Восемнадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Н.Москвитин, 8) В треугольнике ABC точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. Известно, что BH — биссектриса угла ABO. Отрезок из точки O, параллельный стороне AB, пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AH = AK$.

   Решение. Пусть D — точка, симметричная H относительно AC. Так как D лежит на описанной окружности треугольника ABC, то $\angle ODB = \angle OBD = \angle HBA$. Следовательно, $OD \parallel AB$, т.е. K лежит на OD и $\angle HKA = \angle OKC = \angle BAC$ (рис. 1). С другой стороны, $\angle CBO = \angle HBA = 90° - \angle A$, значит, $\angle ABC = 3(90° - \angle BAC)$, $\angle ACB = 2\angle BAC - 90°$ и $\angle HAK = 180° - 2\angle BAC$. Поэтому $\angle AHK = \angle BAC = \angle AKH$ и $AK = AH$.

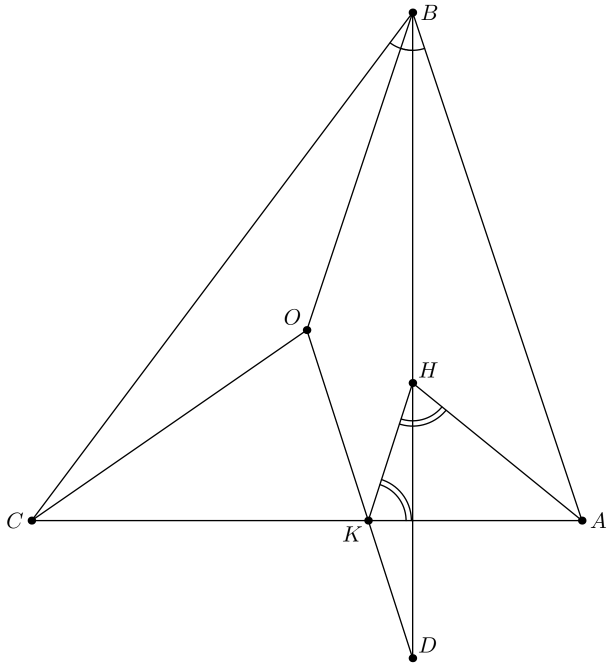

Рис. 1.

2. (А.Салимова, 8) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников AID и CID. Докажите, что центр описанной окружности треугольника O_1IO_2 лежит на биссектрисе угла B четырехугольника.

   Решение. Заметим, что O_1O_2 — серединный перпендикуляр к отрезку DI, $\angle IO_1O_2 = \angle IAD$, $\angle IO_2O_1 = \angle ICD$. Поэтому для центра O окружности IO_1O_2 выполнено $\angle OIO_1 = 90° - \angle ICD$. С другой стороны, $\angle O_1IA = 90° - \angle IDA$ и $\angle BIO_1 = 180° - \angle IAB - \angle IBA + 90° - \angle IDA = 90° + \angle ICD$. Следовательно, точки B, I, O лежат на одной прямой — биссектрисе угла B (рис. 2).

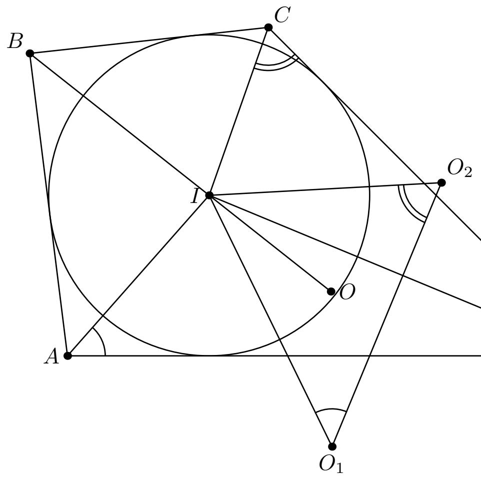

Рис. 2.

3. (Н.Москвитин, 8) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD. На отрезках AD и CD построены равносторонние треугольники AED и CFD, так что точка E лежит в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и C, а точка F лежит в той же полуплоскости относительно прямой CD, что и B. Прямая EF пересекает катет AC в точке L. Докажите, что $FL = CL + LD$.

Решение. Из условия следует, что $FD = CD$, $DE = AD$ и $\angle FDE = \angle CDA$. Следовательно, треугольники FDE и CDA равны и $\angle FLC = 60°$. Отложим на луче LC отрезок $LK = LF$. Так как треугольник LFK равносторонний, то $FK = FL$ и $\angle KFL = \angle CFD = 60°$. Следовательно, $\angle KFC = \angle DFL$, т.е. треугольники KFC и LFD равны (рис. 3). Таким образом, $KC = LD$, что равносильно утверждению задачи.

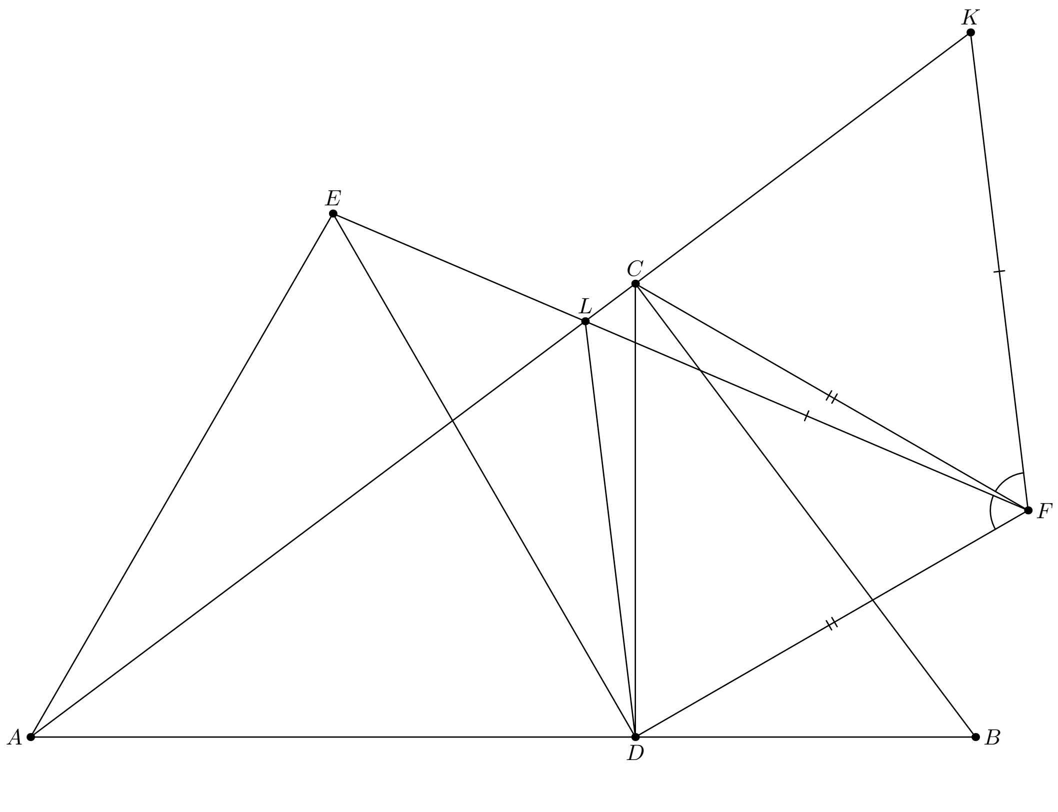

Рис. 3.

