XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина. Решения
Финал. Первый день. 8 класс
Ратмино, 31 июля 2022 г.

1. (И.Кухарчук) Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $\angle BAD = 2\angle BCD$ и $AB = AD$. Пусть P — такая точка, что $ABCP$ — параллелограмм. Докажите, что $CP = DP$.

   Решение. Из условия следует, что точка A симметрична относительно BD центру O описанной около треугольника BCD окружности, т.е. $ABOD$ — ромб. Тогда отрезок OD равен и параллелен отрезку AB, а значит, и отрезку CP. Следовательно, $CODP$ — параллелограмм, а поскольку $OC = OD$, этот параллелограмм является ромбом, т.е. $CP = DP$ (рис. 8.1).

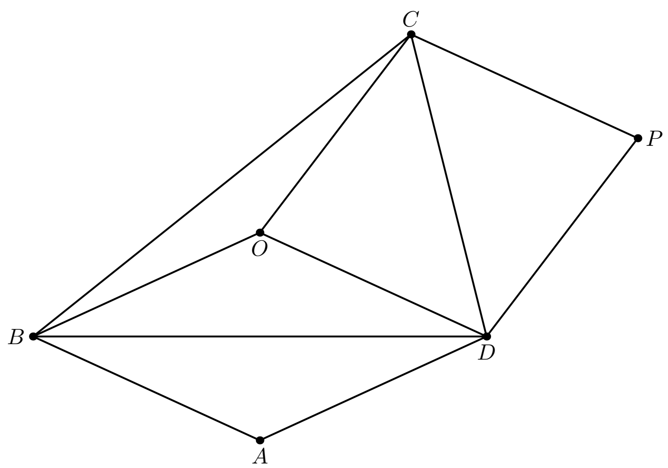

Рис. 8.1.

2. (А.Марданов) Точка M — середина большей боковой стороны CD прямоугольной трапеции $ABCD$. Описанные около треугольников BCM и AMD окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точке E. Пусть ED пересекает ω_1 в точке F, а FB пересекает AD в G. Докажите, что GM — биссектриса угла BGD.

   Решение. Заметим, что точка пересечения серединного перпендикуляра к CD и прямой AB лежит на обеих окружностях BCM и AMD и, значит, совпадает с точкой E. Поэтому $\angle CFD = \angle EBC = 90^\circ$ и $CM = FM = MD$. Также G, F, M, D лежат на одной окружности, потому что $\angle BGA = \angle GBC = \angle FMD$ (рис. 8.2). Значит GM — биссектриса угла BGD, так как $FM = MD$.

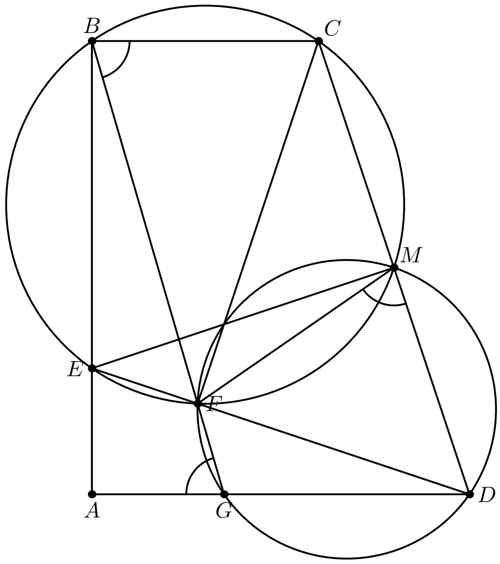

Рис. 8.2.

3. (D.Reznik, А.Заславский) Даны окружность ω и не лежащая на ней точка P. Пусть ABC — произвольный правильный треугольник, вписанный в ω, а точки A', B', C' — проекции P на прямые BC, CA, AB. Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников $A'B'C'$.

   Ответ. Середина отрезка OP, где O — центр данной окружности.

   Решение. Проведем через O прямые a, b, c, параллельные соответственно BC, CA, AB, и опустим на них перпендикуляры PA'', PB'', PC''. Заметим, что точки A'', B'', C'' лежат на окружности с диаметром OP и $\angle A''C''B'' = \angle A''PB'' = 60^\circ$ (рис. 8.3). Следовательно, треугольник $A''B''C''$ равносторонний и его центр тяжести совпадает с серединой OP. Центр тяжести треугольника $A'B'C'$ находится в той же точке, потому что сумма векторов $\overrightarrow{A'A''} + \overrightarrow{B'B''} + \overrightarrow{C'C''} = \overrightarrow{0}$.

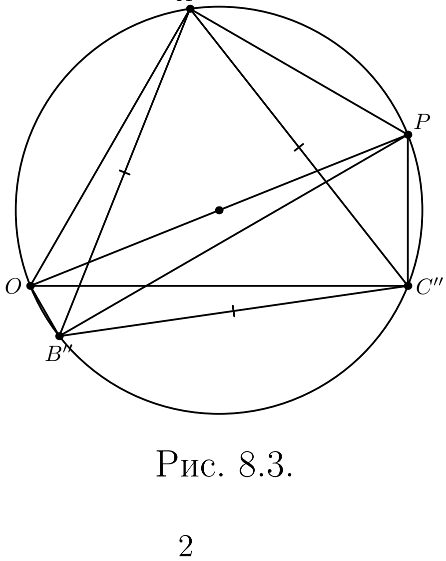

Рис. 8.3.

4. (А.Марданов) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Пусть P – точка пересечения его диагоналей, а точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Окружность OPM вторично пересекает отрезки AP и BP в точках A_1 и B_1 соответственно, а окружность OPN вторично пересекает отрезки CP и DP в точках C_1 и D_1 соответственно. Докажите, что площади четырёхугольников AA_1B_1B и CC_1D_1D равны.

Решение. Так как PM, PN — медианы подобных треугольников PAB и PDC, а OM, ON — серединные перпендикуляры к соответствующим сторонам этих треугольников, то $\angle PMO = \angle PNO$, а значит равны и радиусы двух окружностей. Тогда $\angle OA_1C_1 = \angle OC_1A_1$, следовательно, $OA_1 = OC_1$ и $AA_1 = CC_1$. Аналогично получаем, что $OB_1 = OD_1$ и $BB_1 = DD_1$. Пусть прямая, проходящая через P и перпендикулярная OP, пересекает AB и CD в точках M_1, N_1 соответственно. Так как $\angle OMM_1 = \angle ONN_1 = 90°$, эти точки лежат на окружностях OMP и ONP соответственно, причем $OM_1 = ON_1$. Тогда треугольники OM_1A_1 и ON_1C_1 равны по двум сторонам и углу, т.е. $A_1M_1 = C_1N_1$. Аналогично $B_1M_1 = D_1N_1$ и $A_1B_1 = C_1D_1$. Таким образом, треугольники $A_1B_1M_1$ и $C_1D_1N_1$ равны. Кроме того, высоты треугольников M_1BB_1 и N_1DD_1, опущенные на стороны BB_1 и DD_1, равны, потому что симметричны относительно P, а значит равны и площади этих треугольников (рис. 8.4). Аналогично равны площади треугольников M_1AA_1 и N_1CC_1. Отсюда, очевидно, следует искомое равенство площадей.

