рис. 2). Так как их соответственные стороны AC и A_1C_1 перпендикулярны, AO и C_1O_1 также перпендикулярны.

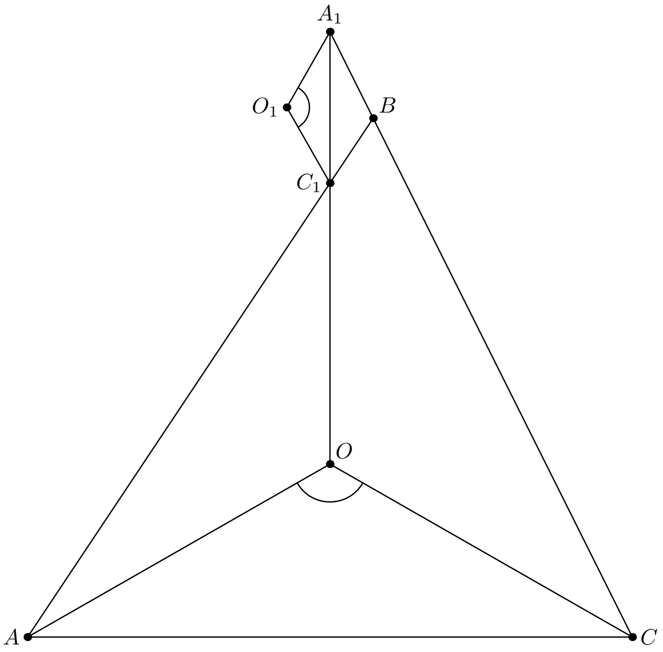

Рис. 2

3. (Д.Швецов, 8) Высоты AA_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H; B_0 — середина стороны AC. Прямая, проходящая через вершину B параллельно AC, пересекает прямые B_0A_1, B_0C_1 в точках A', C' соответственно. Докажите, что прямые AA', CC', BH пересекаются в одной точке.

   Решение. Пусть BB_1 — высота из вершины B. По теореме Фалеса прямая AA' делит отрезок BB_1 в отношении $BA' : AB_1$, а прямая CC' — в отношении $BC' : CB_1$ (рис. 3). Докажем. что эти отношения равны. Вновь применяя теорему Фалеса, получаем $BA' : CB_0 = BA_1 : A_1C$ и $BC' : AB_0 = BC_1 : C_1A$. Так как $AB_0 = CB_0$, искомое равенство можно переписать в виде $AB_1 : B_1C = (AC_1 : C_1B) \cdot (BA_1 : A_1C)$, что непосредственно следует из теоремы Чевы.

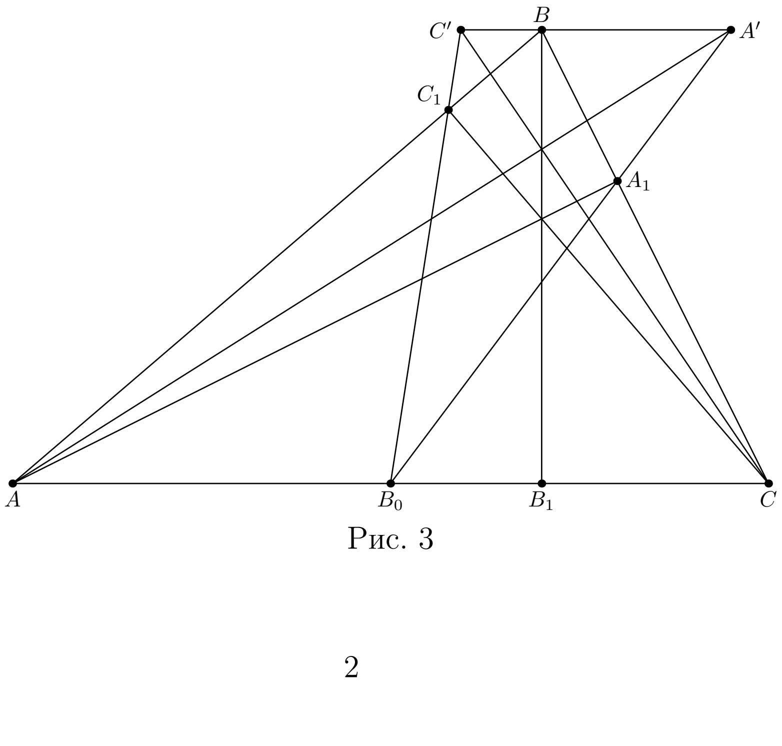

Рис. 3

4. (Tran Quang Hung, 8) Дан квадрат $ABCD$ с центром O. Из точки P, лежащей на меньшей дуге CD описанной около квадрата окружности, проведены касательные к его вписанной окружности, пересекающие сторону CD в точках M и N. Прямые PM и PN пересекают отрезки BC и AD соответственно в точках Q и R. Докажите, что медиана треугольника OMN из вершины O перпендикулярна отрезку QR и равна его половине.

Решение. Прямые PR и PQ содержат стороны квадрата, имеющего те же описанную и вписанную окружности, что и $ABCD$. Поэтому при повороте на 90° вокруг O точки M и Q переходят в R и N соответственно, т.е. $OM = OP$, $ON = OQ$ и $\angle POM = \angle NOQ = 90^\circ$. Тогда, если S — вершина параллелограмма $MONS$, то треугольник OMS равен треугольнику POQ, причем их соответственные стороны перпендикулярны (рис. 4).

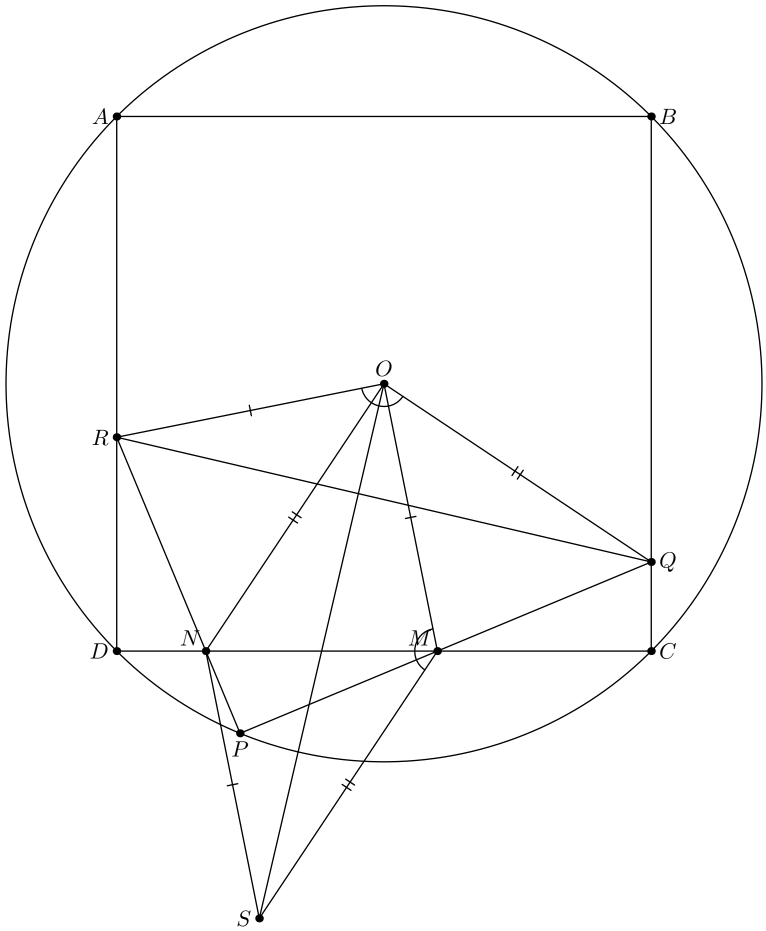

Рис. 4

Примечание. Нетрудно также заметить, что $\angle RON = \angle NOM = \angle MOQ = 45^\circ$.

5. (M.Saghafian, 8–9) На плоскости отмечено пять точек. Найдите наибольшее возможное число подобных треугольников с вершинами в этих точках.

Ответ. 8.

Пример. Вершины и центр квадрата.

Оценка. Опишем все конфигурации четырех точек, образующих четыре подобных треугольника. Пусть A, B, C, D — такие четыре точки. Рассмотрим два случая.

1. Точка A лежит внутри треугольника BCD. Пусть B — наибольший угол треугольника BCD. Тогда угол CAD больше любого из углов треугольника BCD, так что треугольники ACD и BCD не могут быть подобны.

2. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Диагональ AC делит угол BAD пополам, и аналогичное свойство верно для углов B, C, D. Тогда $ABCD$ — ромб, а, так как треугольники ABC и BCD подобны, то $ABCD$ — квадрат.

2.2. Найдется вершина, для которой диагональ не является биссектрисой, пусть это вершина A. Тогда углы BAC, CAD и BAD попарно различны. Значит, они являются тремя углами каждого из четырех подобных треугольников, т.е. их сумма равна $180°$ и $\angle BAD = 90°$.

Среди углов, образованных данными точками, четыре прямых и восемь острых. Углы ABD, CBD и т.д. не могут быть прямыми, поскольку тогда один из углов четырехугольника будет тупым. Значит прямыми являются углы BAD, ABC, BCD и ADC.

Таким образом, в обоих подслучаях $ABCD$ — прямоугольник.

Вернемся к задаче. Назовем *плохим* треугольник, образованный какими-то тремя из данных точек и не входящий в число подобных. (В частности, плохой треугольник образуют три точки, лежащие на одной прямой). Покажем, что найдутся хотя бы два плохих треугольника.

Заметим, что пять точек могут образовать не больше одного прямоугольника. Как показано выше, каждая из остальных четверок содержит хотя бы один плохой треугольник. При этом каждый плохой треугольник задается двумя четверками, так что общее количество плохих треугольников не меньше $4/2 = 2$.

