

XXI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс. Решения
Ратмино, 31 июля 2025 г.

1. (И.Кухарчук, Е.Галахова.) Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$. Диагонали AC и CE равны и пересекают диагональ BD в точках M и N соответственно. Известно, что $BM = ND$, $BC \neq CD$. Докажите, что точка, симметричная C относительно середины BD , лежит на прямой AE .

Решение. Из условия следует, что $CM \cdot MA = BM \cdot MD = DN \cdot NB = CN \cdot NE$. Поэтому $CM = CN$ или $CM = EN$. Первый случай невозможен, так как $BC \neq CD$, во втором середина MN лежит на средней линии треугольника ACE (рис. 8.1), что равносильно утверждению задачи.

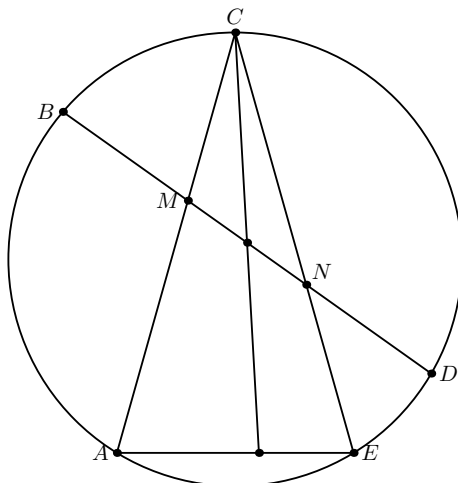


Рис. 8.1.

2. (Л.Емельянов) В треугольнике ABC CH — высота, CA' , CB' — биссектрисы треугольников CBH , CAH соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $CA'B'$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда $\angle ACB = 90^\circ$.

Решение. Пусть центр I вписанной окружности треугольника ABC является также центром описанной окружности треугольника $A'B'C$. Тогда он лежит на описанной окружности треугольника $A'BC$ как точка пересечения биссектрисы угла B и серединного перпендикуляра к стороне $A'C$. Следовательно, $\angle CIB = \angle CA'B$. Аналогично $\angle CIA =$

$\angle CB'A$ (рис. 8.2). Значит, $\angle AIB = 180^\circ - \angle A'CB'$. С другой стороны, $\angle AIB = 90^\circ + \angle A'CB'$, откуда получаем, что $\angle C = 2\angle A'CB' = 90^\circ$. Обратное утверждение доказывается аналогично.

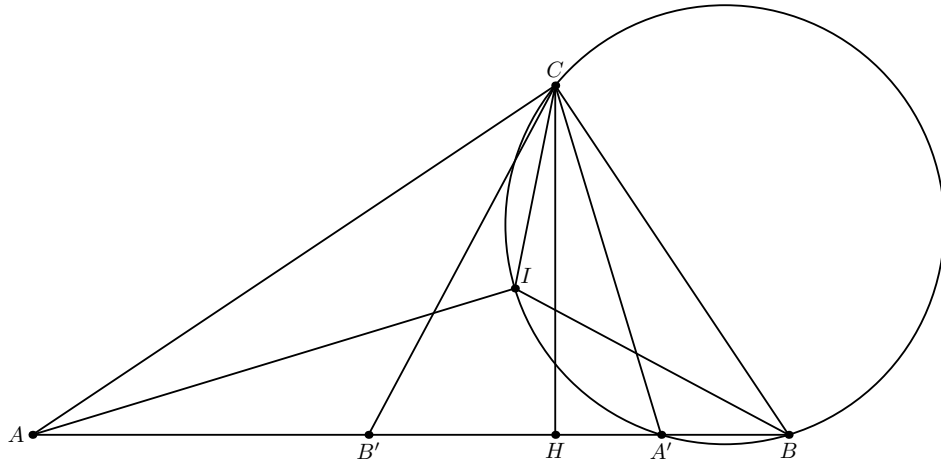


Рис. 8.2.

3. (Ф.Нилов) Можно ли отметить на плоскости больше шести точек, не лежащих на одной прямой, и раскрасить их в три цвета так, чтобы на любой прямой, проходящей через две разноцветные точки, лежала еще ровно одна отмеченная точка, окрашенная в третий цвет?

Ответ. Да.

Решение. Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой ℓ_1 , точки A_2, B_2, C_2 лежат на прямой ℓ_2 , прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в точке C_3 , прямые A_1C_2 и A_2C_1 пересекаются в точке B_3 , прямые B_1C_2 и B_2C_1 пересекаются в точке A_3 . Тогда по теореме Паппа точки A_3, B_3, C_3 лежат на одной прямой (рис. 8.3). Теперь, если покрасить в один цвет точки A_1, A_2, A_3 , в другой B_1, B_2, B_3 и в третий C_1, C_2, C_3 , то условие задачи будет выполнено.