Примечание. Утверждение задачи остается верным, если взять любой треугольник ABC и любую точку D на стороне AB.

4. (Д.Швецов, 8) Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC; A_2 — точка касания вписанной окружности треугольника AB_1C_1 со стороной B_1C_1; аналогично определяются точки B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

   Решение. Так как треугольники AB_1C_1 и ABC подобны, $B_1A_2 : A_2C_1 = (p-b) : (p-c)$, где a, b, c, p — длины сторон и полупериметр треугольника ABC. Аналогично получаем, что $C_1B_2 : B_2A_1 = (p-c) : (p-a)$ и $A_1C_2 : C_2B_1 = (p-a) : (p-b)$. Из теоремы Чевы получаем утверждение задачи.

5. (Д.Швецов, 8) Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная PD, пересекает прямую AD в точке D_1; аналогично определяется точка A_1. Докажите, что касательная, проведенная в точке P к описанной окружности треугольника D_1PA_1, параллельна прямой BC.

   Решение. Пусть MN — касательная. Тогда $\angle NPD = 90° - \angle MPD_1 = 90° - \angle PA_1A = \angle PAD = \angle PBC$ (рис.5), что влечет утверждение задачи.

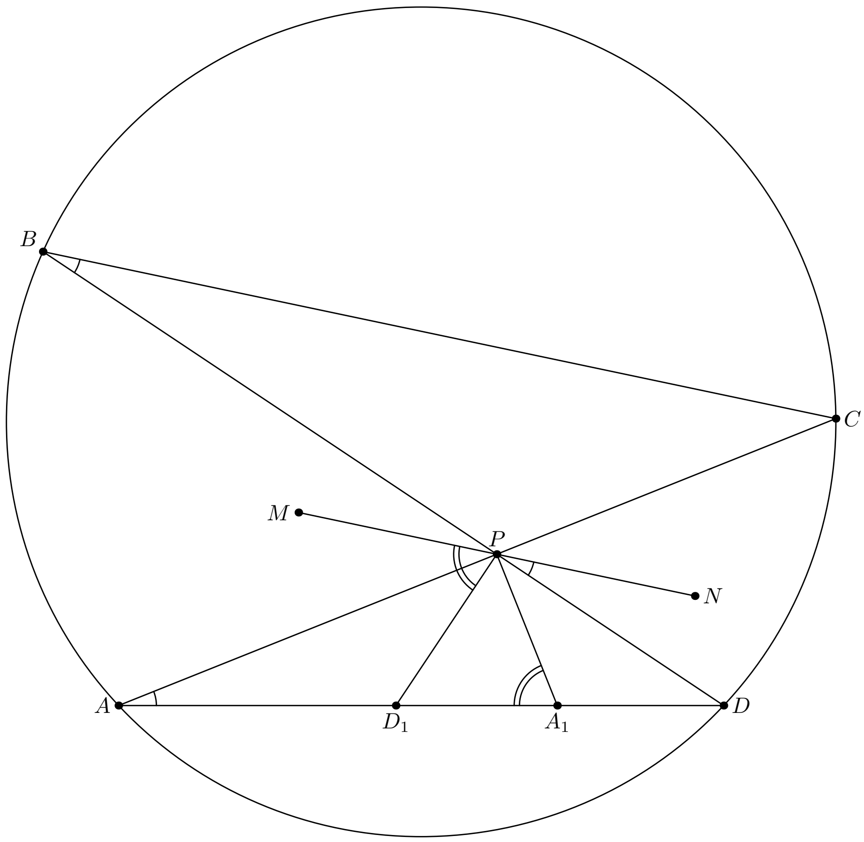

Рис. 5.

6. (Ф.Ивлев, 8–9) Вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC касаются отрезка AC в точках P и Q соответственно. Прямые BP и BQ вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P' и Q' соответственно. Докажите, что $PP' > QQ'$.

Решение. Так как $CP = AQ$, то $BP \cdot PP' = AP \cdot PC = BQ \cdot QQ'$. Но, поскольку $|AP - CP| = |AB - CB| < |(AB^2 - CB^2)/AC|$, точка P лежит между серединой стороны AC и основанием опущенной на эту сторону высоты (рис. 6). Следовательно, $BP < BQ$ и $PP' > QQ'$.

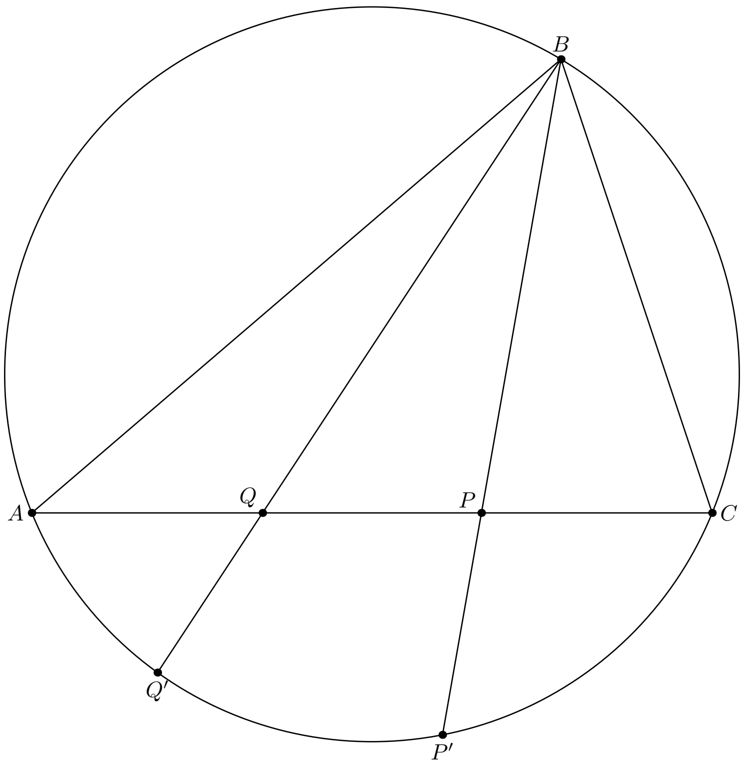

Рис. 6.

7. (Г.Филипповский, 8–9) На стороне AC треугольника ABC во внешнюю сторону был построен квадрат с центром F. Затем всё стерли, кроме точки F и середин N, K сторон BC, AB соответственно. Восстановите треугольник.

Решение. Пусть M — середина AC. Тогда $FM = AC/2 = KN$ и $FM \perp KN$. Это позволяет построить точку M, а затем восстановить треугольник ABC по серединам его сторон.