6. (И.Кухарчук, 8–9) В угол вписаны три окружности Γ_1, Γ_2, Γ_3 (радиус Γ_1 наименьший, а радиус Γ_3 наибольший), притом Γ_2 касается Γ_1 и Γ_3 в точках A и B соответственно. Пусть l —– касательная в точке A к Γ_1. Рассмотрим все окружности ω, касающиеся Γ_1 и l. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внутренних касательных к парам окружностей ω и Γ_3.

   Ответ. Окружность Γ_2 и отрезок AB без самих точек A и B.

   Решение. Если окружность касается Γ_1 и l в точке A, то точка пересечения внутренних касательных, очевидно, лежит на интервале AB, причем любая точка интервала может быть получена таким образом.

   Пусть ω касается l в отличной от A точке P, r, r_1, r_3 — радиусы ω, Γ_1, Γ_3. Тогда $AP = 2\sqrt{rr_1}$, $AB = 2\sqrt{r_1r_3}$.

   Центр внутренней гомотетии ω и Γ_3 лежит на отрезке PB. Пусть H — проекция A на этот отрезок. Тогда $PH : BH = PA^2 : AB^2 = r : r_3$. Следовательно, H является искомой точкой пересечения внутренних касательных (рис. 6). Очевидно, что H лежит на Γ_2 и любая точка этой окружности, отличная от A и B, может быть получена таким образом.

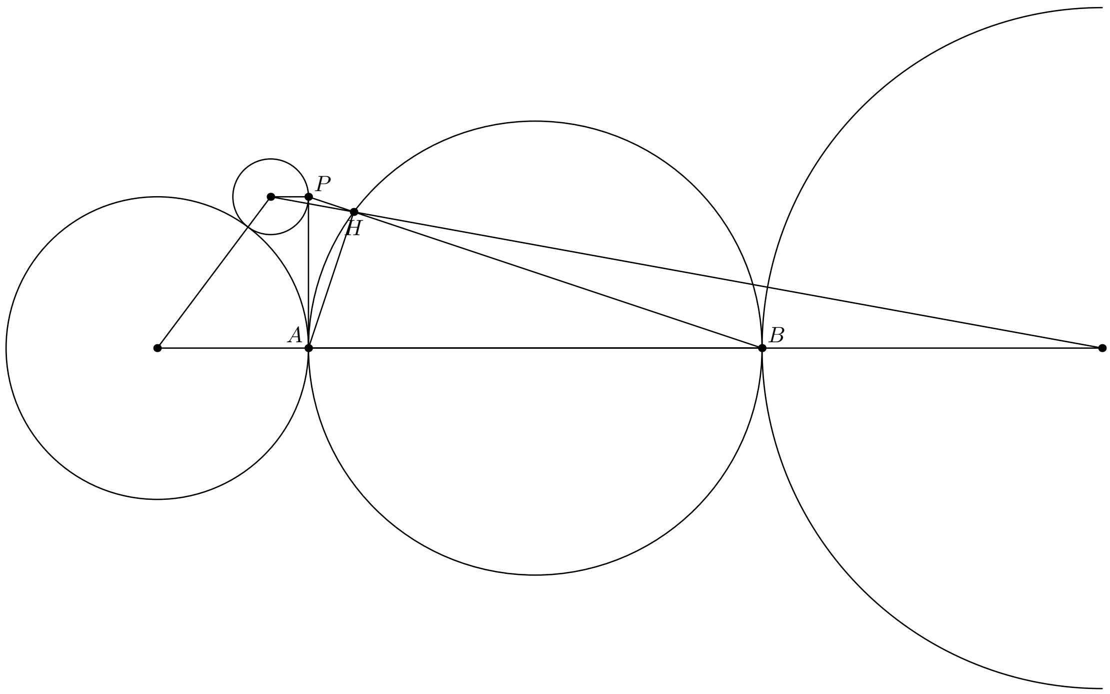

Рис. 6

7. (Tran Quang Hung, 8–9) В треугольник ABC вписана окружность с центром I, касающаяся сторон CA, AB в точках E, F соответственно. Точки M, N на прямой EF таковы, что $CM = CE$ и $BN = BF$. Прямые BM и CN пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PI делит пополам отрезок MN.

   Решение. Докажем, что прямые BM и CN делят отрезки IN и IM соответственно в одном и том же отношении (внешним или внутренним образом). Тогда, применив к треугольнику IMN теорему Чевы, получим утверждение задачи.

   Первое отношение равно $S_{BIM} : S_{BMN}$, второе — $S_{CIN} : S_{CMN}$.

   Заметим, что AEF, BFN и CEM — подобные равнобедренные треугольники. Следовательно, $S_{BMN} : S_{CMN} = d(B, MN) : d(C, MN) = BF : CE = BD : DC$, где D — точка касания вписанной окружности со стороной BC.

   Из подобия треугольников AEF, BFN и CEM получаем также, что $AB \parallel CM$ и $AC \parallel BN$. Поскольку $BD = BN$ и $CD = CM$, отсюда следует, что $DM \parallel BI$ и $DN \parallel CI$ (рис. 7). Поэтому $S_{BIM} = S_{BID}$, $S_{CIN} = S_{CID}$ и $S_{BIM} : S_{CIN} = BD : DC$, ч.т.д.

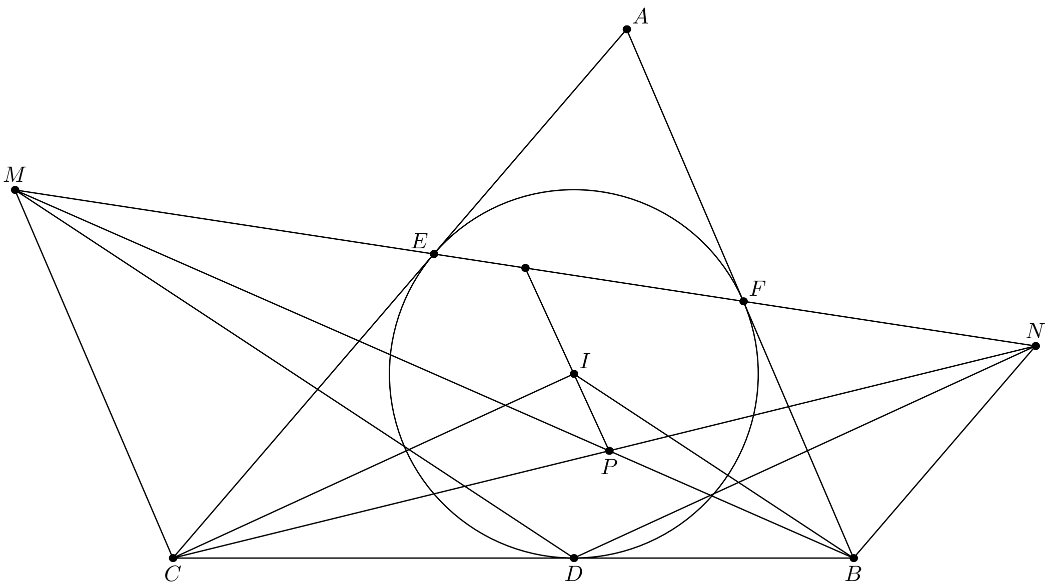

Рис. 7

8. (П.Рябов, 8–9) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведен луч l из вершины B. На луче внутри треугольника взяты точки P и Q так, что $\angle BAP = \angle QCA$. Докажите, что $\angle PAQ = \angle PCQ$.

Решение. Пусть R — точка, изогонально сопряженная P относительно треугольника ABC, а точка Q' симметрична R относительно оси симметрии ABC. Тогда $\angle ABQ' = \angle CBR = \angle ABP = \angle ABQ$ и $\angle ACQ' = \angle CAR = \angle BAP = \angle ACQ$. Следовательно, точки Q и Q' совпадают и $\angle CAQ = \angle ACR = \angle BCP$ (рис. 8). Значит (мы рассматриваем случай, когда точки B, P, Q лежат на луче l именно в таком порядке, другой случай аналогичен) $\angle PAQ = \angle A - \angle BAP - \angle CAQ = \angle C - \angle ACQ - \angle BCP = \angle PCQ$.

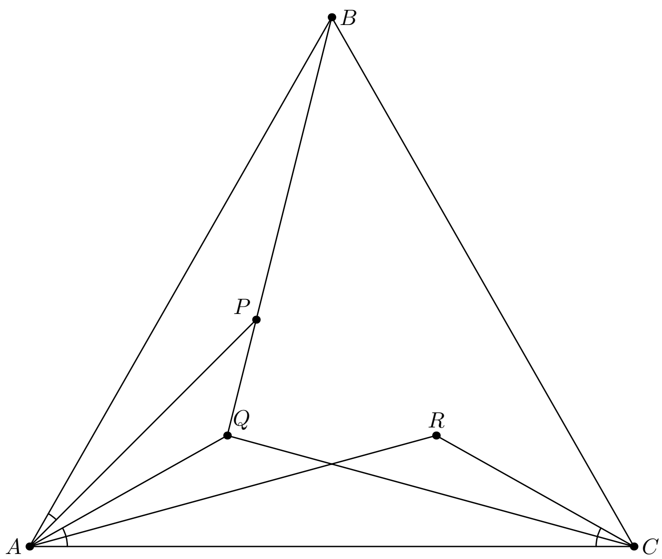

Рис. 8

9. (И.Кухарчук, 8–9) В параллелограмме $ABCD$ точки E и F выбираются на сторонах BC и AD соответственно так, что $EF = ED = DC$. Пусть M — середина BE, а MD пересекает EF в точке G. Докажите, что углы EAC и GBD равны.

Решение. Обозначим точку пересечения прямых AD и BG через H. Так как $BE \parallel FH$, а GM — медиана треугольника BEG, то GD — медиана треугольника GFH. Поскольку $CE \parallel DFH$ и $CD = DE = EF$, получаем, что отрезок CH также равен эти трем отрезкам.

Рассмотрим треугольники ACE и BHD. Как показано выше, $CE = DH$. Так как $AB = CD = DE$ и $AD \parallel BE$, то $ABED$ — равнобокая трапеция, т.е. $AE = BD$. Аналогично получаем, что $ABCH$ — равнобокая трапеция и $AC = BH$.

