Восемнадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Восемнадцатой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

Задачи олимпиады рассчитаны на учащихся последних четырёх классов средней школы. В списке, приведённом ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса (на момент старта заочного тура) решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решённые задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого её пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. За полное решение обоих пунктов задачи 14 участник из младшего класса (в российской школе — не старше 9) получает 12 баллов. (Участник из более старшего класса получает баллы только за пункт 14б.)

Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. **Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением**. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто сослаться на него (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме **не раньше 1 декабря 2021 и не позднее 1 марта 2022 года**. Для этого нужно зайти на сайт **https://contest.yandex.ru/geomshar/**, справа наверху указать язык (русский) и следовать появляющимся инструкциям.

ВНИМАНИЕ:

1. Решение каждой задачи (и каждого её пункта, если задача имеет пункты) должно содержаться в **отдельном** файле формата pdf, doc, docx или jpg. Если решение состоит из нескольких файлов, то нужно создать из них **архив** (zip или rar) и загрузить его.

2. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. **Во всех случаях необходимо убедиться перед отправкой, что файл хорошо читается**.

3. Если несколько раз загружается решение одной и той же задачи, то в системе проверки остается только последнее. **Поэтому при необходимости что-то изменить Вам следует снова загрузить решение задачи полностью.**

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomshar@yandex.ru. (НЕ присылайте работы на этот адрес!)**

Финальный тур состоится летом 2022 года под Москвой. На него будут приглашены победители заочного тура, не закончившие к этому времени школу. Критерии прохождения на финал определяются после проверки работ заочного тура в зависимости от количества участников с тем или иным результатом. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** к 1 июня 2022 г. Свои результаты Вы сможете узнать по адресу **geomshar@yandex.ru** после публикации списков.

1. (8) В треугольнике ABC точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. Известно, что BH — биссектриса угла ABO. Отрезок из точки O, параллельный стороне AB, пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AH = AK$.

2. (8) Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников AID и CID. Докажите, что центр описанной окружности треугольника O_1IO_2 лежит на биссектрисе угла B четырёхугольника.

3. (8) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. На отрезках AD и CD построены равносторонние треугольники AED и CFD, так что точка E лежит в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и C, а точка F лежит в той же полуплоскости относительно прямой CD, что и B. Прямая EF пересекает катет AC в точке L. Докажите, что $FL = CL + LD$.

4. (8) Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC; A_2 — точка касания вписанной окружности треугольника AB_1C_1 со стороной B_1C_1; аналогично определяются точки B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

5. (8) Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная PD, пересекает прямую AD в точке D_1; аналогично определяется точка A_1. Докажите, что касательная, проведенная в точке P к описанной окружности треугольника D_1PA_1, параллельна прямой BC.

6. (8–9) Вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC касаются отрезка AC в точках P и Q соответственно. Прямые BP и BQ вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P' и Q' соответственно. Докажите, что $PP' > QQ'$.

7. (8–9) На стороне AC треугольника ABC во внешнюю сторону был построен квадрат с центром F. Затем всё стёрли, кроме точки F и середин N, K сторон BC, AB соответственно. Восстановите треугольник.

8. (8–9) На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно так, что $AP = PR$, $CQ = QR$. Точка H — ортоцентр треугольника PQR, точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $OH \parallel AC$.

9. (8–9) Стороны AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ касаются окружности с центром I в точках K, L, M и N соответственно. На прямой AI выбрана произвольная точка P. Прямая PK пересекает прямую BI в точке Q. Прямая QL пересекает прямую CI в точке R. Прямая RM пересекает прямую DI в точке S. Докажите, что точки P, N и S лежат на одной прямой.

10. (8–9) Треугольник ABC вписан в окружность ω_1 с центром O. Окружность ω_2 касается сторон AB, AC и касается дуги $\overset{\frown}{BC}$ описанной окружности в точке K. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямая OI содержит симедиану треугольника AIK.