8. (И.Фролов, 8–9) На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно так, что $AP = PR$, $CQ = QR$. Точка H — ортоцентр треугольника PQR, точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $OH \parallel AC$.

Решение. Так как $\angle ARP = \angle BAC$, $\angle CRQ = \angle BCA$, то $\angle PRQ = \angle ABC$ и $\angle PHQ = 180° - \angle ABC$, т.е. точки B, P, Q, H лежат на одной окружности. Кроме того, проекции точек P, Q на AC являются серединами отрезков AR, CR, поэтому расстояние между ними равно половине AC. Пусть M, N — середины сторон AB, BC соответственно. Так как проекции отрезков PM и QN на AC равны, то $PM : QN = \cos\angle ACB : \cos\angle BAC = OM : ON$. Следовательно, треугольники OPM и OQN подобны, т.е. $\angle POQ = \angle MON = \angle PHQ$. Таким образом, точка O также лежит на окружности $BPHQ$ (рис. 8), поэтому $\angle BOH = \angle BQH = 90^\circ + \angle BCA - \angle BAC$, что равносильно утверждению задачи.

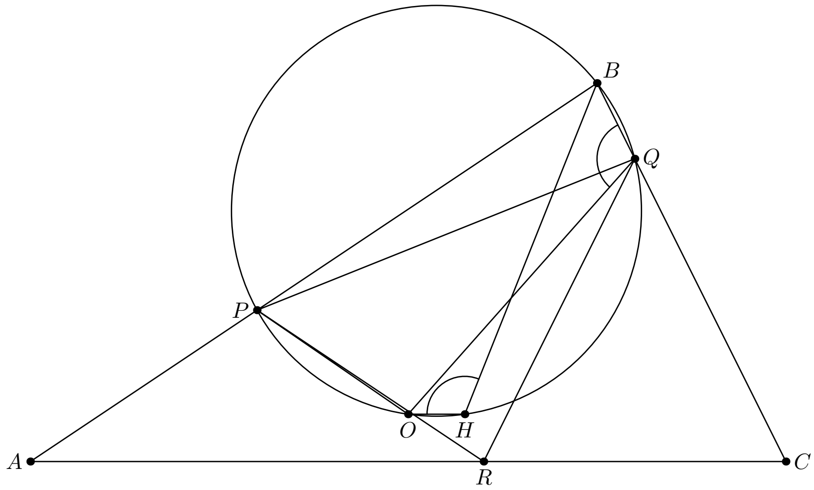

Рис. 8.

9. (Ф.Ивлев, 8–9) Стороны AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ касаются окружности с центром I в точках K, L, M и N соответственно. На прямой AI выбрана произвольная точка P. Прямая PK пересекает прямую BI в точке Q. Прямая QL пересекает прямую CI в точке R. Прямая RM пересекает прямую DI в точке S. Докажите, что точки P, N и S лежат на одной прямой.

Решение. По теореме Менелая $(BQ : QI)(IP : PA)(AK : KB) = 1$. Аналогично $(CR : RI)(IQ : QB)(BL : LC) = 1$ и $(DS : SI)(IR : RC)(CM : MD) = 1$. Перемножая эти равенства с учетом равенств $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$, получаем $(IS : SD)(DN : NA)(AP : PI) = 1$, что равносильно утверждению задачи.

Примечание. Утверждение останется верным при замене точки I произвольной точкой плоскости.

10. (М. Фадин, 8–9) Треугольник ABC вписан в окружность ω_1 с центром O. Окружность ω_2 касается сторон AB, AC и касается дуги $\widehat{BC}$ описанной окружности в точке K. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямая OI содержит симедиану треугольника AIK.

Решение. Пусть M, N — середины дуг BC и ABC описанной окружности треугольника ABC. Известно, что точка K касания описанной и полувписанной окружностей лежит на прямой NI. Кроме того, точка I лежит на прямой AM (рис. 10). Значит, треугольники IMN и IKA подобны, а медиана OI треугольника IMN совпадает с симедианой треугольника IKA.

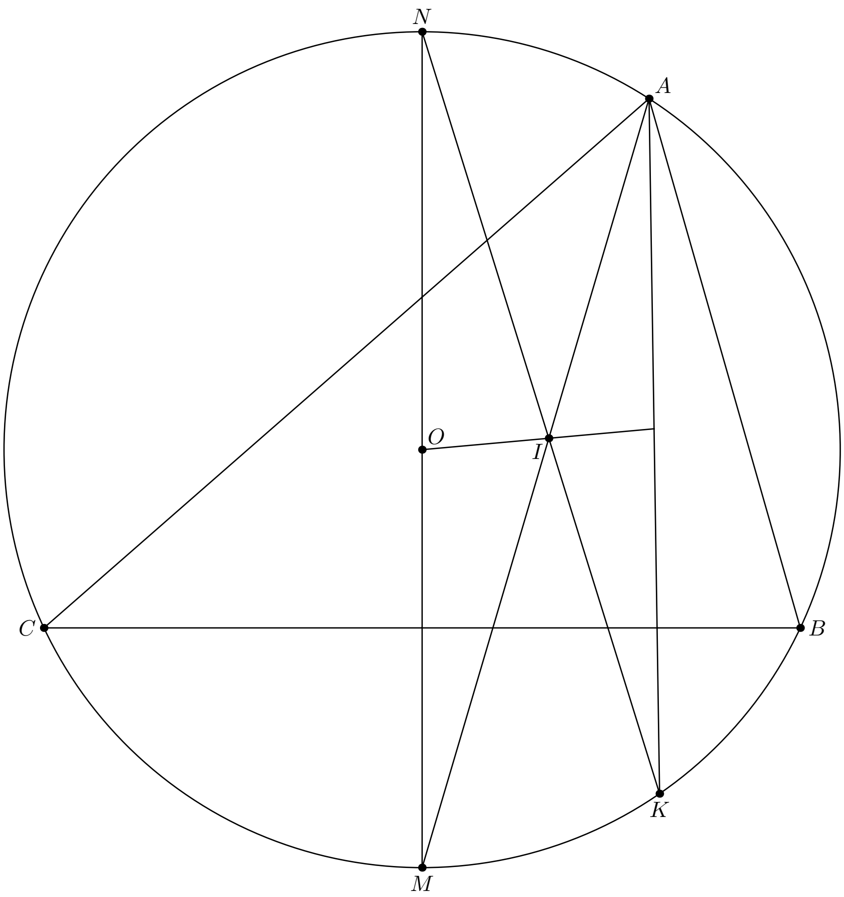

Рис. 10.

11. (Д.Прокопенко, 8–10) В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$, точка T такова, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC$. Окружность, проходящая через точки B, C и T, повторно пересекает прямые AB и AC в точках K и L. Докажите, что точки K и L равноудалены от прямой AT.