Таким образом треугольники ACE и BHD равны (рис.9). Следовательно, $\angle CAE = \angle HBD = \angle GBD$.

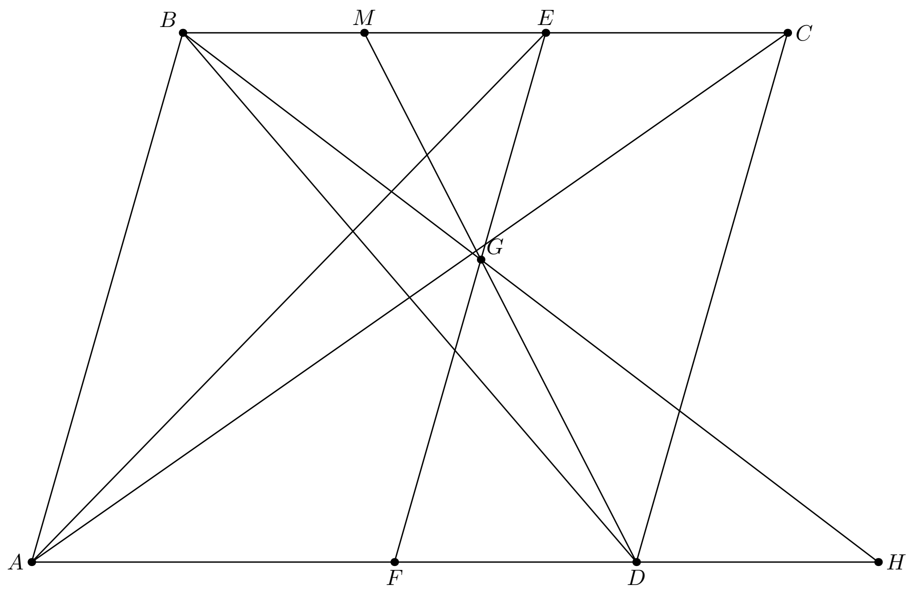

Рис. 9

10. (Л.Емельянов, 8–9) Докажите, что две изотомические прямые треугольника не могут пересекаться внутри его серединного треугольника. (*Изотомическими прямыми треугольника ABC называются две прямые, точки пересечения которых с прямыми BC, CA, AB симметричны относительно середин соответствующих сторон треугольника.*)

Первое решение. Пусть ABC — данный треугольник, K, L, M — середины BC, CA, AB соответственно.

Пусть ℓ — одна из данных прямых. Если ℓ не пересекает внутренность треугольника ABC, утверждение задачи очевидно. Поэтому будем считать, что ℓ пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Пусть P' и Q' — такие точки, что M и L — середины отрезков PP' и QQ' соответственно. Тогда прямой, изотомически сопряженной с ℓ будет прямая $P'Q'$, обозначим ее через ℓ'.

Если P и Q лежат на отрезках AM и AL соответственно, то ℓ не пересекает внутренность треугольника KLM и утверждение задачи верно. Аналогично, если P и

Q лежат на отрезках BM и CL соответственно, то ℓ' не пересекает внутренность треугольника KLM.

Будем считать, что P лежит на отрезке AM, а Q на отрезке CL. Тогда P' лежит на отрезке BM, а Q' на отрезке AL. Докажем, что в этом случае ℓ и ℓ' пересекаются внутри треугольника ALM.

Пусть ℓ и ℓ' пересекают отрезок LM в точках X и Y соответственно (рис. 10). Достаточно доказать, что точки L, X, Y и M лежат на прямой LM именно в таком порядке.

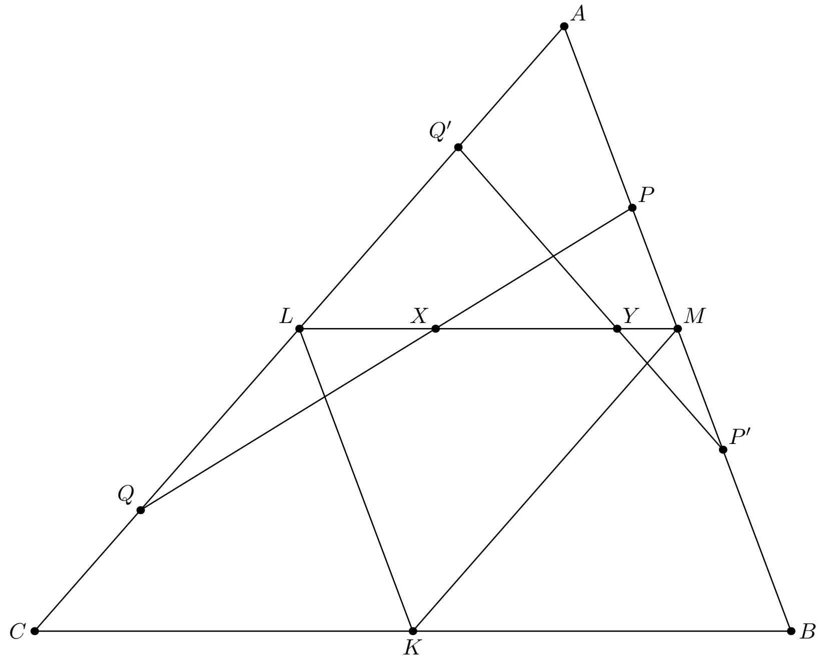

Рис. 10

Применяя к треугольнику ALM и прямой ℓ теорему Менелая, получаем $LX : XM = (LQ : QA)\cdot(AP : PM)$. Аналогично получаем $LY : YM = (LQ' : Q'A)\cdot(AP' : P'M) = (LQ : Q'A)\cdot(AP' : PM)$. Так как $QA > Q'A$ и $AP < A'P$, то $LX : XM < LY : YM$.

Второе решение. Предположим, что точка S пересечения прямых лежит внутри серединного треугольника. Тогда существует аффинное преобразование, переводящее точки A, B, C, S в A', B', C' и центр описанной окружности треугольника $A'B'C'$. Изотомические прямые при этом преобразовании останутся изотомическими и, значит, будут симметричными относительно серединного перпендикуляра к любой из сторон треугольника, что, очевидно, невозможно.

Примечание. Из этого рассуждения следует, что точка пересечения изотомических прямых не может лежать не только внутри серединного треугольника, но и внутри трех углов, вертикальных с его углами.

11. (А.Заславский, 8–9) Во вписанном пятиугольнике отметили середины четырех сторон, после чего сам пятиугольник стерли. Восстановите его.

Решение. Пусть K, L, M, N — известные середины сторон AB, BC, CD, DE пятиугольника $ABCDE$, вписанного в окружность Ω. Построим параллелограммы

$NMLP$ и $KLMQ$. Треугольники KLP и ACE гомотетичны с центром B и коэффициентом $1/2$, следовательно, диаметром описанной окружности треугольника KLP будет отрезок BO, где O — центр Ω. Аналогично получаем, что O лежит на окружности MNQ (рис. 11). Таким образом, мы можем построить точку O, затем вершину B и, наконец, весь пятиугольник.

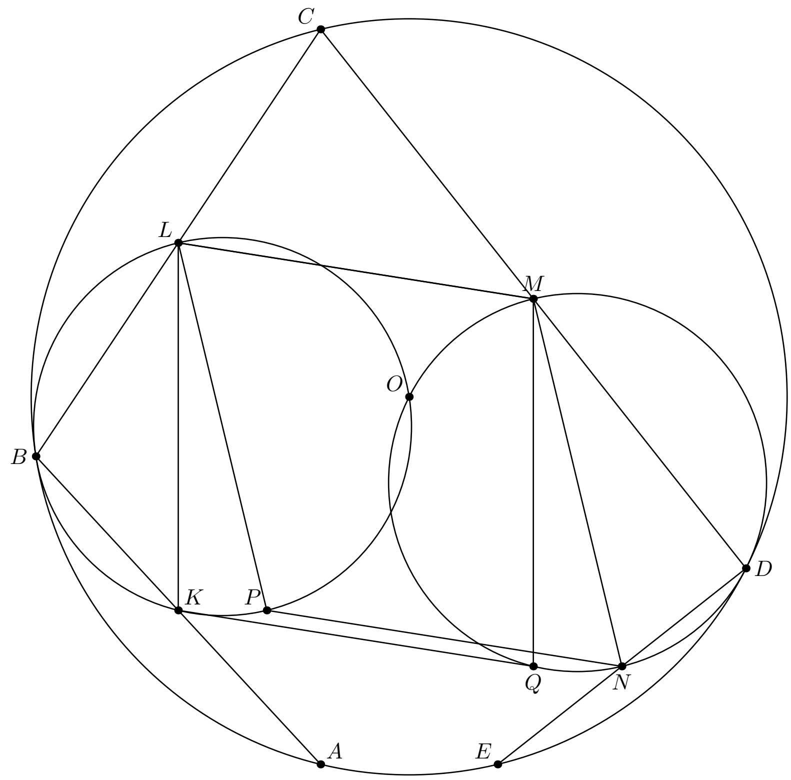

Рис. 11

Примечание. Окружности KLP и MNQ пересекаются в двух точках, по каждой из которых можно построить пятиугольник. Если оба построенных пятиугольника выпуклые, задача имеет два решения. В противном случае искомый пятиугольник восстанавливается однозначно.

12. (Е.Бакаев, 8–10) Есть набор монет радиусами $1, 2, 3, \ldots, 10$ см. Можно положить две из них на стол так, чтобы они касались друг друга, и добавлять монеты по одной так, чтобы очередная касалась хотя бы двух уже лежащих. Новую монету нельзя класть на старую. Можно ли положить несколько монет так, чтобы центры каких-то трёх монет оказались на одной прямой?