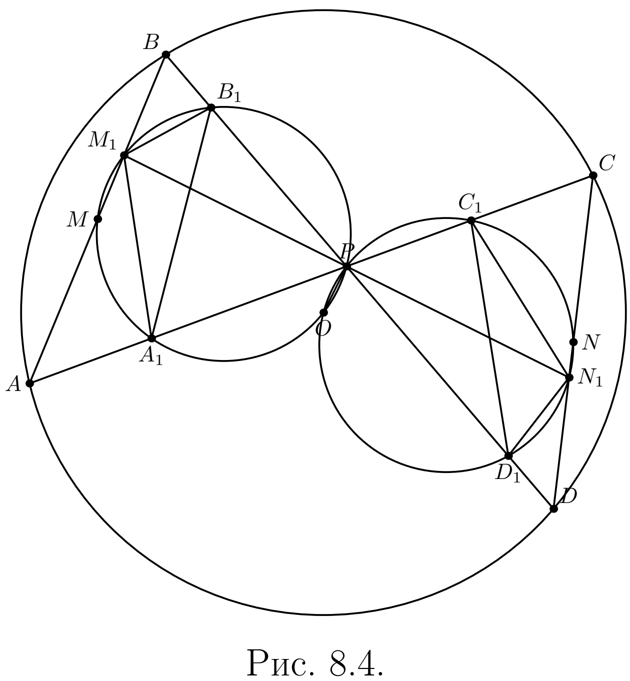

Рис. 8.4.

Примечание. Можно также получить равенство $OM_1 = ON_1$ из теоремы о бабочке, а затем вывести из него все остальные равенства отрезков.

XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина. Решения

Финал. Второй день. 8 класс

Ратмино, 1 августа 2022 г.

5. (Д.Швецов) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Пусть A' — точка, симметричная A_1 относительно прямой B_1C_1; аналогично определяется точка C'. Прямые $A'C_1$ и $C'A_1$ пересекаются в точке D. Докажите, что $BD \parallel AC$.

Решение. Из условия следует, что $\angle A'C_1B_1 = \angle A_1C_1B_1 = (180^\circ - \angle C)/2$, следовательно, $\angle DC_1A_1 = \angle C$. Аналогично получаем, что $\angle DA_1C_1 = \angle A$. Тогда $\angle C_1DA_1 = \angle B$. Значит, четырехугольник A_1BDC_1 вписанный и $\angle DBA = \angle DA_1C_1 = \angle BAC$, откуда следует утверждение задачи (рис. 8.5).

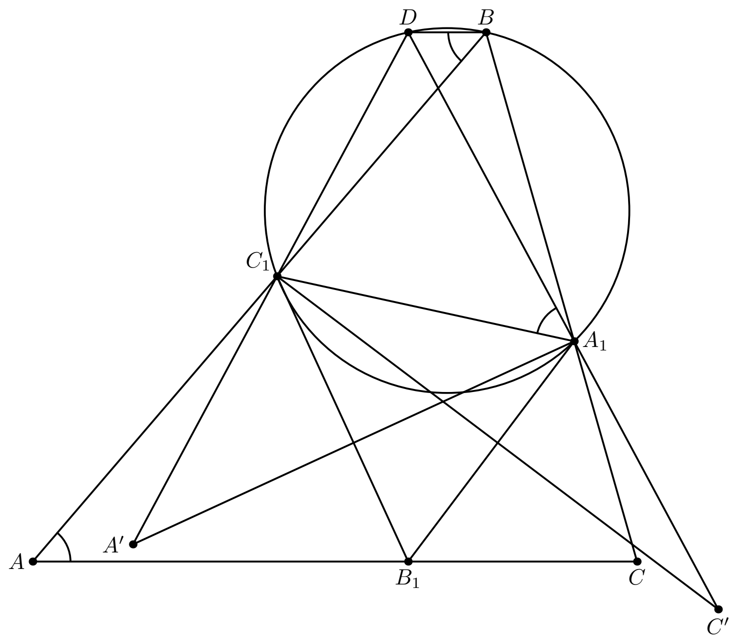

Рис. 8.5.

6. ($\boxed{\text{А.Бремзен}}$, А.Кулаков) Даны две окружности, пересекающиеся в точках A, B, и точка O, лежащая вне их. Циркулем и линейкой постройте такой луч с началом O, пересекающий первую окружность в точке C, а вторую — в точке D, чтобы отношение $OC : OD$ было максимальным.

Решение. Рассмотрим гомотетию с центром O и коэффициентом $OC : OD$. Она переводит вторую окружность ω_2 в некоторую окружность ω, проходящую через C. Если отношение $OC : OD$ максимально, то никакая окружность, гомотетичная ω с центром O и коэффициентом, большим 1, не пересекает первую окружность ω_1. Следовательно, ω касается ω_1 в точке C, т.е. касательные к ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно параллельны и прямая CD проходит через центр I внутренней гомотетии этих окружностей. Отсюда получаем искомое построение: точка C является дальней от O точкой пересечения ω_1 и прямой OI, а D — ближней к O точкой пересечения OI с ω_2 (рис. 8.5).

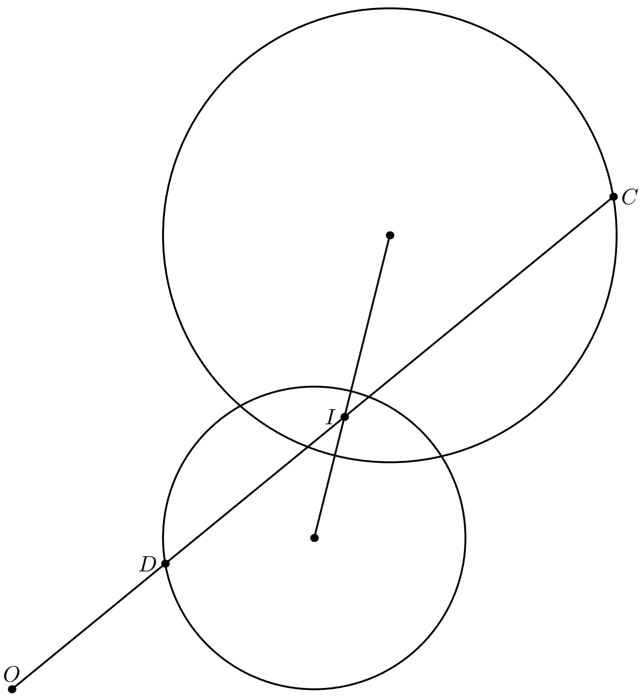

Рис. 8.6.

7. (А.Шаповалов) На плоскости даны десять точек таких, что любые четыре лежат на контуре некоторого квадрата. Верно ли, что все десять лежат на контуре некоторого квадрата?

Ответ. Нет.