Решение. Заметим, что прямая AT проходит через вершину правильного треугольника с основанием BC. Поскольку $\angle A = 60^\circ$, эта вершина является точкой пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C, т.е. AT — симедиана треугольника. С другой стороны, легко видеть, что треугольники ABL и ACK правильные, т.е. треугольники ABC и ALK симметричны относительно биссектрисы угла A и AT — медиана треугольника AKL (рис. 11).

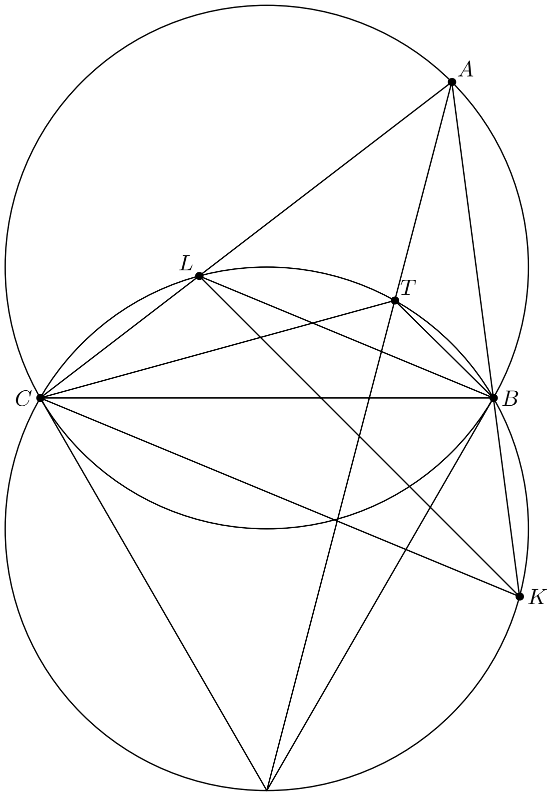

Рис. 11.

12. (Л.Емельянов, 8–11) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N — середины сторон BC, CD, DA, AB соответственно. Отрезки AK, BL, CM, DN, пересекаясь, делят друг друга на три части. Оказалось, что отношение длины средней части к длине всего отрезка одно и то же для всех четырех отрезков. Верно ли, что $ABCD$ — параллелограмм?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть $PQRS$ — трапеция, отношение оснований PS и QR которой меньше 2. На продолжениях боковой стороны PQ за точки P и Q возьмем точки A и K соответственно так, что $PA = PQ = 2QK$. На продолжениях боковой стороны RS за точки R и S возьмем точки M и C соответственно так, что $CR = RS = 2SM$. Пусть прямые CK и QR пересекаются в точке B, а прямые AM и PS — в точке D. Тогда легко видеть, что $AM = MD$, $BK = KC$, середины N, L отрезков AB, CD лежат на прямых PS, QR соответственно и $QR : BL = PS : DN = PQ : AK = RS : CM = 2/5$ (рис. 12).

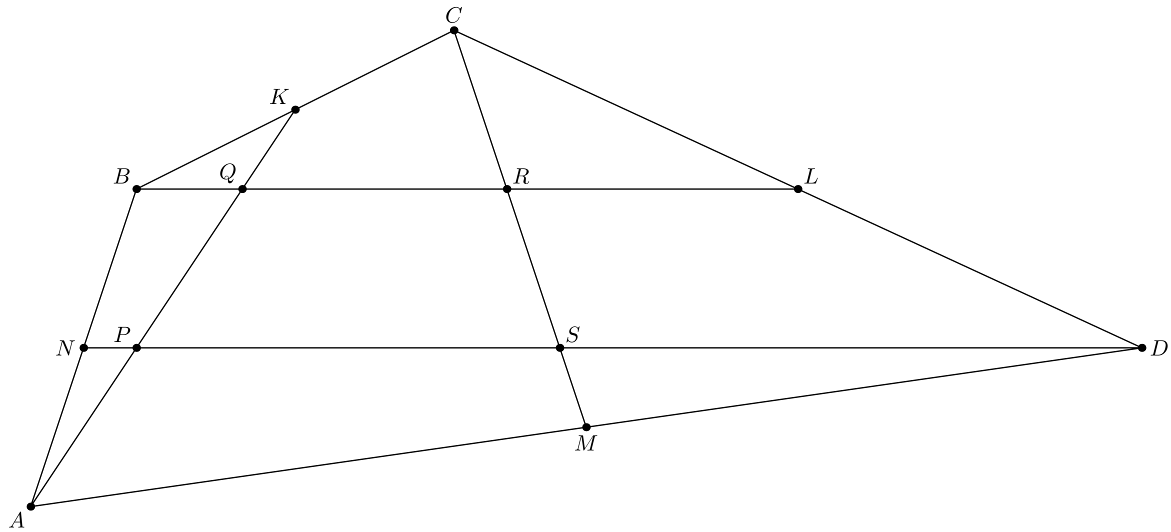

Рис. 12.

Примечание. Можно показать, что все четырехугольники, удовлетворяющие условию, строятся описанным способом и, следовательно, длина средней части составляет $2/5$ длины всего отрезка.

13. (M.Saghafian, 8–11) На плоскости даны восемь точек общего положения. В ряд выписали площади всех 56 треугольников с вершинами в этих точках. Докажите, что между выписанными числами можно поставить знаки "+" и "−" так, чтобы полученное выражение равнялось нулю.

    Решение. Заметим, что утверждение задачи верно для любых четырех точек. Действительно, если точки образуют выпуклый четырехугольник $ABCD$, то $S_{ABC} + S_{ACD} - S_{BCD} - S_{ABD} = 0$. Если же точка D лежит внутри треугольника ABC, то $S_{ABC} - S_{ABD} - S_{ACD} - S_{BCD} = 0$.

    Поставим теперь в соответствие данным точкам вершины куба $ABCDA'B'C'D'$ и рассмотрим следующие 14 четверок его вершин: шесть граней куба, шесть сечений, проходящих через противоположные ребра, и два вписанных в куб тетраэдра $AB'CD'$, $A'BC'D$. Любые две из этих четверок имеют не больше двух точек, значит, каждый из 56 треугольников входит ровно в одну четверку. Поэтому, расставив знаки для каждой четверки, мы получим искомую расстановку.

14. (Л.Емельянов) Дан треугольник ABC. Прямая AB касается его вписанной окружности в точке C', а вневписанной, касающейся стороны BC, — в точке C'_a. Аналогично определяются точки C'_b, C'_c, A', A'_a, A'_b, A'_c, B', B'_a, B'_b, B'_c. Рассмотрим длины 12 отрезков — высот треугольников $A'B'C'$, $A'_aB'_aC'_a$, $A'_bB'_bC'_b$, $A'_cB'_cC'_c$.

    а) (8–9) Какое наибольшее число различных может быть среди них?

    б) (10–11) Найдите все возможные количества различных длин.

    Ответ. а) 6. б) От 2 до 6.