    Решение. Будем искать конструкцию с четырьмя монетами (очевидно, трех монет недостаточно). Пусть монеты с радиусами a, b, x, y расположены так, что любые две из них, кроме монет с радиусами x и y касаются. Обозначим через O_r центр окружности с радиусом r. Применяя теорему косинусов к треугольнику $O_aO_bO_x$, получаем $\cos\angle O_bO_aO_x = ((a+b)^2 + (a+x)^2 - (b+x)^2)/2(a+b)(a+x)$. Аналогично, $\cos\angle O_bO_aO_y = ((a+b)^2 + (a+y)^2 - (b+y)^2)/2(a+b)(a+y)$. Чтобы точки O_a, O_x и O_y лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы сумма этих выражений равнялась нулю, что эквивалентно равенству $(b-a)(ax+ay+2xy) = a(a+b)(2a+x+y)$.

Непосредственная проверка показывает, что оно выполнено при $a = 2$, $b = 5$, $x = 3$, $y = 8$ (рис. 12, косинусы равны 1/7 и -1/7).

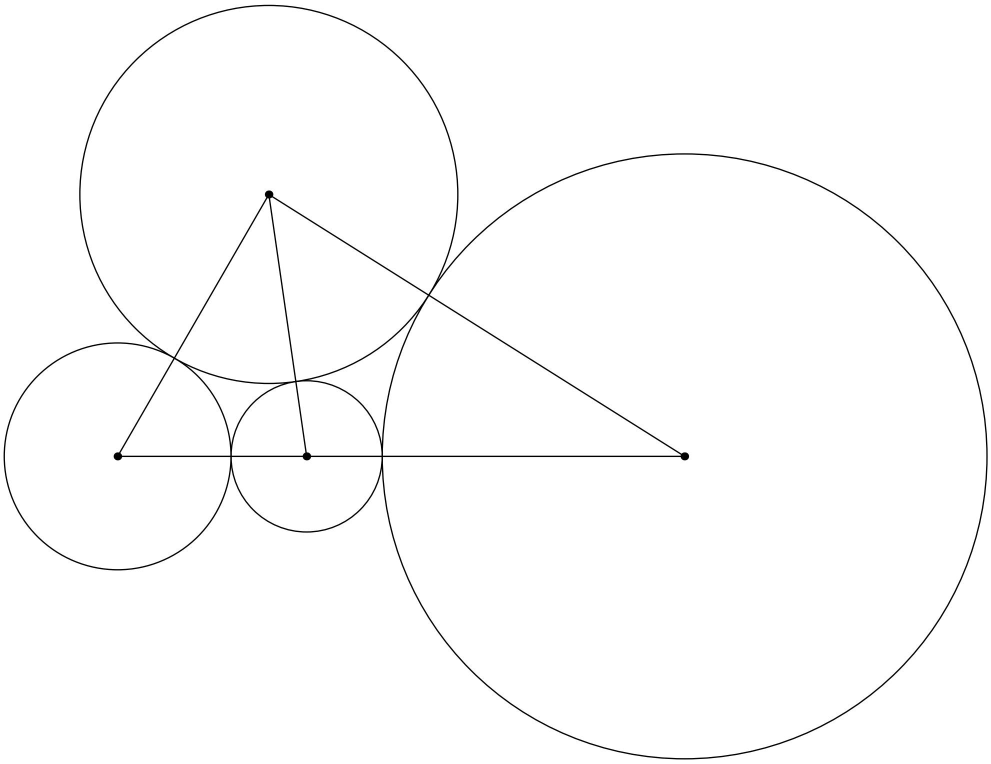

Рис. 12

Примечания (Н.Белухов) 1. Компьютерный перебор позволяет найти еще одну конфигурацию из четырех монет: $a = 3$, $b = 8$, $x = 5$, $y = 9$ с косинусами, равными 1/11 и -1/11 (диофантово уравнение относительно a, b, x, y имеет и другие решения, но в каждом из них какие-то переменные принимают равные значения).

2. Для монет с радиусами 1, 2, ..., 16 возможна следующая конструкция, не требующая решения диофантовых уравнений. Расположим монеты с радиусами 1, 2, 4, 8, 16 так, чтобы касались пары: 1—2, 1—4, 2—4, 2—8, 4—8, 4—16, 8—16. Тогда треугольники $O_1O_2O_4$, $O_2O_4O_8$ и $O_4O_8O_{16}$ подобны, следовательно, $\angle O_1O_4O_{16} = \angle O_1O_4O_2 + \angle O_2O_4O_8 + \angle O_8O_4O_{16} = 180°$, поскольку слагаемые соответствуют разным углам этих треугольников.

13. (A.Mudgal, 9–11) В треугольнике ABC точка M — середина дуги BAC описанной окружности Ω, I — центр вписанной окружности, N — вторая точка пересечения прямой AI с Ω, E — точка касания стороны BC с соответствующей вневписанной окружностью, Q — вторая точка пересечения окружности IMN с прямой, проходящей через I и параллельной BC. Докажите, что прямые AE и NQ пересекаются на Ω.

Решение. Пусть ω — полувписанная окружность, противоположная A (т.е. окружность, касающаяся сторон AB, AC и окружности Ω). Обозначим точку касания ω и Ω через T. Известны следующие свойства полувписанных окружностей:

1. Лучи AE и AT изогональны относительно угла A.

2. Точки M, I, и T лежат на одной прямой.

Из этих свойств легко получить утверждение задачи. Действительно, прямая AE вторично пересекает Ω в точке X. По свойству 1 прямые BC и TX параллельны. Поэтому прямые IQ и TX также параллельны. По свойству 2 получаем, что $\angle MNQ = \angle MIQ = \angle MTX = \angle MNX$. Следовательно, X лежит на NQ (рис. 13).

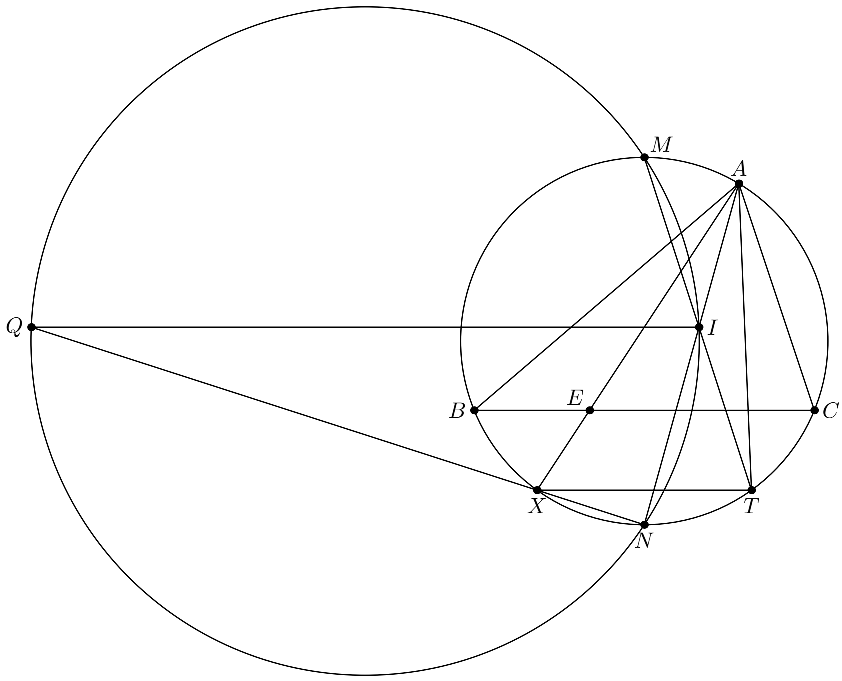

Рис. 13

14. (P.Agarwal, 9–11) Пусть γ_A, γ_B, γ_C — вневписанные окружности треугольника ABC, касающиеся сторон BC, CA, AB соответственно. Обозначим через l_A общую внешнюю касательную окружностей γ_B и γ_C, отличную от BC. Аналогично определим l_B, l_C. Из точки P, лежащей на l_A, проведем отличную от l_A касательную к γ_B и найдем точку X ее пересечения с l_C. Аналогично найдем точку Y пересечения касательной из P к γ_C с l_B. Докажите, что прямая XY касается γ_A.

Решение. Лемма. Пусть даны окружность ω и две касающиеся ее прямые m, n. Рассмотрим следующее отображение $f : m \to n$: для любой точки P на m $f(P) = Q$ — точка пересечения n и второй касательной из P к ω. Тогда f проективно.

Доказательство. Пусть O — центр ω. Тогда ориентированный угол между OP и OQ не зависит от P. Значит, для любых четырех точек P_1, P_2, P_3, P_4 на m и $f(P_i) = Q_i$ поворот вокруг O переводит прямые OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 в OQ_1, OQ_2, OQ_3, OQ_4. Следовательно, двойные отношения $(P_1P_2P_3P_4)$ и $(Q_1Q_2Q_3Q_4)$ равны.

Вернемся к задаче. В соответствии с леммой определим отображение f_A для окружности γ_A из l_B в l_C. Определим f_B и f_C циклически. Докажем, что композиция f_A, f_B и f_C Является тождественным преобразованием. По лемме достаточно убедиться, что для трех различных точек P на l_B $f_C(f_B(f_A(P))) = P$. Это, очевидно, так для точек пересечения сторон треугольника ABC с l_B.

15. (A.Mudgal, N.V.Tejaswi, 9–11) Дан вписанный пятиугольник $APBCQ$. Точка M внутри треугольника ABC такова, что $\angle MAB = \angle MCA$, $\angle MAC = \angle MBA$ и $\angle PMB = \angle QMC = 90°$. Докажите, что прямые AM, BP и CQ пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть описанная окружность k пятиугольника $APBCQ$ вторично пересекает прямую AM в точке N. Из условия получаем, что треугольники AMB и CMA подобны. Так как $\angle BCN = \angle BAM$, $\angle CBN = \angle CAM$, треугольник CNB также подобен им. Следовательно, $AB : AC = BM : AM = BN : NC$, т.е. четырехугольник $ABNC$ гармонический и M — середина AN.