Решение. Докажем, что вершины любого вписанного четырехугольника лежат на контуре некоторого квадрата. В вписанном четырехугольнике $ABCD$ найдутся два соседних неострых угла, пусть это углы A и B. Тогда проекции X, Y точек C, D соответственно на прямую AB лежат вне отрезка AB. Пусть $CX \leq DY$, тогда вершины четырехугольника лежат на контуре прямоугольника $XYDZ$, где Z — проекция D на прямую CX (рис. 8.7). Теперь, если $DY > DZ$, то продлим до нужной длины отрезки XY и ZD за точки Y и D соответственно, а, если $DY < DZ$, то продлим отрезки YD и XZ за точки D и Z.

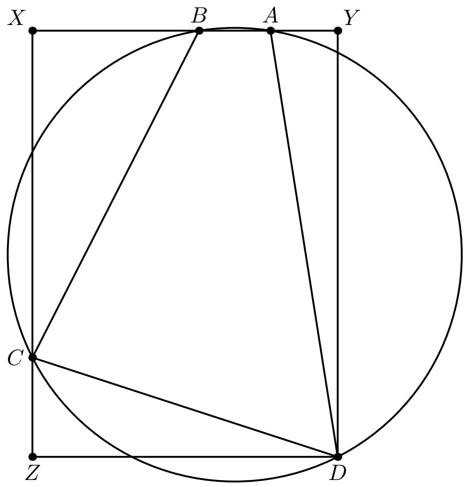

Рис. 8.7.

Рассмотрим теперь вписанный десятиугольник. Его вершины не могут лежать на контуре квадрата, так как любой такой контур имеет с окружностью не больше восьми общих точек. При этом, как показано выше, любые четыре вершины лежат на контуре некоторого квадрата.

8. (И.Кухарчук) Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AB = CD$). На описанной около нее окружности выбирается точка P так, что отрезок CP пересекает основание AD в точке Q. Пусть L — середина QD. Докажите, что длина диагонали трапеции не превосходит суммы расстояний от середин ее боковых сторон до любой точки прямой PL.

   Решение. Пусть E — середина стороны AB, F — середина стороны CD, G — середина CQ, E_1 — точка симметричная E относительно PL. Докажем, что $E_1F = AC$ (этого достаточно для решения задачи по известной лемме о минимуме суммы расстояний от двух точек до прямой). Для этого покажем равенство треугольников LE_1F и AGC. Действительно, $AG = EL = E_1L$ (первое равенство из равнобокой трапеции $AEGL$, второе в силу симметрии), $LF = QC/2 = GC$, $\angle PLE_1 = \angle ELP$. Далее, пятиугольник $PAEGL$ вписанный, поскольку $AEGL$ — равнобокая трапеция и $\angle APC = \angle ADC = \angle ALG$ (рис. 8.8). Значит, $\angle ELP = \angle EGP = \angle ALR$ (где R точка на продолжении FL за L) и $\angle RLE_1 = \angle ALE_1 - \angle ALR = \angle ALE_1 - \angle PLE_1 = \angle ALP = \angle AGP$. Откуда получаем, что $\angle E_1LF = \angle AGC$ и треугольники равны по углу и двум сторонам.

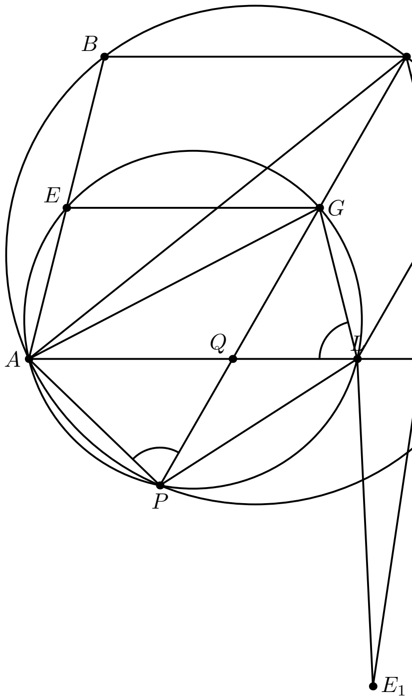

Рис. 8.8.

XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2022 г.

1. (Д.Швецов) Пусть BH — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$). Вневписанная окружность треугольника ABH, противолежащая вершине B, касается прямой AB в точке A_1; аналогично определяется точка C_1. Докажите, что $AC \parallel A_1C_1$.

   Решение. Отрезки BA_1, BC_1 равны полупериметрам треугольников ABH, BCH соответственно. Так как эти треугольники подобны, то $BA_1 : BC_1 = BA : BC$, откуда следует утверждение задачи.

2. (Л.Емельянов) Окружности s_1 и s_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проводятся всевозможные прямые, вторично пересекающие окружности в точках P_1 и P_2. Постройте циркулем и линейкой ту прямую, для которой $P_1A \cdot AP_2$ принимает наибольшее значение.

   Первое решение. Пусть X, Y — проекции точки A на прямые BP_1, BP_2. Так как углы AP_1B, AP_2B не зависят от выбора прямой, произведения $AP_1 \cdot AP_2$ и $AX \cdot AY$ принимают наибольшие значения одновременно. Поскольку точки X, Y лежат на окружности с диаметром AB, то угол XAY, а значит, и длина отрезка XY постоянны, следовательно, надо найти такое положение хорды XY, при котором расстояние от A до нее максимально. Так как все хорды XY касаются фиксированной окружности с центром в середине AB (рис. 9.2), максимальное расстояние достигается, когда точка касания находится на максимальном расстоянии от A. Построение соответствующей хорды очевидно.

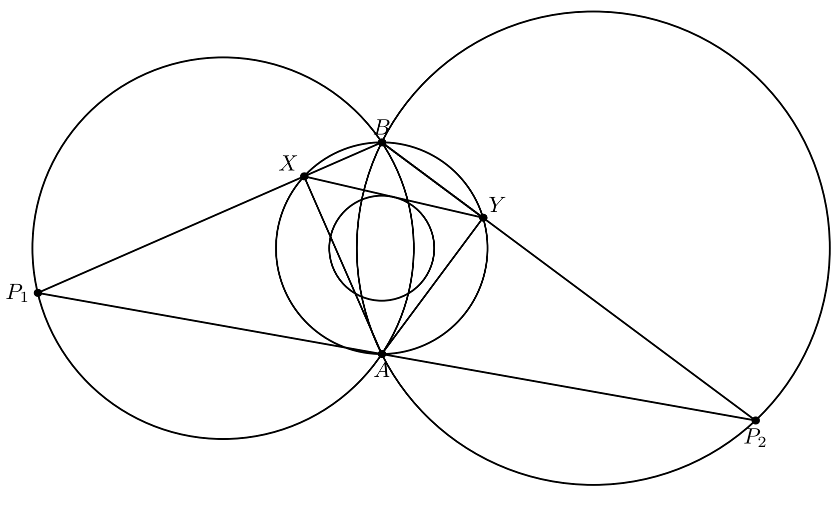

Рис. 9.2.