    Решение. а) Заметим, что прямые $A'B'$ и $A'_cB'_c$ перпендикулярны биссектрисе угла C. Кроме того, $BA' = AB'_c = p - b$ и $AB' = BA'_c = p - a$, где a, b, c, p — длины сторон и полупериметр треугольника ABC. Поэтому расстояния от A до $A'B'$ и от B до $A'_cB'_c$

равны. Аналогично равны расстояния от B до $A'B'$ и от A до $A'_cB'_c$. А, поскольку $AC' = BC'_c$, то и высоты треугольников $A'B'C'$, $A'_cB'_cC'_c$ из C', C'_c соответственно также равны (рис. 14). Аналогично получаем равенства еще пяти пар высот, т.е. среди 12 отрезков всегда есть шесть пар равных.

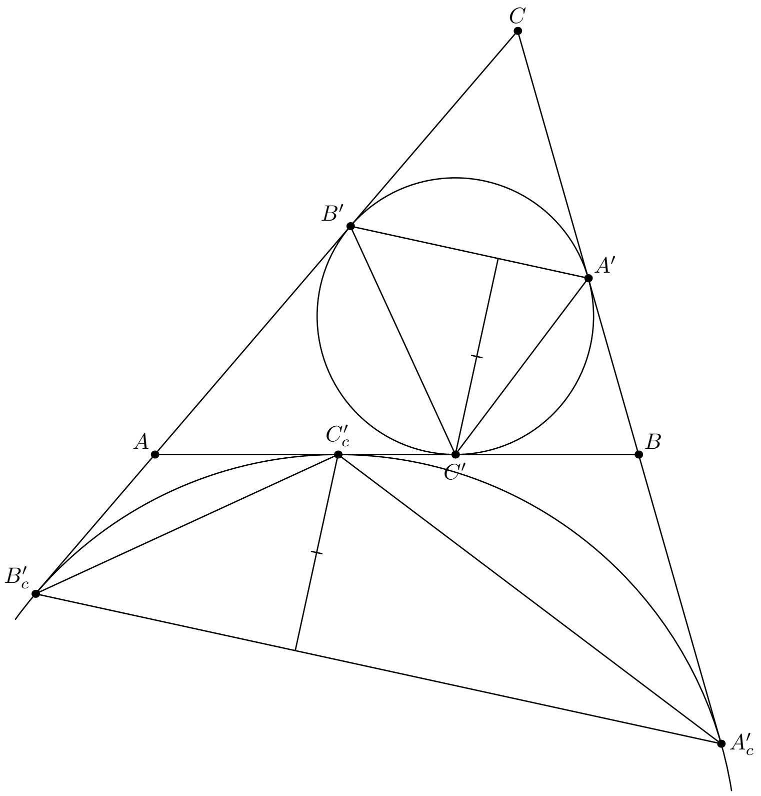

Рис. 14.

б) Углы треугольника $A'B'C'$ равны $(\pi - A)/2$, $(\pi - B)/2$, $(\pi - C)/2$, а треугольника $A'_cB'_cC'_c$ — $A/2$, $B/2$, $(\pi + C)/2$. По теореме синусов высоты этих треугольников равны $2r\cos(A/2)\cos(B/2)$, $2r\cos(A/2)\cos(c/2)$, $2r\cos(B/2)\cos(C/2)$ и $2r_c\sin(A/2)\sin(B/2)$, $2r_c\sin(A/2)\cos(C/2)$, $2r_c\sin(B/2)\cos(C/2)$, где r, r_c — радиусы вписанной и вневписанной окружностей. Аналогичными формулами задаются высоты двух оставшихся треугольников. При этом из п.а) получаем, что $r : r_c = \mathrm{tg}(A/2)\,\mathrm{tg}(B/2)$. Поэтому при $B = \pi/2$ получаем, что $2r\cos(A/2) = 2r_c\sin(A/2)$, т.е. мы имеем уже четыре равных высоты. Соответственно в неравнобедренном прямоугольном треугольнике будет пять различных длин, в равнобедренном непрямоугольном — четыре, в равнобедренном прямоугольном — три и в равностороннем — две.

15. (И.Михайлов, 9–11) Прямая ℓ, параллельная стороне BC треугольника ABC, касается его вписанной окружности и пересекает его описанную окружность в точках D и E. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $AI^2 = AD \cdot AE$.

Решение. Так как $DE \parallel BC$, то $\smile BD = \smile CE$, т.е. $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle DAI = \angle EAI$. Далее, заметим, что касательные из D и E к вписанной окружности пересекаются в точке F, лежащей на описанной окружности, поэтому прямые DI и EI являются биссектрисами углов FDE и FED.

Пусть A', D', E' — вторые точки пересечения прямых AI, DI, EI с описанной окружностью. Так как эти точки — середины дуг DFE, EF, DE соответственно, то $\smile D'A' = \smile DE'$ (рис.15). Следовательно, $\angle AID = \angle AEI$, т.е. треугольники AID и AEI подобны и $AI : AD = AE : AI$.

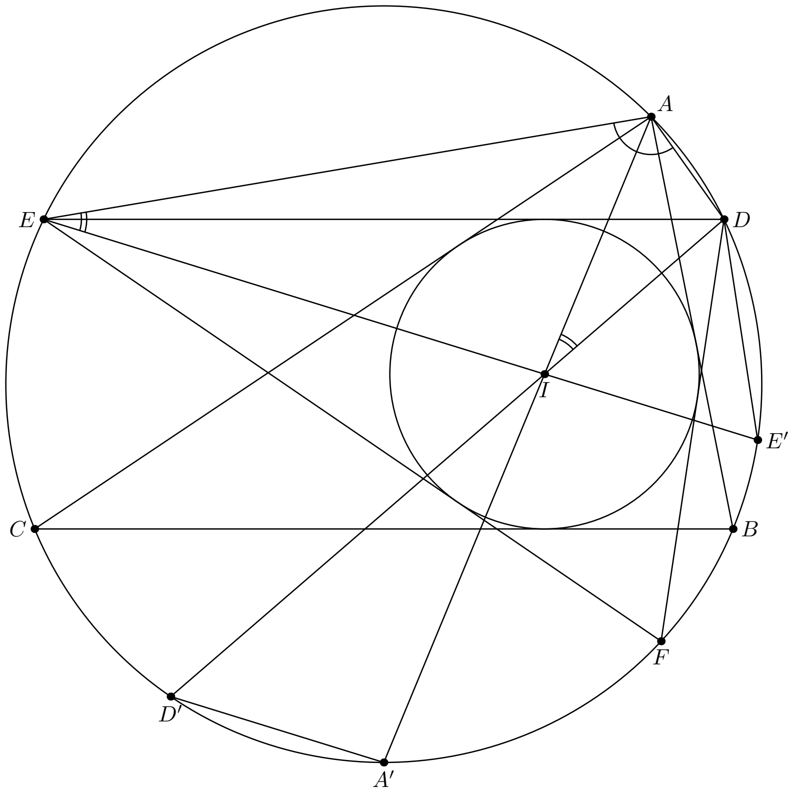

Рис. 15.

16. (М.Плотников, Д.Хилько, П.Кожевников, 9–11) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть $E = AC \cap BD$, $F = AD \cap BC$. Биссектрисы углов AFB и AEB пересекают CD в точках X, Y. Докажите, что точки A, B, X, Y лежат на одной окружности.