Докажем, что четырехугольник $APNQ$ гармонический. Пусть PM вторично пересекает k в точке R. Тогда $\angle NMR = 90° - \angle BMN$, $\angle AMQ = \angle AMC - 90°$. Поскольку $\angle BMN + \angle AMC = \angle BAC + \angle BNC = 180°$, то $\angle NMR = \angle AMQ$, вместе с равенством $AM = MN$ это означает, что точки Q и R симметричны относительно серединного перпендикуляра к AN. Следовательно, $\smile AQ = \smile NR$ (рис. 15), а значит, $\angle MPN = \angle NPR = \angle APQ = \angle ANQ = \angle MNQ$. Аналогично, $\angle MQN = \angle AQP = \angle MNP$. Поэтому треугольники APQ, MPN и MNQ подобны и $APNQ$ — гармонический четырехугольник.

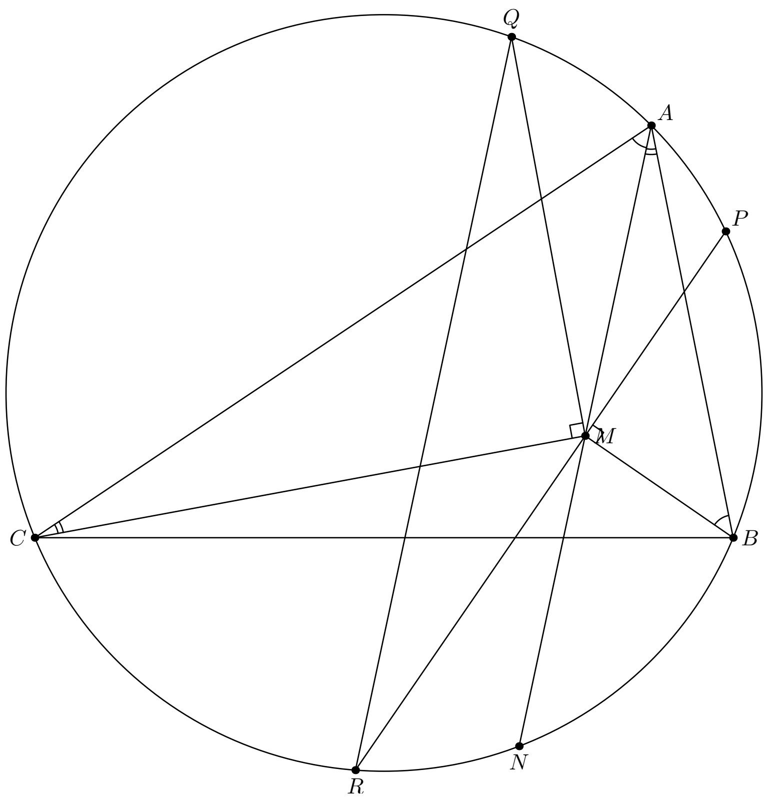

Рис. 15

Чтобы закончить решение заметим, что прямая BP делит отрезок AN внешним образом в отношении $S_{BAP} : S_{BNP} = (AB \cdot AP) : (BN \cdot PN)$. Аналогично, CQ делит AN внешним образом в отношении $(AC \cdot AQ) : (CN \cdot QN)$. Так как четырехугольники $ABNC$ и $APNQ$ гармонические, эти отношения равны.

16. (П.Бибиков, 9–11) Рассмотрим две окружности Ω и ω, касающиеся друг друга внутренним образом в точке A. Пусть хорда BC окружности Ω касается окружности ω

в точке K. Пусть также O — центр ω. Тогда окружность BOC делит отрезок AK пополам.

Решение. Пусть M — середина AK, а касательная к ω и Ω в точке A пересекает BC в точке X. Тогда $XA^2 = XB \cdot XC$; также $XA^2 = XM \cdot XO$ в силу подобия треугольников XMA и XAO. Значит $XB \cdot XC = XM \cdot XO$, т.е. четырехугольник $BOMC$ вписанный (рис.16).

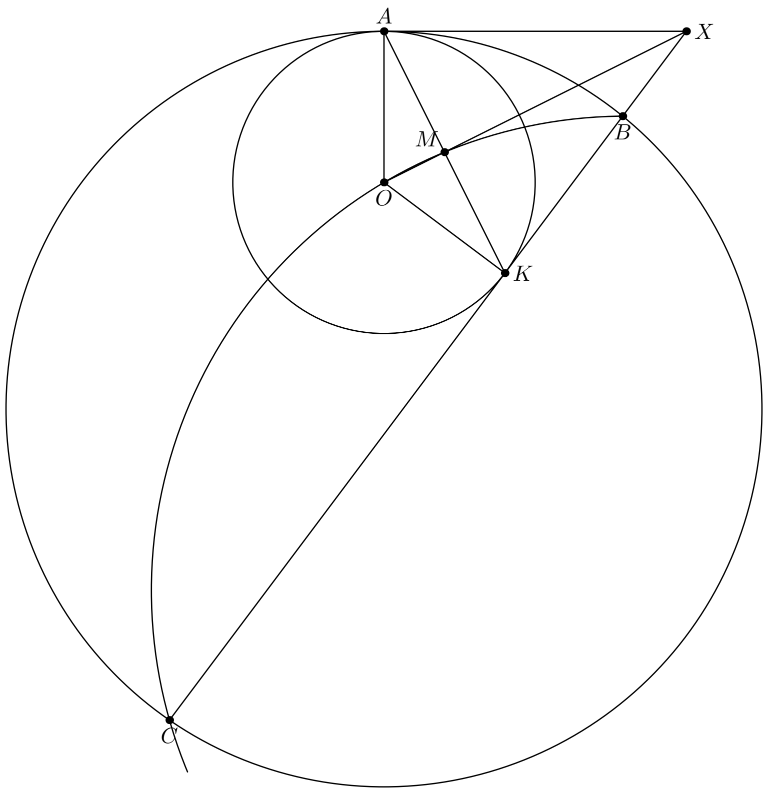

Рис. 16

17. (С.Севастьянов, 9–11) Дан остроугольный треугольник ABC. Точки A_0 и C_0 — середины меньших дуг BC и AB соответственно. Окружность, проходящая через A_0 и C_0, пересекает прямые AB и BC в точках P и S, Q и R соответственно (все эти точки различны). Известно, что $PQ \parallel AC$. Докажите, что $A_0P + C_0S = C_0Q + A_0R$.

Решение. Будем считать, что $AB \neq BC$ (в противном случае утверждение задачи очевидно). Касательная t к окружности ABC в точке B касается также окружности BPQ. Поэтому прямые A_0C_0, PQ и t пересекаются в одной точке — радикальном центре X окружностей ABC, BPQ и $PQRS$. Кроме того, A_0C_0 образует равные углы с AC и t, т.е. является биссектрисой угла BXP. А поскольку центр I вписанной окружности треугольника ABC симметричен B относительно A_0C_0, то I лежит на PQ. При этом $IQ = QC$, $IA_0 = A_0C$ и, значит, прямая A_0Q проходит через середину B_0 дуги AC. Аналогично получаем, что C_0P проходит через B_0.

Теперь имеем $\angle RA_0P = \angle RQP = \angle C$, $\angle PRA_0 = \angle PC_0A_0 = (\pi - \angle C)/2$. Следовательно, $A_0P = A_0R$ (рис. 17). Аналогично, $C_0Q = C_0S$, что и доказывает утверждение задачи.

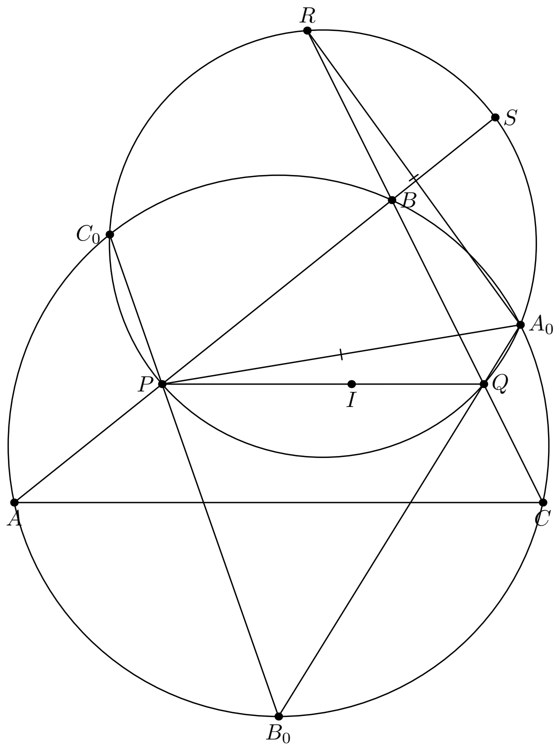

Рис. 17

18. (Н.Белухов, 10–11) Пусть AM — медиана неравнобедренного треугольника ABC, T — точка касания вписанной окружности ω со стороной BC, S — вторая точка пересечения ω с отрезком AT. Докажите, что вписанная окружность треугольника δ, образованного прямыми AM, BC и касательной к ω в точке S, касается описанной окружности треугольника ABC.

Первое решение. Пусть D — произвольная точка отрезка BC. Две окружности, вписанные в углы ADB, ADC и касающиеся внутренним образом описанной окружности треугольника ABC, называются *окружностями Тебо*. Воспользуемся следующими свойствами окружностей Тебо (см. [1]).

1. Вторая общая внешняя касательная окружностей Тебо касается также вписанной окружности ω.

2. Точка пересечения E отрезка AD и второй внешней касательной к окружностям Тебо лежит на касательной к ω, параллельной BC.

Пусть U — точка ω, противоположная T. В силу свойств окружностей Тебо для решения задачи достаточно доказать, что касательные к ω в точках U и S пересекаются на медиане AM. Пусть касательная в точке U пересекает касательную в точке S и прямую AT в точках V и W соответственно. Так как $\angle USW = \pi/2$, а $UV = VS$, то V — середина отрезка UW. Но прямая AU пересекает сторону BC в точке ее касания с вневписанной окружностью, которая симметрична T относительно M, следовательно, AM проходит через V (рис. 18).