Так как концы построенной хорды можно обозначить через X и Y двумя способами, мы получаем два положения прямой P_1P_2. При одном из них BA является внутренней биссектрисой угла P_1BP_2, при другом — внешней. Если угол P_1BP_2 тупой, максимальное значение произведения $AP_1 \cdot AP_2$ достигается в первом случае, если острый, во втором. При $\angle P_1BP_2 = 90^\circ$ значения произведений равны.

Второе решение. После инверсии с центром A получаем следующую задачу:

Даны точка A и прямые ℓ_1 и ℓ_2. Нужно построить прямую, проходящую через A и пересекающую ℓ_1 и ℓ_2 в точках P_1 и P_2 так, что $P_1A \cdot AP_2$ минимально.

Зафиксируем ℓ_1 и применим к ℓ_2 гомотетию с центром A, после которой A будет равноудалена от ℓ_1 и ℓ_2. Все произведения $P_1A \cdot AP_2$ умножатся на одно и тоже число, поэтому искомая прямая не изменится. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке C, а перпендикуляр к CA в точке A пересекает ℓ_1 и ℓ_2 в точках Q_1 и Q_2 соответственно. Треугольник CQ_1Q_2 равнобедренный, а A — середина Q_1Q_2.

Докажем, что искомая прямая — это либо Q_1Q_2, либо AC. Пусть m — прямая через A, пересекающая ℓ_1 и ℓ_2 в точках P_1 и P_2 соответственно. Без ограничения общности есть два случая.

В первом P_1 лежит на отрезке CQ_1, а P_2 лежит на продолжении CQ_2 за точку Q_2. Поскольку $\angle P_1P_2Q_2 < \angle AQ_2C = \angle P_1Q_1Q_2$, то точка Q_1 лежит внутри окружности $(P_1P_2Q_2)$, а значит, $Q_1A \cdot AQ_2 < P_1A \cdot AP_2$.

Во втором случае P_1 лежит на отрезке CQ_1, а P_2 лежит на продолжении CQ_2 за точку C. Поскольку $\angle P_1P_2C < \angle P_1CA$, то окружность P_1CP_2 пересекает отрезок CA, а значит, $CA^2 < P_1A \cdot AP_2$.

Для построения искомой прямой нужно сделать циркулем и линейкой инверсию и гомотетию, выбрать из величин $Q_1A \cdot AQ_2$ и CA^2 наименьшую, и провести соответствующую прямую.

3. (А.Марданов) Средняя линия, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его описанную окружность в точках X и Y. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а D — середина дуги AC, не содержащей точку B. На отрезке DI отметили точку L такую, что $DL = BI/2$. Докажите, что из точек X и Y отрезок IL виден под равными углами.

Решение. Отразив X относительно биссектрисы угла B, получим точку X' на луче BY. Надо доказать, что четырехугольник $ILYX'$ — вписанный, т.е., что $BI \cdot BL = BX \cdot BY$. Заметим, что L — середина BI_B, где I_B — центр вневписанной окружности. Тогда нужно доказать, что $2BX \cdot BY = BI \cdot BI_B = AB \cdot BC$. Пусть X'' — точка пересечения AC и BX. Тогда треугольники $X''BA$ и CBY подобны, поскольку $\angle BX''A = \angle BXY = \angle BCY$ и $\angle XBA = \angle CBY$ (рис. 9.3), откуда получаем искомое равенство.

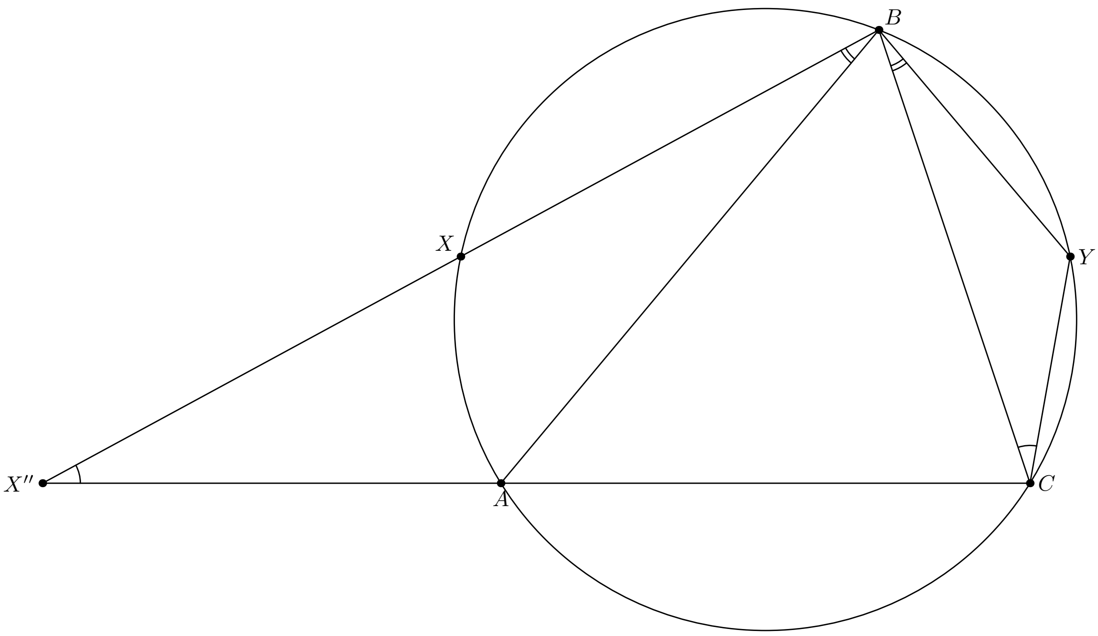

Рис. 9.3.

Примечание. Равенство $BI \cdot BL = BX \cdot BY$ можно также получить, применив композицию инверсии с центром B и симметрии относительно биссектрисы угла ABC, меняющей X и Y местами.

4. (Б.Яковлев) Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC$, P — середина меньшей дуги AB окружности ABC, Q — середина отрезка AC. Окружность с центром в O, описанная около APQ, вторично пересекает AB в точке K. Докажите, что прямые PO и KQ пересекаются на биссектрисе угла ABC.

   Решение. Пусть R, S — середины отрезка AB и меньшей дуги AC соответственно. Докажем, что прямые PO и KQ пересекаются на окружности $PRQS$.

   Поворотная гомотетия с центром P, переводящая окружность APQ в окружность ABC, переводит K в B, Q в C, а O в центр окружности

ABC, лежащий на прямой PR. Следовательно, угол OPR равен углу между прямыми KQ и BC, который равен углу KQR, т.е. точка пересечения PO и KQ лежит на окружности PQR.

Покажем теперь, что PO и биссектриса BS угла B также пересекаются на окружности $PRQS$. Поскольку $BS \parallel AP$ и $QS \perp AC$, то $\angle OPQ = |90^\circ - \angle QAP| = |90^\circ - \angle CTB| = \angle BSQ$, где T — точка пересечения BS и AC, т.е. четырехугольник, образованный прямыми PO, PQ, QS и BS, — вписанный.