    Решение. Пусть U — точка пересечения AB и CD (рис. 16). Тогда $DY : YC = DE : EC = AD : BC = UD : UB$ (второе равенство следует из подобия треугольников EAD и EBC, третье — из подобия UDA и UBC). Следовательно, $UY = UD + UD \cdot CD/(UD + UB) = UD(UC + UB)/(UD + UB)$. Аналогично получаем, что $UX = UC(UD + UB)/(UC + UB)$. Значит $UX \cdot UY = UC \cdot UD = UA \cdot UB$. При других расположениях точек рассуждение аналогично.

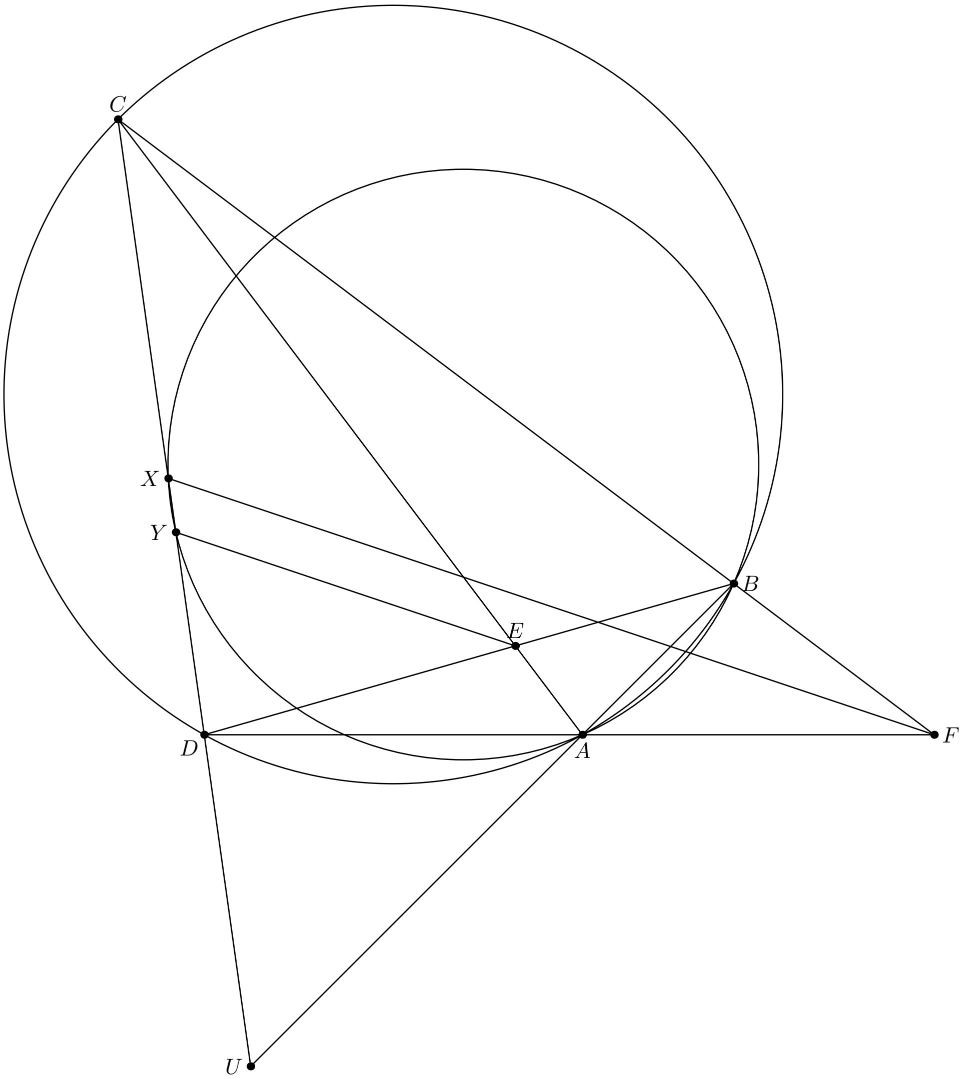

Рис. 16.

17. (И.Кухарчук, 9–11) В треугольнике ABC выбрана точка P. Лучи с началом в точке P, пересекающие под прямым углом стороны BC, AC, AB, пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Оказалось, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке Q. Докажите, что все такие прямые PQ пересекаются в одной точке.

    Решение. Рассмотрим точку R, изогонально сопряженную точке Q. Пусть прямые AR, BR, CR пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2, C_2. Пусть также прямые A_1P, B_1P, C_1P пересекают описанную окружность в точках A_3, B_3, C_3. Наконец, пускай O — центр описанной окружности треугольника ABC. Прямая QR проходит через точку X пересечения прямых B_1A_2 и A_1B_2 (теорема Паскаля для $BB_2A_1AA_2B_1$). Аналогично она проходит через точку Y пересечения прямых B_1C_2 и C_1B_2.Следовательно, прямые XY и QR совпадают.

    Прямая PO проходит через X (теорема Паскаля для $B_3B_1A_2A_3A_1B_2$ и то, что A_3A_2 – – диаметр из симметрии относительно серединного перпендикуляра к стороне BC точек A_1 и A_2), аналогично PO проходит через Y. Откуда PO совпадает с XY, а значит и с QR. Следовательно все такие прямые PQ проходят через O.

18. (А.Заславский, 10–11) Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ произведения противоположных сторон равны. Точка B' симметрична B относительно прямой AC. Докажите, что окружность, проходящая через точки A, B', D, касается прямой AC.

Решение. Построим окружности, проходящие через B' и касающиеся прямой AC в точках A и C. Пусть D' — вторая точка пересечения этих окружностей. Так как $\angle CAD' + \angle ACD' = \angle AB'D' + \angle CB'D' = \angle B$, точка D' лежит на описанной окружности четырехугольника. Кроме того, середина диагонали AC лежит на прямой $B'D'$, поскольку касательные, проведенные из нее к окружностям, равны (рис. 18). Поэтому $AD'/CD' = \sin\angle ACD'/\sin\angle CAD' = \sin\angle CB'D' \sin\angle AB'D' = AB'/CB' = AC/BC$, т.е. D' совпадает с D.