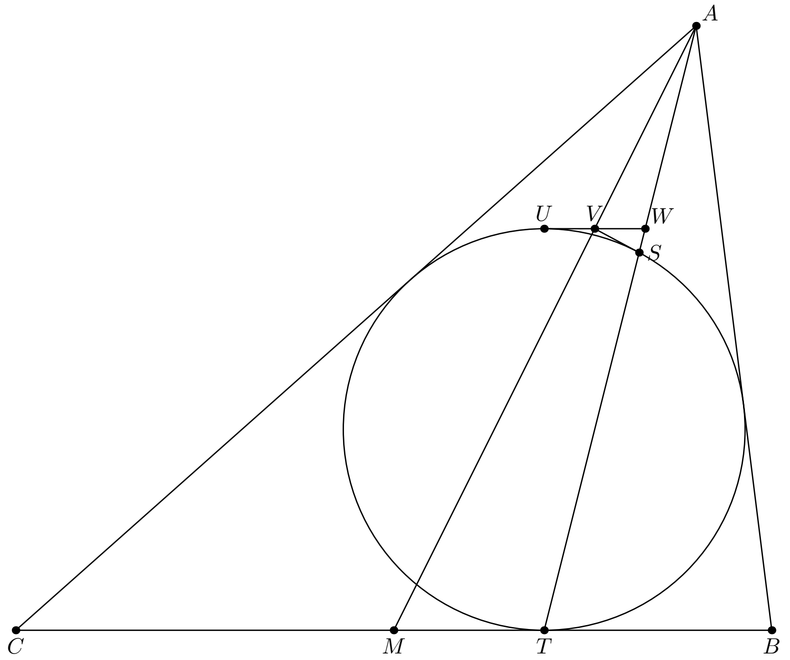

Рис. 18

Второе решение. Пусть σ — вписанная окружность треугольника δ, для точки X, лежащей вне σ, обозначим через t_X длину касательной из X к σ. Будем считать, что $AB < AC$. Применяя к описанной окружности треугольника ABC, окружностям нулевого радиуса A, B, C и окружности σ теорему Кези, получаем, что утверждение задачи равносильно равенству $at_A + bt_B - ct_C = 0$.

Пусть касательная t к ω, параллельная BC, пересекает отрезки AM и AT в точках K и P соответственно. Пусть TQ — диаметр ω (т.е. Q — точка касания t и ω). Аналогично первому решению получаем, что SK — медиана прямоугольного треугольника PSQ. Следовательно, $\angle KSQ = \angle KQS$ и KS касается ω. Пусть прямые BC и KS пересекаются в точке L. Тогда δ совпадает с треугольником KLM.

Имеем $2t_A = 2(AK + t_K) = 2AK + (KL + KM - LM) = 2AK + KS + KM - MT$, $2t_B = 2(t_L - BL) = (KL + LM - KM) - 2BL = (KL - BL) + (LM - BL) - KM = KS + BT + BM - KM$ и $2t_C = 2(CM + t_M) = 2CM + (KM + LM - KL) = BC + KM + MT - KS$.

Следовательно,

$$2(at_A+bt_B-ct_C) = 2aAK-(-a+b+c)KM+(a+b+c)KS-(a+c)MT+b\cdot\frac{a-b+c}{2}+b\cdot\frac{a}{2}-ca.$$

Также $KP = KS$ и $AK : AM = KP : MT = r : r_A$, где r и r_A — радиусы ω и ω_A соответственно, поскольку гомотетия с центром A, переводящая ω в ω_A, переводит также треугольник AKP в AMT.

С другой стороны, для длин касательных из A к ω и ω_A выполнено $r : r_a = (-a + b + c) : (a + b + c)$.

Следовательно, $AK : KM = (-a + b + c) : 2a$ и $KS : MT = (-a + b + c) : (a + b + c)$, значит, $2aAK - (-a + b + c)KM + (a + b + c)KS - (a + c)MT = (-2a + b)MT = (-2a + b) \cdot \frac{b-c}{2}$.

Осталось показать, что $(-2a+b)\cdot\frac{b-c}{2}+b\cdot\frac{a-b+c}{2}+b\cdot\frac{a}{2}-ca=0$, что выполнено для любых действительных a, b, c.

19. (Tran Quang Hung, 10–11) Точка P лежит внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$. Общие внутренние касательные к вписанным окружностям треугольников PAB и PCD пересекаются в точке Q, а общие внутренние касательные к вписанным окружностям треугольников PBC и PAD — в точке R. Докажите, что P, Q, R лежат на одной прямой.

Решение. Обозначим вписанные окружности треугольников APB, BPC, CPD, DPA через ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 соответственно. Будем считать, что P не совпадает с точкой пересечения AC и BD, для которой утверждение задачи очевидно.

Лемма 1. Пусть Γ_1 — произвольная окружность, вписанная в угол APB, Γ_3 — произвольная окружность, вписанная в угол CPD, X — точка пересечения общих внутренних касательных к Γ_1 и Γ_3. Тогда точки P, Q, X лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть T — точка пересечения общих внутренних касательных к Γ_1 и ω_3. По теореме о трех центрах гомотетии P, Q, T лежат на одной прямой. Причем, поскольку P не совпадает с точкой пересечения AC и BD, прямые PQ, PT определены однозначно и совпадают. Аналогично получаем, что точки P, T, X лежат на одной прямой, причем $P\neq X$. Лемма доказана.

Аналогично получаем, что для любых окружностей Γ_2, Γ_4, вписанных соответственно в углы BPC, DPA, точка Y пересечения их общих внутренних касательных лежит на прямой PR.

Таким образом, для решения задачи достаточно найти такие четыре окружности Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, что точки P, X, Y лежат на одной прямой.

Возьмем на лучах PA, PB, PC, PD такие точки A', B', C', D', что $PA'=PB'=PC'=PD'$, и рассмотрим окружности Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, касающиеся PA, PB, PC, PD в точках A', B', C', D'.

Лемма 2. Пусть прямые $A'C'$ и $B'D'$ пересекаются в точке Z. Тогда точки X, Y и Z совпадают.

Доказательство. Покажем, что X совпадает с Z, для Y доказательство аналогично. Пусть прямая $A'C'$ вторично пересекает Γ_1 и Γ_3 в точках U и V соответственно, а прямая $B'D'$ вторично пересекает Γ_3 в точке W. Покажем, что треугольники $A'UB'$ и $VC'W$ гомотетичны.

Рассмотрим случай, когда U лежит на большей из дуг $A'B'$, V — на меньшей из дуг $C'D'$, W — на большей из дуг $C'D'$ (рис.19), другие конфигурации разбираются аналогично.

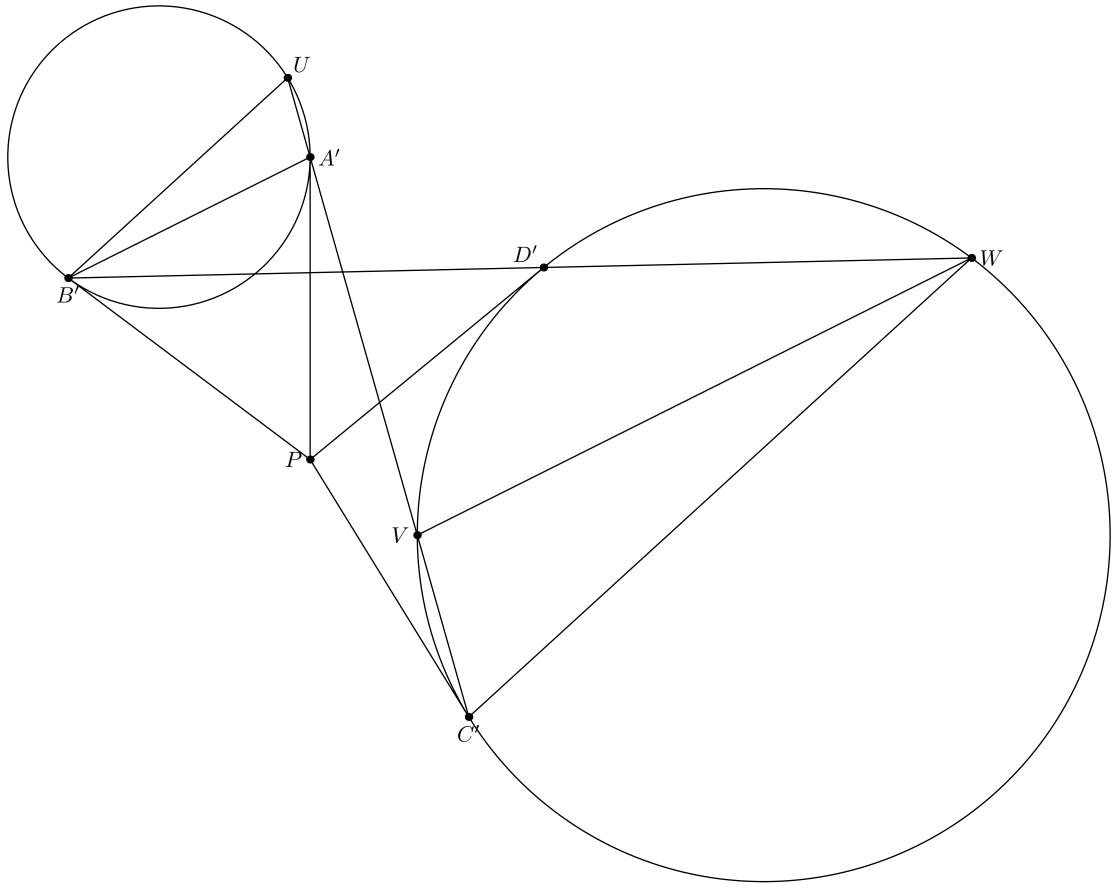

Рис. 19

Стороны $A'U$ и $C'V$ лежат на одной прямой.

Далее, $\angle B'A'C' = \angle B'D'C' = \pi - \angle C'D'W = \pi - \angle C'VW$ (первое равенство следует из вписанности четырехугольника $A'B'C'D'$ в окружность с центром P), значит $A'B' \parallel VW$.

Наконец, $\angle UB'Z = \pi - \angle B'UZ - \angle B'ZU = \pi - \angle A'UB' - \angle A'ZB' = \pi - \angle A'B'P - \angle A'ZB' = \angle C'D'P = \angle C'WD'$. Следовательно, $B'U \parallel C'W$.