Таким образом, прямые PO, KQ и BS пересекают окружность $PRQS$ в одной и той же точке (рис. 9.4).

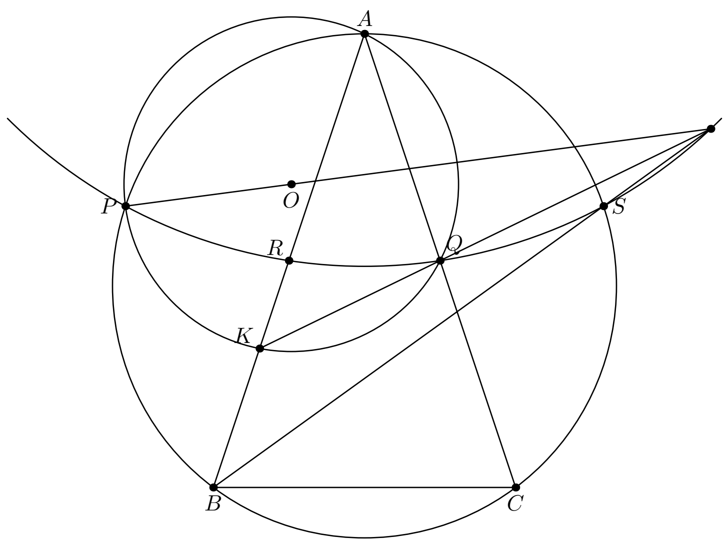

Рис. 9.4.

XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

Ратмино, 1 августа 2022 г.

5. (А.Марданов) Хорды AB и CD окружности ω пересекаются в точке E, причем $AD = AE = EB$. На отрезке CE отметили точку F, так что $ED = CF$. Биссектриса угла AFC пересекает дугу DAC в точке P. Докажите, что точки A, E, F и P лежат на одной окружности.

   Решение. Так как треугольник AED — равнобедренный, то и треугольник BCE — равнобедренный, а, поскольку $AD = BE$, $DF = CE = CB$ и $\angle ADF = \angle EBC$, то этот треугольник равен треугольнику AFD. Поэтому $PF \parallel AD$ и $\angle PFD = 180^\circ - \angle ADF = \angle AEF$, т.е. прямые AE и PF симметричны относительно серединного перпендикуляра к FE, то есть относительно диаметра окружности. Значит, точки P и A также симметричны относительно диаметра окружности, из чего делаем вывод, что $AEFP$ — равнобокая трапеция (рис. 9.5).

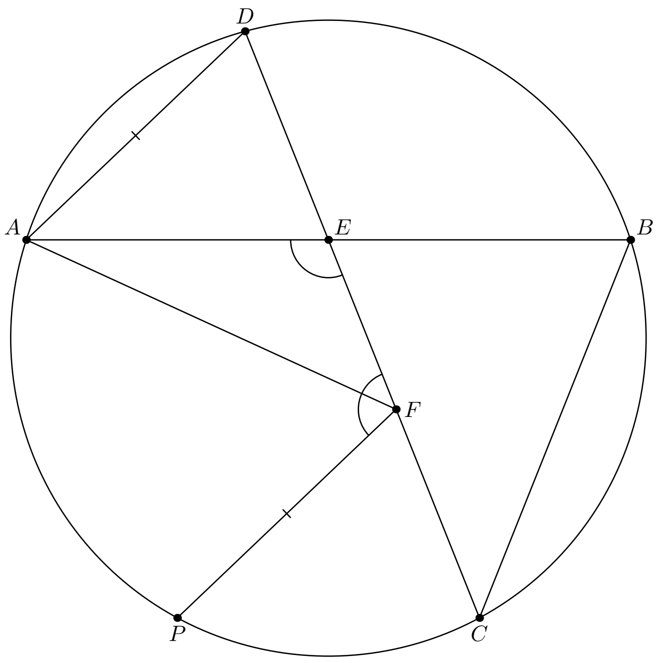

Рис. 9.5.

6. (Д.Бродский) Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) пересекаются в точке P. На отрезке AD нашлась такая точка Q, что $BQ = CQ$. Докажите, что линия центров окружностей,

описанных около треугольников AQC и BQD, перпендикулярна прямой PQ.

Решение. Пусть окружность AQC вторично пересекает прямую AP в точке X, а окружность BQD вторично пересекает прямую DP в точке Y. Тогда $\angle AXC = \angle CQD = \angle BQA = \angle BYD$. Следовательно, точки B, C, X, Y (а значит, и A, D, X, Y) лежат на одной окружности (рис. 9.6), т.е. $PX : PY = PC : PB = PD : PA$ и PQ — радикальная ось окружностей AQC и BQD.

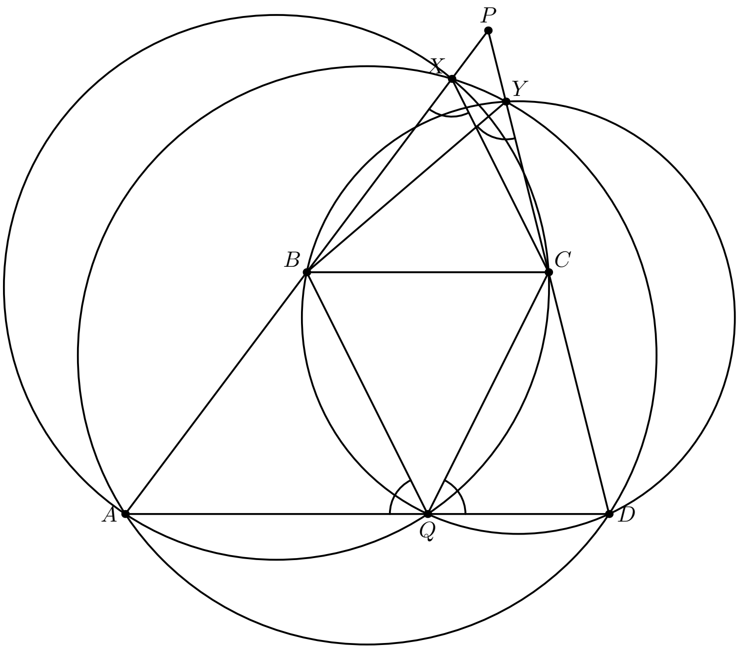

Рис. 9.6.

7. (И.Кухарчук) Пусть высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника AHC, пересекает отрезки AB и BC в точках P и Q. Прямая PQ пересекает AC в R. На прямой PH взята точка K такая, что $\angle KAC = 90°$. Докажите, что прямая KR перпендикулярна одной из медиан треугольника ABC.

Первое решение. Поскольку $\angle BPH = \angle ACH = \angle ABH$, то $PH = BH$. Аналогично $QH = BH$. Пусть L — точка пересечения прямой HQ и перпендикуляра к AC из точки C. Тогда $AK = KP = AP/2\sin A$ и $CL = LQ = CQ/2\sin C$. По теореме Менелая $AR : CR = (AP : BP)(BQ : CQ) = AK : CL$, следовательно точки K, L и R лежат на одной прямой (рис. 9.7).