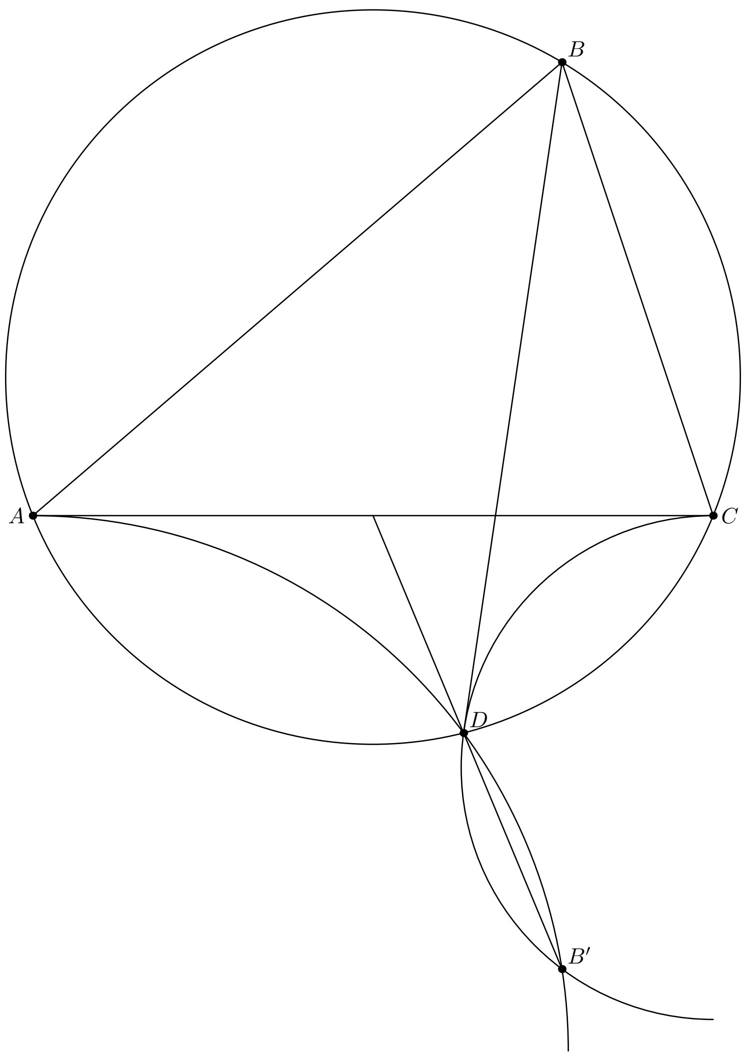

Рис. 18.

19. (М.Дидин, 10–11) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а K — точка пересечения BC с внешней биссектрисой угла A. Прямая KI пересекает внешние биссектрисы углов B и C в точках X и Y. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

Решение. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Тогда I — ортоцентр треугольника $I_aI_bI_c$, а I_aA — его высота. Точки A, K, I_b, I_c образуют гармоническую четверку, значит четверка точек I, K, Y, X и четверка прямых

AI, AK, AY, AX тоже гармонические. Поскольку $AI \perp AK$, то AI — биссектриса угла XAY.

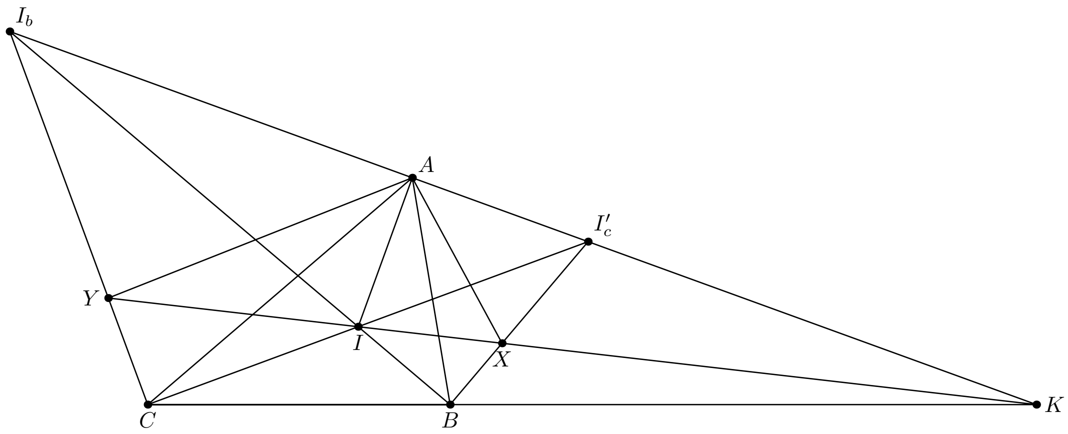

Рис. 19.

20. (И.Кухарчук, 10–11) Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC; R, r — их радиусы; D — точка касания вписанной окружности со стороной BC; N — произвольная точка на отрезке ID. Перпендикуляр к ID в точке N пересекает описанную окружность ABC в точках X и Y. Пусть O_1 — центр описанной окружности XIY. Найдите произведение $OO_1 \cdot IN$.

    Ответ. Rr.

    Первое решение. Пусть K — середина XY. Тогда $O_1X^2 - OX^2 = O_1K^2 - OK^2$. С другой стороны, $O_1X^2 = O_1I^2 = OO_1^2 + OI^2 - 2OO_1 \cdot OI \cos\angle O_1OI$ (рис. 20). Следовательно, $2Rr = R^2 - OI^2 = 2OO_1(OK - OI\cos\angle O_1OI) = 2OO_1 \cdot IN$. При других расположениях точек решение аналогично.

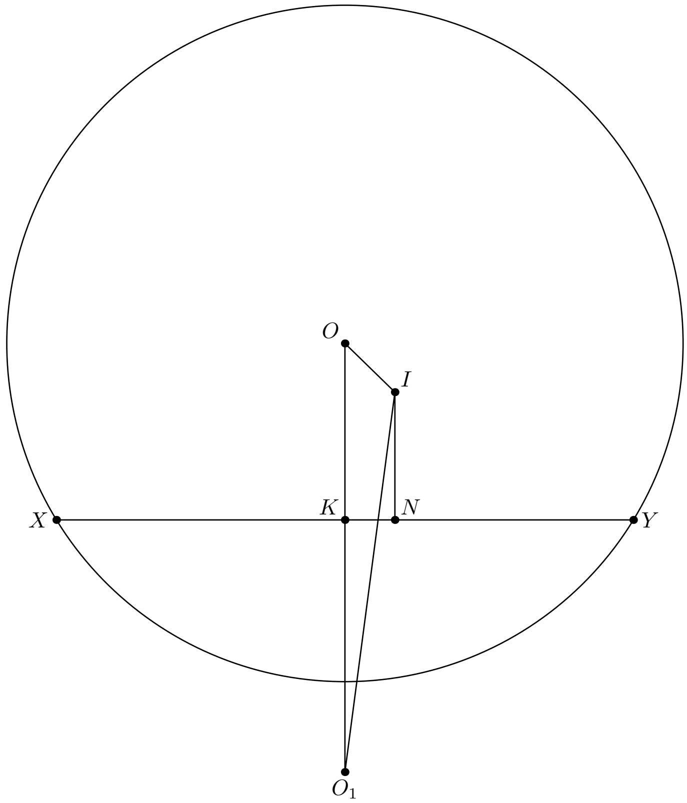

Рис. 20.

Второе решение. Верен более общий факт: пусть P — произвольная точка внутри ABC; R и S — точки на отрезках BP и CP такие, что $RS \parallel BC$; Q и L — точки пересечения описанной окружности треугольника ABC с RS; O — центр окружности ABC; O_1 — центр окружности BPC; O_2 — центр окружности QPL. Тогда $OO_1 : OO_2 = RS : BC$.