Таким образом, треугольники $A'UB'$ и $VC'W$ гомотетичны. Центр гомотетии — точка Z является также центром внутренней гомотетии окружностей Γ_1 и Γ_3. Лемма доказана.

Из Леммы 2 сразу следует утверждение задачи.

Примечание 1. Из решения видно, что в условии задачи вписанные окружности треугольников APB, BPC, CPD, DPA можно заменить на любые четыре окружности, вписанные в углы APB, BPC, CPD, DPA.

Примечание 2. Лемму 2 можно доказать по-другому. Пусть K, L, M, N — центры Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 соответственно. Тогда четырехугольник $KLMN$ описан вокруг окружности Ω с центром P и радиусом $PA' = PB' = PC' = PD'$. Его диагонали KM, LN и хорды $A'C'$, $B'D'$ пересекаются в одной точке, которая делит каждую диагональ в отношении, равном отношению касательных к Ω из ее концов. Это эквивалентно лемме 2.

20. (Н.Белухов, 10–11) Отображение f ставит в соответствие каждому невырожденному треугольнику на плоскости окружность ненулевого радиуса, причем выполняются следующие условия:

— Если произвольное подобие σ переводит треугольник Δ_1 в Δ_2, то σ переводит окружность $f(\Delta_1)$ в $f(\Delta_2)$.

— Для любых четырех точек общего положения A, B, C, D окружности $f(ABC)$, $f(BCD)$, $f(CDA)$ и $f(DAB)$ имеют общую точку.

Докажите, что для любого треугольника Δ окружность $f(\Delta)$ совпадает с окружностью девяти точек треугольника Δ .

Решение. Известно, что для любых точек общего положения A, B, C, D окружности девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA, DAB пересекаются в одной точке. Таким образом, отображение, ставящее в соответствие каждому треугольнику его окружность девяти точек, удовлетворяет обоим условиям.

Назовем треугольник Δ *хорошим*, если $f(\Delta)$ — окружность девяти точек Δ. Надо доказать, что все треугольники хорошие. Для четырех точек общего положения A, B, C, D назовем общую точку окружностей $f(ABC)$, $f(BCD)$, $f(CDA)$, $f(DAB)$ *договорной* точкой для A, B, C, D.

Лемма 1. Правильный треугольник хороший.

Доказательство. Пусть ABC — правильны треугольник с центром O. По первому условию поворот на 120° вокруг O сохраняет $f(ABC)$. Следовательно, O — центр $f(ABC)$.

Пусть P — какая-нибудь из договорных точек A, B, C, O. Тогда $P \neq O$. Пусть Q и R такие точки, что PQR — правильный треугольник с центром O. Используя первое условие и поворот на $\pm 120^\circ$ вокруг O, получаем, что Q и R также будут договорными точками для A, B, C, O. Следовательно, O — центр $f(AOB)$.

Пусть D вершина ромба $ABCD$, а S — договорная точка для A, B, C, D. Тогда $f(ABC)$ и $f(ACD)$ симметричны относительно прямой AC. Так как центр O окружности $f(ABC)$ не лежит на AC, точка S лежит на AC. Аналогично, S лежит на BD. Следовательно, S — середина AC. Лемма доказана

Лемма 2. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с $AB = AC$. Тогда центр $f(ABC)$ лежит на серединном перпендикуляре к BC.

Доказательство. Применим первое условие и симметрию относительно серединного перпендикуляра BC.

Лемма 3. Для любого треугольника ABC середины сторон AB, BC, CA лежат внутри или на окружности $f(ABC)$.

Доказательство. Предположим, что середина M стороны AC лежит вне $f(ABC)$. Рассмотрим проходящую через M прямую ℓ, не пересекающую $f(ABC)$. Пусть D вершина параллелограмма $ABCD$. Тогда ℓ разделяет $f(ABC)$ и $f(ACD)$, что противоречит второму условию для точек A, B, C, D.

Лемма 4. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с $AB = AC$ и $\angle A \leq 30^\circ$. Тогда $f(ABC)$ касается отрезка BC в его середине и лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.

Доказательство. Пусть точка D лежит по одну сторону с A от прямой BC и треугольник BCD правильный. Пусть M — середина BC, N — середина AM, k — окружность с диаметром MN.

По лемме 1 и так как $\angle A \leq 30°$, $f(BCD)$ лежит внутри k или касается ее в точке M. По леммам 2 и 3 k лежит внутри $f(ABC)$ или касается ее в точке M. Следовательно, M — единственная договорная точка для A, B, C, D.

Лемма 5. Пусть ABC равнобедренный треугольник с $AB = AC$ и $\angle A \geq 150°$. Тогда $f(ABC)$ касается отрезка BC в его середине и лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.

Доказательство. Пусть D — вершина ромба $ABDC$. Применяя к треугольникам ABD и ACD лемму 4, получаем, что единственная договорная точка для A, B, C, D — это точка пересечения AD и BC. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство леммы 4.

Лемма 6. Остроугольный треугольник ABC с углами $\angle A \leq 15°$, $\angle B \geq 75°$, $\angle C \geq 75°$ хороший.

Доказательство. Пусть точка D симметрична A относительно BC. По лемме 5, так как $75° \leq \angle B < 90°$, $75° \leq \angle C < 90°$, получаем, что проекция P точки A на BC — единственная общая точка $f(ABD)$ и $f(ACD)$. По второму условию P лежит на $f(ABC)$. Аналогично из лемм 4 и 5 получаем, что проекции Q точки B на CA и проекция R точки C на AB лежат на той же окружности. Следовательно, $f(ABC)$ совпадает с окружностью PQR.

Лемма 7. Пусть ABC — произвольный треугольник. Предположим, что найдется такой круг $\mathcal{D}$, что для любой точки $D \in \mathcal{D}$ оба треугольника ABD и ACD хорошие. Тогда треугольник ABC тоже хороший.

Доказательство. Предположим, что ABC не является хорошим. Тогда $f(ABC)$ и окружность девяти точек e треугольника ABC имеют не больше двух общих точек.

Уменьшая, если надо, круг $\mathcal{D}$, можно добиться, что для любой точки $D \in \mathcal{D}$ середина M отрезка AD не лежит на e, а окружности девяти точек e_1 e_2 треугольников ABD и ACD не совпадают. Тогда e_1 и e_2 пересекаются в M и некоторой точке N, лежащей на окружности e.

Однако, вновь уменьшив круг $\mathcal{D}$, можно добиться, что M не лежит на $f(ABC)$, а N не является общей точкой e и $f(ABC)$ для любой точки $D \in \mathcal{D}$. Тогда окружности $f(ABC)$, $f(ABD) = e_1$ и $f(ACD) = e_2$ не имеют общих точек — противоречие.

Лемма 8. Любой треугольник с двумя углами, меньшими $7°30'$, хороший.

Доказательство. Рассмотрим достаточно малый круг $\mathcal{D}$ с центром в центре описанной окружности треугольника и применим леммы 6 и 7.

Лемма 9. Пусть любой треугольник с двумя углами, меньшими θ, хороший. Тогда любой треугольник с углом, меньшим 2θ, тоже хороший.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $\angle A < 2\theta$. Тогда найдется такой круг $\mathcal{D}$, что $\angle BAD < \theta$ и $\angle CAD < \theta$ для любой точки $D \in \mathcal{D}$, причем, если взять $\mathcal{D}$ достаточно далеко от ABC, то и $\angle ADB < \theta$, $\angle ADC < \theta$ для любой точки $D \in \mathcal{D}$. Осталось применить лемму 7.

Используя лемму 8 и многократно применяя лемму 9, получаем, что все треугольники хорошие.

21. (Д.Ратаров, 10–11) В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность и около неё можно описать окружность. От трапеции остались: вершина A, центр вписанной окружности I, описанная окружность ω и ее центр O. Восстановите трапецию с помощью одной лишь линейки.

    Решение. Продлим AO до пересечения с окружностью ω в точке M. Пусть так же луч AI пересекает окружность ω в точке M'. Продлим $M'O$ до пересечения с окружностью ω в точке M''. Углы $AM'M$ и $M'AM''$ прямые, поскольку опираются на диаметры AM и $M'M''$ соответственно, т.е. прямые AM'' и MM' перпендикулярны прямой AM' и, следовательно, параллельны. Имея две параллельные прямые, с помощью одной лишь линейки мы можем провести прямую, параллельную двум другим, через точку I. Очевидно, проведенная прямая пересечет окружность ω в вершине B, поскольку $\angle AIB = \pi/2$ (AI и BI — биссектрисы углов BAD и ABC соответственно). Проведем прямую j через точки O и I. С помощью одной лишь линейки мы можем построить две прямые, которые будут перпендикулярны диаметру, совпадающему с прямой j (известный факт). Затем через A и B проводим прямые, параллельные двум проведенным. В пересечении получим недостающие вершины D и C соответственно.

22. (Ю.Нестеров, В.Протасов, 10–11) Дан выпуклый многогранник и точка K, не принадлежащая ему. Для каждой точки M многогранника строится шар с диаметром MK. Докажите, что в многограннике существует единственная точка, принадлежащая всем таким шарам.

    Решение. Пусть P — ближайшая к K точка многогранника. Поскольку многогранник выпуклый, точка P определена однозначно и многогранник лежит по одну сторону от плоскости, проходящей через P и перпендикулярной PK. Поэтому шар с диаметром PK не имеет с многогранником общих точек, отличных от P, а сама точка P принадлежит любому шару с диаметром KM.

23. (А.Скопенков, 10–11) В пространстве даны шесть точек общего положения. Для каждых двух из них покрасим красным точки пересечения (если они есть) отрезка между ними и поверхности тетраэдра с вершинами в четырех оставшихся точках. Докажите, что число красных точек четно.

    Решение. Красная точка является пересечением отрезка между какими-то двумя из данных точек и внутренности треугольника, образованного какими-то тремя другими точками. Таким образом, каждой красной точке соответствуют отрезок и треугольник.