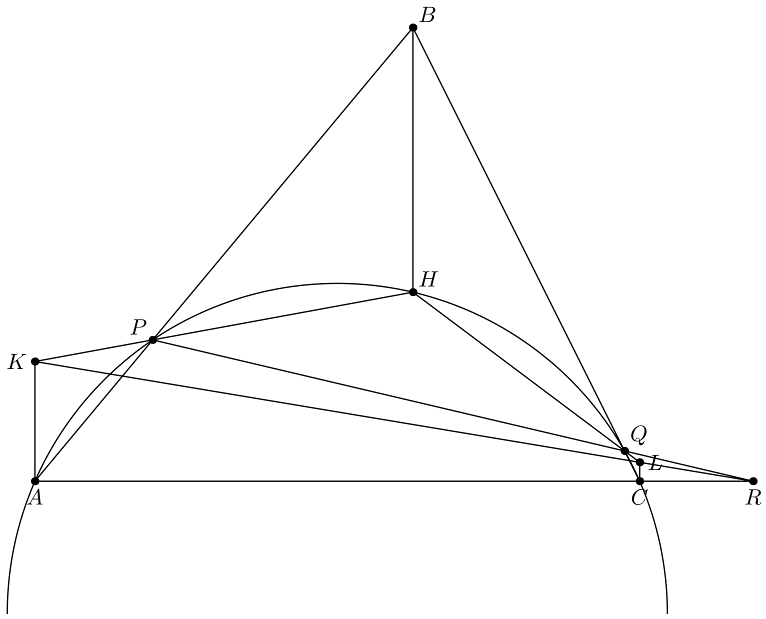

Рис. 9.7.

Заметим теперь, что

$$BK^2 - AK^2 = \left(\frac{AB + BP}{2}\right)^2 - \left(\frac{AB - BP}{2}\right)^2 = AB \cdot BP = BC \cdot BQ = BL^2 - CL^2,$$

поэтому, если M — середина AC, то $MK^2 - ML^2 = AK^2 - CL^2 = BK^2 - BL^2$, т.е. $BM \perp KL$.

Второе решение. Как показано в первом решении, H — центр окружности BPQ. Поэтому эта окружность касается окружностей ω_a и ω_c с центрами K, L и радиусами KA, LC соответственно. Тогда по теореме о трех гомотетиях R — центр внешней гомотетии окружностей ω_a и ω_c, т.е. R лежит на прямой KL.

Поскольку AP — общая хорда окружностей AHC и ω_a, а CQ — общая хорда окружностей AHC и ω_c, то B — радикальный центр этих трех окружностей. Кроме того, степени точки M относительно окружностей ω_a и ω_c равны, следовательно, BM — радикальная ось этих окружностей и $BM \perp KL$.

8. (Ф.Нилов) На плоскости провели несколько окружностей и отметили все точки их пересечения или касания. Может ли оказаться, что на каждой окружности лежат ровно пять отмеченных точек, а через каждую отмеченную точку проходят ровно пять окружностей?

Ответ. Да.

Решение. Для каждой вершины правильного икосаэдра построим окружность, проходящую через пять соседних с ней вершин. Очевидно, что все эти окружности лежат на описанной около икосаэдра сфере, через каждую вершину проходят ровно пять окружностей и любые две окружности либо не имеют общих точек, либо пересекаются по двум вершинам икосаэдра. Поэтому сделав стереографическую проекцию из любой точки, не лежащей на построенных окружностях, получим искомую конфигурацию.

Тот же пример можно построить несколько иначе.

Отметим 12 точек: вершины правильного пятиугольника $ABCDE$, его центр O, все пять точек пересечения диагоналей, и бесконечно удаленную точку. Если P — точка пересечения AC и BD, то $\angle APB = 72^\circ = \angle AOB$, поэтому точки A, B, O и P лежат на одной окружности. Проведем 12 линий: диагонали пятиугольника $ABCDE$, его описанную окружность, окружность через точки пересечения диагоналей, и окружности ABO, BCO, CDO, DEO, EAO (рис. 9.8). После инверсии с центром вне проведенных линий получаем пример к задаче.

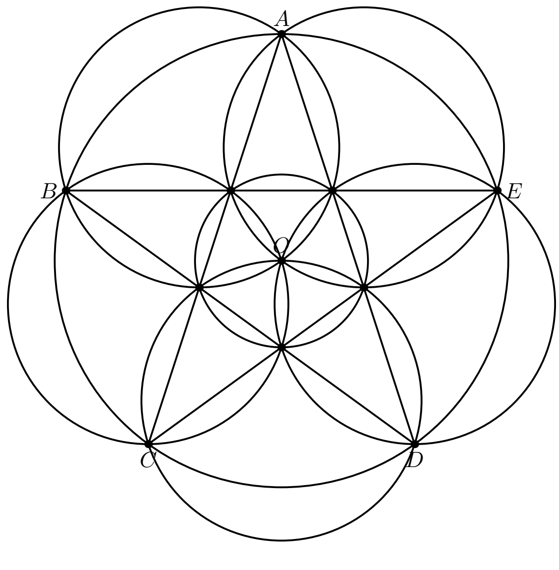

Рис. 9.8.

Примечание. Для любого $k = 2, 3, 4, 5$ можно построить конфигурацию из окружностей и всех их общих точек, в которой каждая окружность проходит ровно через k точек и каждая точка принадлежит ровно k окружностям. Существуют ли такие конфигурации для $k > 5$, неизвестно.

XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2022 г.

1. (Tran Quang Hung) Даны два одинаково ориентированных квадрата $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 пересекают серединные перпендикуляры к отрезкам A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_1B_1 в точках P, Q, R, S соответственно. Докажите, что $PR \perp QS$.

   Решение. Пусть O — центр поворотной гомотетии, переводящей один квадрат в другой, C_i — середины отрезков A_iB_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогда $C_1C_2C_3C_4$ — квадрат и $\angle OC_1P = \angle OC_2Q = \angle OC_3R = \angle OC_4S$, т.е. четырехугольники OC_1PC_2, OC_2QC_3, OC_3RC_4, OC_4SC_1 — вписанные. Пусть первая и третья окружности вторично пересекаются в точке U, а вторая и четвертая в точке V. Тогда по теореме о поворотной гомотетии PR проходит через U, QS — через V, а угол между прямыми PR и QS равен углу UOV. Но, очевидно, что $OU \parallel C_1C_2$ и $OV \parallel C_2C_3$, значит, $\angle UOV = \pi/2$.

   Примечание. Утверждение задачи остается верным при замене квадратов подобными, одинаково ориентированными прямоугольниками.

2. (А. Кузнецов) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Общие внешние касательные к окружностям ABC и ACD пересекаются в точке E, к окружностям ABD и BCD — в точке F. Докажите, что если точка F лежит на прямой AC, то точка E лежит на прямой BD.