11. (8–10) В треугольнике ABC $\angle A = 60°$, точка T такова, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC$. Окружность, проходящая через точки B, C и T, повторно пересекает прямые AB и AC в точках K и L. Докажите, что точки K и L равноудалены от прямой AT.

12. (8–11) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N — середины сторон BC, CD, DA, AB соответственно. Отрезки AK, BL, CM, DN, пересекаясь, делят друг друга на три части. Оказалось, что отношение длины средней части к длине всего отрезка одно и то же для всех четырёх отрезков. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм?

13. (8–11) На плоскости даны восемь точек общего положения. В ряд выписали площади всех 56 треугольников с вершинами в этих точках. Докажите, что между выписанными числами можно поставить знаки "$+$" и "$-$" так, чтобы полученное выражение равнялось нулю.

14. Дан треугольник ABC. Прямая AB касается его вписанной окружности в точке C', а вневписанной, касающейся стороны BC, — в точке C'_a. Аналогично определяются точки C'_b, C'_c, A', A'_a, A'_b, A'_c, B', B'_a, B'_b, B'_c. Рассмотрим длины 12 отрезков — высот треугольников $A'B'C'$, $A'_aB'_aC'_a$, $A'_bB'_bC'_b$, $A'_cB'_cC'_c$.

    a) (8–9) Какое наибольшее число различных может быть среди них?

    b) (10–11) Найдите все возможные количества различных длин.

15. (9–11) Прямая ℓ, параллельная стороне BC треугольника ABC, касается его вписанной окружности и пересекает его описанную окружность в точках D и E. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $AI^2 = AD \cdot AE$.

16. (9–11) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Пусть $E = AC \cap BD$, $F = AD \cap BC$. Биссектрисы углов AFB и AEB пересекают CD в точках X, Y. Докажите, что точки A, B, X, Y лежат на одной окружности.

17. (9–11) В треугольнике ABC выбрана точка P. Лучи с началом в точке P, пересекающие под прямым углом стороны BC, AC, AB, пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Оказалось, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке Q. Докажите, что все такие прямые PQ пересекаются в одной точке.

18. (10–11) Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ произведения противоположных сторон равны. Точка B' симметрична B относительно прямой AC. Докажите, что окружность, проходящая через точки A, B', D, касается прямой AC.

19. (10–11) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а K — точка пересечения BC с внешней биссектрисой угла A. Прямая KI пересекает внешние биссектрисы углов B и C в точках X и Y. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

20. (10–11) Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC; R, r — их радиусы; D — точка касания вписанной окружности со стороной BC; N — произвольная точка на отрезке ID. Перпендикуляр к ID в точке N пересекает описанную окружность ABC в точках X и Y. Пусть O_1 — центр описанной окружности XIY. Найдите произведение $OO_1 \cdot IN$.

21. (10–11) Во вписанно-описанном четырёхугольнике отметили центры O, I описанной и вписанной окружностей и середину M одной из диагоналей, после чего сам четырёхугольник стерли. Восстановите его.

22. (10–11) В окружности Ω хорды A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 пересекаются в точке O. Пусть B_i — вторая точка пересечения окружности Ω с окружностью, построенной на отрезке OA_i как на диаметре. Докажите, что хорды B_1B_2, B_3B_4, B_5B_6 пересекаются в одной точке.

23. (10–11) Дан эллипс с фокусом F. Две перпендикулярные прямые, проходящие через F, пересекают эллипс в четырёх точках. Касательные к эллипсу в этих точках образуют описанный вокруг эллипса четырёхугольник. Докажите, что этот четырёхугольник вписан в конику с фокусом F.

24. (11) Пусть $OABCDEF$ — шестигранная пирамида с основанием $ABCDEF$, описанная около сферы ω. Плоскость, проходящая через точки касания ω с гранями OFA, OAB и $ABCDEF$, пересекает ребро OA в точке A_1; аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1. Пусть ℓ, m и n — прямые A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1 соответственно. Оказалось, что ℓ и m лежат в одной плоскости, m и n также лежат в одной плоскости. Докажите, что ℓ и n лежат в одной плоскости.