    Рассмотрим всевозможные разбиения данных точек на две тройки T_1 и T_2. Число таких разбиений равно $C_6^3/2 = 10$. Покажем, что для каждого разбиения есть четное количество красных точек P таких, что треугольник, соответствующий P, совпадает с T_1 или T_2. Так как каждая красная точка соответствует ровно одному разбиению, это докажет утверждение задачи.

    Рассмотрим произвольное разбиение $T_1 = \{A, B, C\}$, $T_2 = \{P, Q, R\}$. Пусть ℓ — прямая, по которой пересекаются плоскости ABC и PQR (если плоскости параллельны, разбиению не соответствует ни одной красной точки). Пусть ℓ пересекает треугольники T_1, T_2 по отрезкам t_1, t_2 соответственно (если одно из множеств t_1, t_2 пусто, соответствующих разбиению красных точек нет). Красная точка, соответствующая разбиению — это конец одного из отрезков t_1, t_2, лежащий внутри другого отрезка.

Концы отрезков t_1, t_2 могут располагаться на ℓ тремя способами: t_1 и t_2 не пересекаются (0 красных точек); t_1 и t_2 пересекаются, но ни один из отрезков не лежит внутри другого (2 красных точки); один из отрезков t_1, t_2 содержится в другом (2 красных точки). Во всех случаях число красных точек четно.

24. (А.Заславский, 11) В усеченную треугольную пирамиду вписана сфера, касающаяся оснований в точках T_1, T_2. Пусть h — высота пирамиды, R_1, R_2 — радиусы окружностей, описанных около ее оснований, O_1, O_2 — центры этих окружностей. Докажите, что
$$R_1R_2h^2 = (R_1^2 - O_1T_1^2)(R_2^2 - O_2T_2^2).$$

Первое решение. Пусть боковые ребра пирамиды пересекаются в точке S. Рассмотрим конус с вершиной S, описанный около сферы. Он пересекает основания пирамиды по вписанным в них эллипсам, причем фокусами первого эллипса будут точка T_1 и точка T_2' пересечения плоскости основания с прямой ST_2, а фокусами второго — T_2 и точка T_1' пересечения плоскости основания с прямой ST_1. По обобщенной формуле Эйлера (см. [2]).
$$R_1^2l_1^2 = (R_1^2 - O_1T_1^2)(R_1^2 - O_1{T'}_2^2), \tag{1}$$
$$R_2^2l_2^2 = (R_2^2 - O_2T_2^2)(R_2^2 - O_2{T'}_1^2), \tag{2}$$
где l_1, l_2 — малые оси соответствующих эллипсов.

Рассмотрим теперь плоскость симметрии конуса. Она проходит через S, центр сферы и большие оси эллипсов. Сечение пирамиды этой плоскостью является трапецией $ABCD$, описанной около окружности с центром I и диаметром h, причем эта окружность касается оснований трапеции в точках T_1 и T_2. Легко видеть, что треугольник AIT_1 подобен треугольнику IBT_2, а треугольник CIT_2 — треугольнику IDT_1 (рис. 24), следовательно
$$\frac{h^2}{4} = AT_1 \cdot BT_2 = CT_2 \cdot DT_1. \tag{3}$$

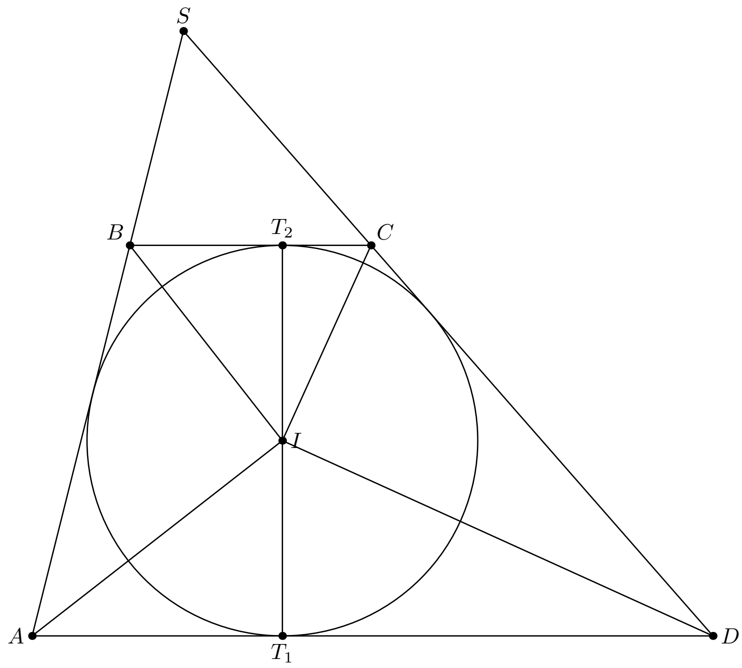

Рис. 24

Пусть M — середина AD. Тогда $AT_1 \cdot DT_1 = AM^2 - MT_1^2 = l_1^2/4$. Аналогично $BT_2 \cdot CT_2 = l_2^2/4$. Отсюда и из (3) получаем, что $h^2 = l_1 l_2$. Кроме того, так как основания пирамиды гомотетичны с центром S, то $(R_1^2 - O_1T_1^2)(R_2^2 - O_2T_2^2) = (R_1^2 - O_1T'^2_2)(R_2^2 - O_2T'^2_1)$. Поэтому, перемножив равенства (1) и (2), получим утверждение задачи.

Второе решение. Пусть $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ — данная пирамида, а прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в точке O. Будем считать, что $A_1B_1C_1$ — большее основание, т.е сфера ω, вписанная в $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$, является также вписанной сферой для тетраэдра $OA_1B_1C_1$ и вневписанной для $OA_2B_2C_2$.

Пусть k_1, k_2 — описанные окружности треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ соответственно. Заметим, что $R_1^2 - O_1T_1^2$ — это степень точки T_1 относительно k_1, аналогичное утверждение верно для $R_2^2 - O_2T_2^2$. Далее, если r — радиус ω, а плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны, то $h = 2r$. Таким образом, надо доказать, что $4r^2R_1R_2 = power(T_1, k_1) \cdot power(T_2, k_2)$. Перепишем это равенство как $4r^2/R_1R_2 = (power(T_1, k_1)/R_1^2) \cdot (power(T_2, k_2)/R_2^2)$.

Пусть r_O — радиус вневписанной сферы ω_O тетраэдра $OA_1B_1C_1$, противоположной вершине O, и ω_O касается плоскости $A_1B_1C_1$ в точке U. Гомотетия с центром O переводит $OA_2B_2C_2$ и ω в $OA_1B_1C_1$ и ω_O соответственно. Значит, $r/R_2 = r_O/R_1$ и $power(T_2, k_2)/R_2^2 = power(U, k_1)/R_1^2$.

Будем далее писать A, B, C, T, R, k вместо A_1, B_1, C_1, T_1, R_1, k_1. Тогда искомое равенство примет вид $4rr_O/R^2 = (power(T, k)/R^2) \cdot (power(U, k)/R^2)$ или $4rr_OR^2 = power(T, k) \cdot power(U, k)$.

(Здесь, $OABC$ — произвольный тетраэдр, k — описанная окружность треугольника ABC, R — ее радиус, r и r_O — радиусы вписанной и вневписанной сфер, T и U — точки касания этих сфер с гранью ABC.)

Пусть I, I_O — центры ω, ω_O соответственно, T_A, U_A — проекции T, U на прямую BC. Так как плоскости IBC и I_OBC делят пополам внутренний и внешний двугранные углы тетраэдра $OABC$ при ребре BC, то $\angle IT_AT + \angle I_OU_AU = \pi/2$. Значит, треугольники IT_AT и U_AI_OU подобны и $rr_O = TT_A \cdot UU_A$.

Определим аналогично точки T_B, U_B, T_C, U_C. Получаем $rr_O = TT_A \cdot UU_A = TT_B \cdot UU_B = TT_C \cdot UU_C$. Следовательно, точки T и U изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. (На самом деле, этот факт хорошо известен.)

Таким образом задача свелась к следующему планиметрическому утверждению. Пусть точки T, U изогонально сопряжены относительно треугольника ABC (и лежат внутри треугольника), T_A, U_A — их проекции на BC, k, R — описанная окружность треугольника ABC и ее радиус. Тогда $4TT_A \cdot UU_A \cdot R^2 = power(T, k) \cdot power(U, k)$.

Пусть BT и BU вторично пересекают k в точках V и W. Тогда $power(T, k) = BT \cdot TV$, $power(U, k) = BU \cdot UW$. Пусть VX — диаметр k. Тогда треугольники BTT_A и XVC подобны, значит, $BT \cdot CV = TT_A \cdot 2R$. Аналогично, $BU \cdot CW = UU_A \cdot 2R$. Поэтому $4TT_A \cdot UU_A \cdot R^2 = BT \cdot BU \cdot CV \cdot CW$ и остается доказать, что $CV \cdot CW = TV \cdot UW$.

Для этого рассмотрим треугольники CTV и CUW. Имеем $\angle CVT = \angle BVC = \angle A$. Аналогично, $\angle CWU = \angle BWC = \angle A$. С другой стороны, $\angle TCV + \angle UCW = (\angle ACT + \angle ACV) + (\angle ACU + \angle ACW) = (\angle ACT + \angle ACU) + (\angle ACV + \angle ACW) = \angle C + (\angle ABV + \angle ABW) = \angle B + \angle C$, здесь мы сначала использовали, что лучи CT и CU — изогональны относительно угла C, а затем то, что лучи BV и BW изогональны относительно угла B. Таким образом, $\angle TCV = \angle CUW$ и $\angle UCW = \angle CTV$. Следовательно, треугольники CTV и UCW подобны и $CV \cdot CW = TV \cdot UW$, ч.т.д.

Список литературы

[1] В.Протасов. Касающиеся окружности от Тебо до Фейербаха. "Квант" 2008, №4.

[2] "Математическое просвещние" 2017, №21. Решение задачи 13.5.