   Решение. Точка F является центром внешней гомотетии окружностей ABD и BCD, а значит, и центром инверсии, переводящей эти окружности друг в друга. Эта инверсия оставляет точки B и D на месте, а точки A и C переставляет, следовательно, $AB = (BC \cdot FB)/FC$, $AD = (CD \cdot FD)/FC$ и $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Пусть теперь прямая EB пересекает дугу ADC в точке D'. Тогда аналогично получаем, что $AD' \cdot BC = CD' \cdot AB$. Поскольку на дуге ADC существует единственная точка с таким свойством, то D' совпадает с D и точки B, D, E лежат на одной прямой.

3. (Г.Челноков) Прямая пересекает отрезок AB в точке C. Какое максимальное число точек X может найтись на этой прямой так, чтобы один из углов AXC и BXC был в два раза больше другого?

Ответ. 4.

Оценка. Обозначим через ℓ прямую из условия (пересекающую отрезок AB в точке C). Покажем, что на прямой ℓ не может быть больше двух точек, для которых $\angle BXC = 2\angle AXC$.

Пусть точка F симметрична A относительно ℓ. Тогда XF — биссектриса угла BXC. Построим окружность с центром F, касающуюся ℓ. Прямая XB также касается этой окружности, откуда и следует нужное утверждение.

Пример. Рассмотрим треугольник X_1AB, в котором медиана X_1C образует со сторонами углы $\angle AX_1C = 40°$, $\angle BX_1C = 80°$. Пусть X_2 — такая точка на отрезке X_1C, что $\angle X_1BX_2 = 20°$. Покажем, что $\angle X_1AX_2 = 10°$. Тогда X_1, X_2 и точки, симметричные им относительно C, образуют искомую четверку.

Опустим перпендикуляры AK, BH на прямую X_1X_2. Покажем, что $KA^2 = KX_1 \cdot KX_2$. Так как треугольники AKC и BHC равны, это равносильно легко проверяемому равенству

$$(AX_1 \sin 40°)^2 = AX_1 \cos 40°(AX_1 \cos 40° - 2AX_1 \sin 40° \mathrm{tg} 10°).$$

Из доказанного равенства следует, что окружность AX_1X_2 касается прямой AK, т.е. $\angle X_2AK = \angle AX_1K = 40°$, $\angle X_1AX_2 = 10°$, $\angle AX_2C = 50°$ и $\angle BX_2C = 100°$.

4. (А.Матвеев, И.Фролов) Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $\angle B = \angle D$. Докажите, что середина диагонали BD лежит на общей внутренней касательной к окружностям, вписанным в треугольники ABC и ACD.

Решение. Пусть M, N C_1, A_1 — середины AC, BD, AB, BC соответственно. Так как $\angle A_1NC_1 = \angle D = \angle B = \angle A_1MC_1$, точка N лежит на окружности A_1MC_1, которая по теореме Фейербаха касается вписанной в треугольник ABC окружности ω_1. Поэтому, применяя к точкам A_1, C_1, N и ω_1 теорему Кези, можно найти длину x касательной из N к ω_1. Например, для конфигурации на рис. 10.4 имеем

$$x\frac{AC}{2} = \frac{CD}{2} \cdot \frac{AC - BC}{2} + \frac{AD}{2} \cdot \frac{AB - AC}{2}.$$

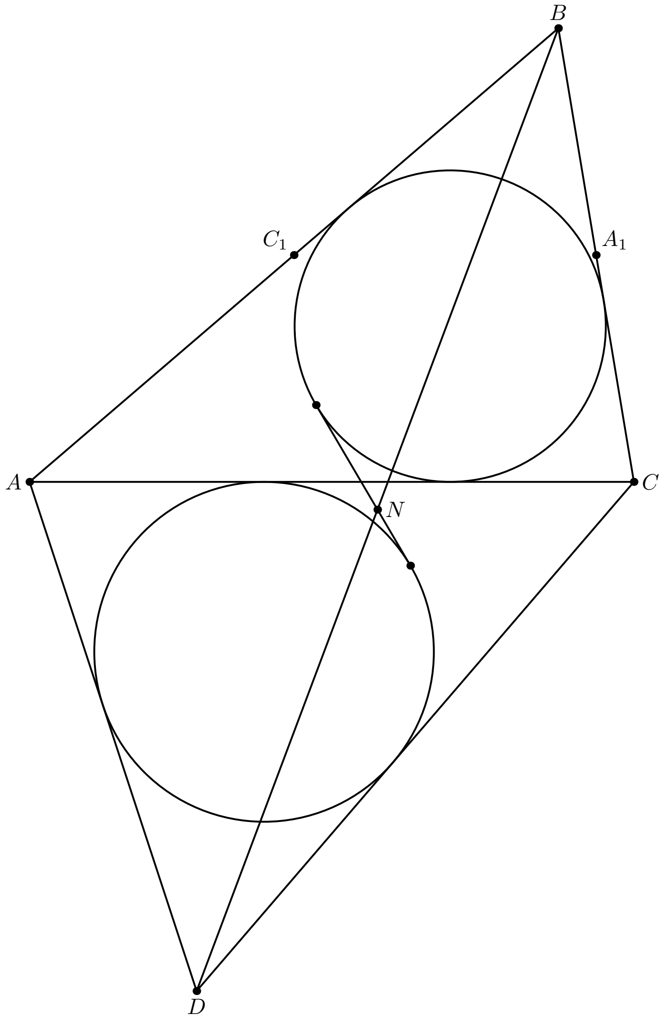

Рис. 10.4.

Аналогично для длины y касательной из N к вписанной в треугольник ACD окружности ω_2 имеем

$$y\frac{AC}{2} = \frac{AB}{2} \cdot \frac{CD - AC}{2} + \frac{BC}{2} \cdot \frac{AC - AD}{2}.$$

Складывая эти равенства, получаем, что $x+y = (AB+CD-AD-BC)/2$, что равно длине общей внутренней касательной к ω_1 и ω_2, следовательно, точка N лежит на такой касательной. Для других конфигураций решение аналогично.

XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 1 августа 2022 г.

5. (А.Марданов, К.Струихина) Из точки A к окружности Ω проведены касательные AB и AC. На отрезке BC отмечена середина M и произвольная точка P. Прямая AP пересекает окружность Ω в точках D и E. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям MDP и MPE пересекаются на средней линии треугольника ABC.

   Решение. Пусть K — середина AP. Так как K — центр описанной окружности треугольника APM, то $KP = KM$, т.е. K лежит на линии центров окружностей MDP и MPE. При этом, поскольку точки A, P, D и E образуют гармоническую четверку, то $KP^2 = KD \cdot KE$. Значит, K — центр внешней гомотетии этих окружностей (рис.10.5).