Докажем его. Пусть BP пересекает окружность QPL в F, а окружность ABC в G. Спроектируем O, O_1 и O_2 на BP и сделаем гомотетию с центром в P и коэффициентом 2. Точка O_1 попадет в B, O_2 в F, O в такую точку X на отрезке BG, что $XG = BP$. Для доказательства достаточно проверить: $GB : BX = BR : RP$. Это равносильно (т. к. $BX = GP$) $GR/RX = BR/RP$, а это верно в силу равенства степеней точки R относительно окружностей ABC и QPL.

21. (А.Заславский, 10–11) Во вписанно-описанном четырехугольнике отметили центры O, I описанной и вписанной окружностей и середину M одной из диагоналей, после чего сам четырехугольник стерли. Восстановите его.

Решение. Точка L пересечения диагоналей четырехугольника лежит на прямой OI. Кроме того, $OM \perp ML$, что позволяет построить точку L. Пусть теперь AB — диаметр описанной окружности, проходящий через I, а C — точка описанной окружности такая, что $CL \perp AB$. Тогда CO, CI, CL — медиана, биссектриса и высота прямоугольного треугольника ABC, Следовательно, CI — биссектриса угла OCL. Это позволяет построить точку C как пересечение перпендикуляра из L к OI и окружности Аполлония для точек O и L, а значит,и описанную окружность. Наконец, заметим, что середина N второй диагонали лежит на прямой MI и окружности с диаметром OL, что позволяет построить вершины четырехугольника.

22. (П.Кожевников, 10–11) В окружности Ω хорды A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 пересекаются в точке O. Пусть B_i — вторая точка пересечения окружности Ω с окружностью, построенной на отрезке OA_i как на диаметре. Докажите, что хорды B_1B_2, B_3B_4, B_5B_6 пересекаются в одной точке.

Решение. Рассмотрим композицию инверсии с центром O и радиусов $\sqrt{OA_1 \cdot OA_2}$ и центральной симметрии относительно O. Она меняет местами точки A_1, A_2, сохраняет окружность Ω и переводит окружность с диаметром OA_1 в прямую, перпендикулярную A_1A_2. Следовательно, точки B_1, B_2 перейдут в точки C_1, C_2, диаметрально противоположные A_2, A_1, а прямая B_1B_2 в окружность C_1C_2O. Пусть эта окружность вторично пересекает прямые A_2A_1 и A_2C_1 в точках X, Y соответственно (рис. 22). Тогда $A_2X = OA_1$, т.е. степень A_2 относительно окружности не зависит от выбора хорды. Поэтому степень центра O_1 окружности Ω тоже не зависит от выбора хорды и все окружности пересекают прямую OO_1 в одной и той же точке.

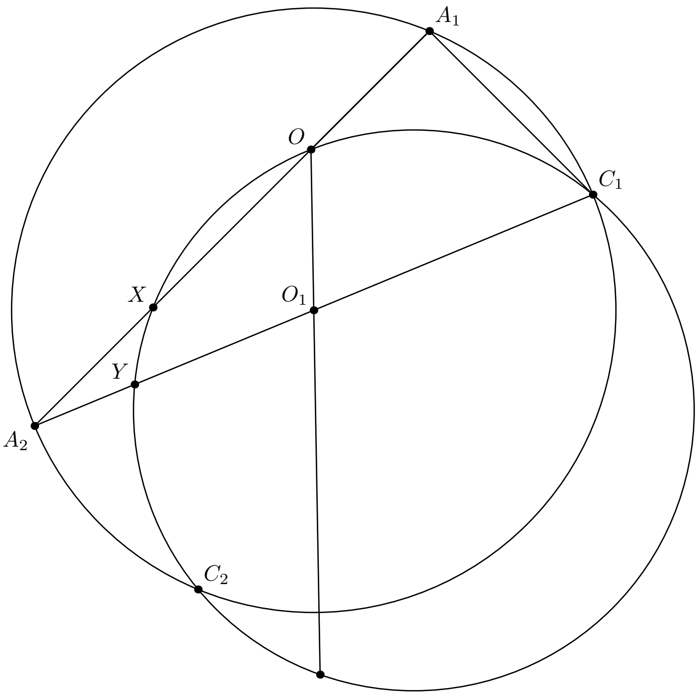

Рис. 22.

23. (А.Сгибнев, 10–11) Дан эллипс с фокусом F. Две перпендикулярные прямые, проходящие через F, пересекают эллипс в четырех точках. Касательные к эллипсу в этих точках образуют описанный вокруг эллипса четырехугольник. Докажите, что этот четырехугольник вписан в конику с фокусом F.

Решение. Докажем более сильное утверждение: пусть два перпендикулярных луча с началом F пересекаю эллипс в точках A, B. Тогда геометрическим местом точек пересечения касательных к эллипсу в A и B будет коника с фокусом F.

Первый способ. При полярном преобразовании с центром F эллипс перейдет в окружность, а точки A, B в две перпендикулярных касательных к этой окружности. Хорды,соединяющие точки касания, касаются концентрической окружности, поэтому при обратном преобразовании они перейдут в точки коники с фокусом F. Заметим, что это рассуждение остается верным, если вместо прямого взять произвольный постоянный угол AFB. При этом отношение эксцентриситетов исходного эллипса и полученной коники равно $\cos(\angle AFB/2)$.

Второй способ. Воспользуемся следующим фактом: пусть AB — хорда эллипса, проходящая через фокус F, C — точка пересечения касательных в точках A, B. Тогда $CF \perp AB$.

Сделаем проективное преобразование, переводящее эллипс в окружность, а F в ее центр. Тогда AB перейдет в диаметр окружности, C в бесконечную точку, перпендикулярную этому диаметру, а прямая CF в перпендикулярный диаметр. Точки пересечения касательных в концах этих двух диаметров лежат на концентрической окружности. При обратном преобразовании эта окружность перейдет в конику, а ее центр и бесконечная прямая в фокус и директрису этой коники.

24. (О.Смирнов, 11) Пусть $OABCDEF$ — шестигранная пирамида с основанием $ABCDEF$, описанная около сферы ω. Плоскость, проходящая через точки касания ω с гранями OFA, OAB и $ABCDEF$, пересекает ребро OA в точке A_1; аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1. Пусть ℓ, m и n — прямые A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1 соответственно. Оказалось, что ℓ и m лежат в одной плоскости, m и n также лежат в одной плоскости. Докажите, что ℓ и n лежат в одной плоскости.

    Решение. Конус с вершиной O, описанный около сферы, пересекает основание пирамиды по эллипсу, вписанному в шестиугольник $ABCDEF$. По теореме Брианшона прямые AD, BE и CF пересекаются в некоторой точке L. Тогда точка пересечения прямых A_1D_1 и B_1E_1 лежит на прямой OL. На этой же прямой лежит и точка пересечения прямых B_1E_1 и C_1F_1. Следовательно, прямые ℓ, m, n и OL пересекаются в одной точке.