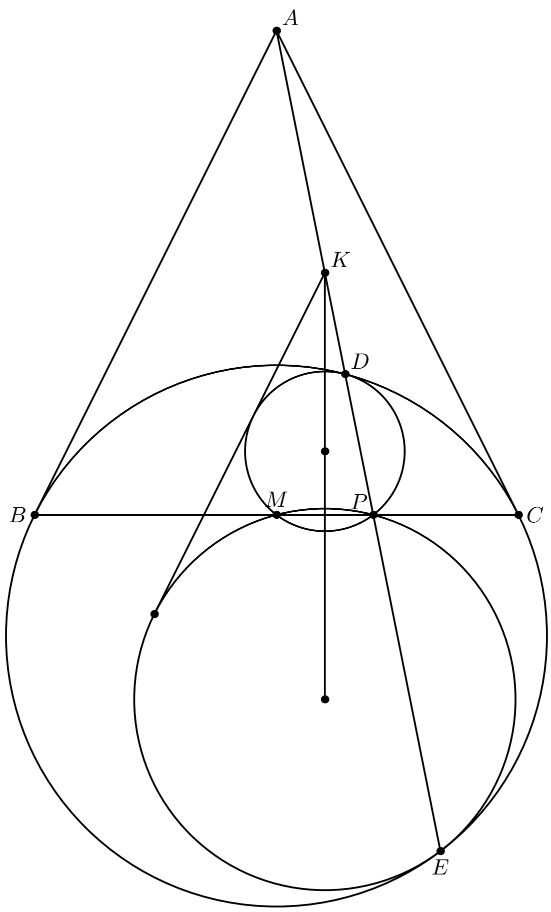

Рис. 10.5.

6. (Д.Бродский) В остроугольном треугольнике ABC точки O, I — центры описанной и вписанной окружностей, P — произвольная точка на

отрезке OI, точки P_A, P_B и P_C — вторые точки пересечения прямых PA, PB и PC с окружностью ABC. Докажите. что биссектрисы углов BP_AC, CP_BA и AP_CB пересекаются в одной точке, лежащей на прямой OI.

Решение. Заметим, что для любой точки P биссектриса угла BP_AC вторично пересекает описанную окружность в фиксированной точке — середине дуги BAC. Поэтому точка пересечения биссектрисы с прямой OI проективно зависит от P. Это же верно для точек пересечения OI с биссектрисами углов CP_BA и AP_CB. При этом, когда P совпадает с I, все три биссектрисы проходят через O, а когда P является одной из точек пересечения прямой OI с окружностью, биссектрисы пересекают OI в той же точке. Значит, для любого положения точки P все биссектрисы пересекают OI в одной и той же точке.

7. (Ф.Нилов) На плоскости провели несколько окружностей и отметили все точки их пересечения или касания. Может ли оказаться, что на каждой окружности лежат ровно четыре отмеченных точки, а через каждую отмеченную точку проходят ровно четыре окружности?

Ответ. Да.

Решение. Возьмем квадрат $ABCD$ с центром O, его описанную и вписанную окружности, а также четыре окружности с диаметрами OA, OB, OC, OD (рис.10.7). Сделав инверсию с центром в произвольной точке плоскости, не лежащей на этих шести окружностях и прямых AB, BC, CD, DA, получим десять окружностей, пересекающихся или касающихся в десяти точках — образах середин сторон квадрата, точек A, B, C, D, O и центре инверсии. Легко видеть, что условие задачи выполнено.

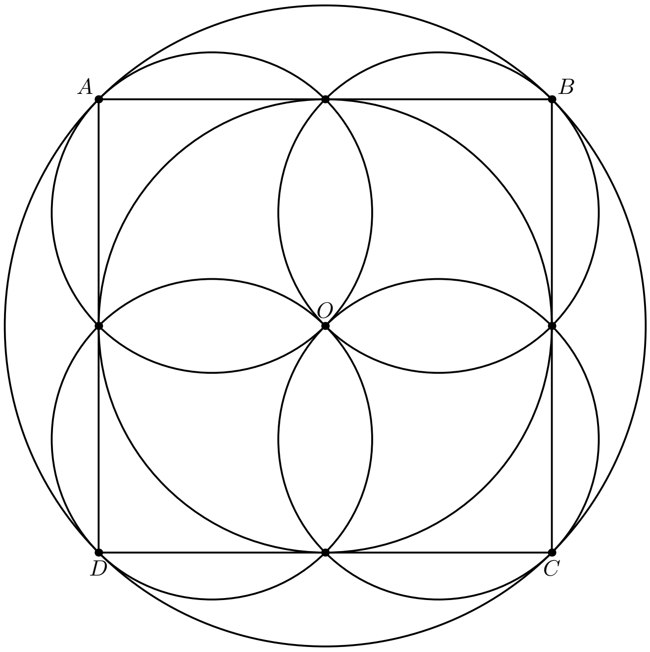

Рис. 10.7.

Примечание. Для любого $k = 2, 3, 4, 5$ можно построить конфигурацию из окружностей и всех их общих точек, в которой каждая окружность проходит ровно через k точек и каждая точка принадлежит ровно k окружностям. Существуют ли такие конфигурации для $k > 5$, неизвестно.

8. (А.Эрднигор) Дан центрально-симметричный октаэдр $ABCA'B'C'$ (пары A и A', B и B', C и C' противоположны), такой, что суммы плоских углов при каждой из вершин октаэдра равны $240°$. В треугольниках ABC и $A'BC$ отмечены точки Торричелли T_1 и T_2. Докажите, что расстояния от T_1 и T_2 до BC равны.

Решение. Пусть D — вершина параллелограмма $AB'CD$. Тогда грани тетраэдра $ABCD$ равны граням октаэдра и суммы четырех углов, под которыми видны два противоположных ребра тетраэдра (например, $\angle CAD + \angle CBD + \angle ACB + \angle ADB$) равны $240°$. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки касания вписанной в тетраэдр сферы с гранями BCD, CDA, DAB, ABC соответственно. Тогда треугольники A_1BC и D_1BC равны, как и пять аналогичных пар треугольников. Следовательно, $\angle BD_1C + \angle BA_1C = \angle BAC + \angle ABD_1 + \angle ACD_1 + \angle BDC + \angle DCA_1 + \angle DBA_1 = \angle BAC + \angle BDC + \angle ABC_1 + \angle ACB_1 + \angle DCB_1 + \angle DBC_1 = 240°$ и $\angle BD_1C = \angle BA_1C = 120°$. Аналогично $\angle AD_1B = \angle AD_1C = \angle BA_1C = \angle BA_1D = 120°$, т.е. точки A_1, D_1 совпадают с точками Торричелли, откуда, очевидно, следует утверждение задачи.

Примечание. Тетраэдры, у которых точки Торричелли граней совпадают с точками касания вписанной сферы, называются *изогональными* или *жергонновыми*. Известно, что в таких тетраэдрах отрезки, соединяющие вершины с точками Торричелли противоположных граней, пересекаются в одной точке, а произведения косинусов половин двугранных углов при противоположных ребрах равны. Утверждение задачи дает еще одно характеристическое свойство жергонновых тетраэдров.