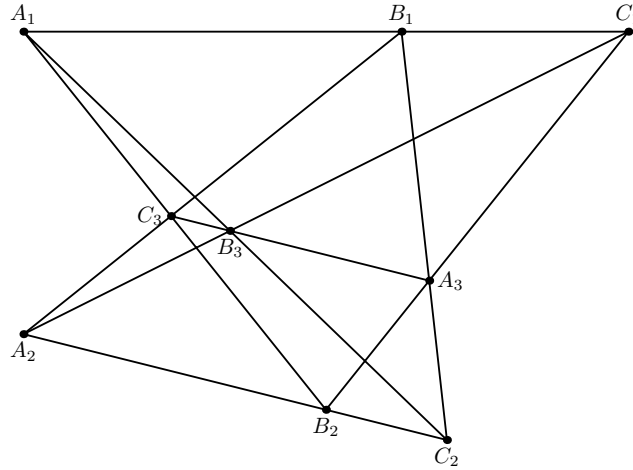


Рис. 8.3.

Примечание. Используя сложение точек на кривой третьего порядка, можно построить пример со сколь угодно большим числом точек: возьмем точку P такую, что $3nP = 0$, и покрасим в один цвет все точки вида $3kP$, в другой — $(3k + 1)P$ и в третий — $(3k - 1)P$.

4. (Л.Шатунов) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 . Обозначим через B_0 середину дуги AC описанной окружности $\triangle ABC$, не содержащей B . Описанные окружности треугольников AA_1B_0 и CC_1B_0 пересекают прямые BC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что инцентр $\triangle ABC$ лежит на PQ .

Первое решение. Пусть прямая, проходящая через I и параллельная AC , пересекает BC в точке P' . Тогда $\angle P'IC = \angle ICA = \angle ICP'$, следовательно, $IP' = P'C$. С другой стороны, $IB_0 = B_0C$, значит, треугольники $P'IB_0$ и $P'CB_0$ равны, т.е. $\angle B_0P'C = (180^\circ - \angle C)/2 = \angle IAB_0 = \angle CPB_0$ и точка P' совпадает с P . Аналогично получаем, что $IQ \parallel AC$ (рис. 8.4).

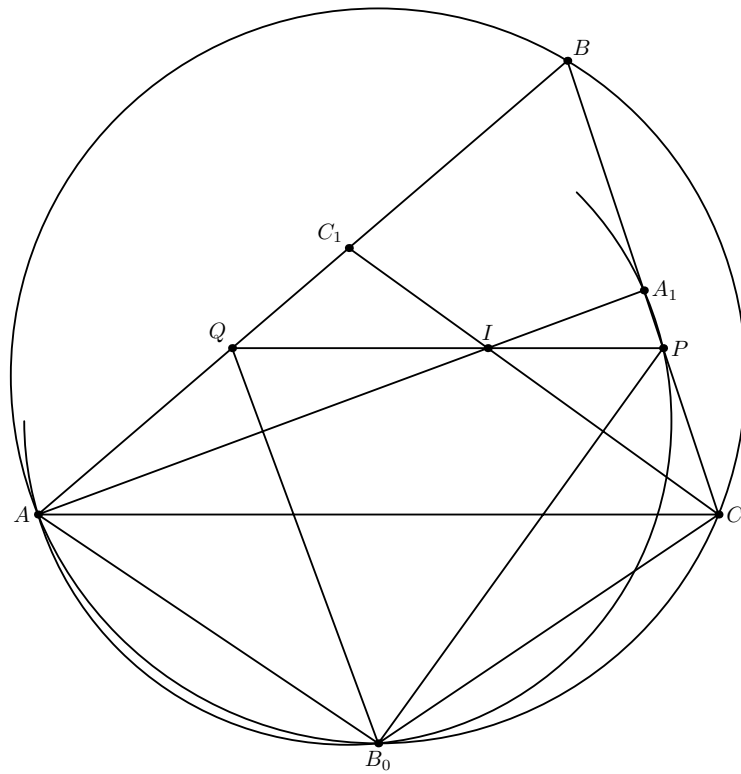


Рис. 8.4.

Второе решение. Пусть точки A_0, C_0 — середины дуг BC, AB ; P' — точка пересечения прямых A_0B_0 и BC . Четырехугольник $AA_1P'B_0$ — вписанный, поскольку $\angle AB_0A_0 = \angle BA_1A$, значит P' совпадает с P . Аналогично Q лежит на B_0C_0 . Теперь утверждение задачи следует из теоремы Паскаля для $ABCC_0B_0A_0$.

XXI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс

Ратмино, 1 августа 2025 г.

5. (М.Волчкевич) В прямоугольном треугольнике расстояние от вершины прямого угла до биссектрисы острого равно четверти гипотенузы. Чему могут равняться углы треугольника?

Ответ. 60° и 30° или 36° и 54° .

Решение. Пусть M — середина гипотенузы AB треугольника ABC , а L — точка, симметричная C относительно биссектрисы угла A . Тогда $CL = AB/2 = CM$ и возможны два случая.

1. Точки M и L совпадают. Тогда в треугольнике ACM биссектриса угла A совпадает с высотой, следовательно, $AC = AM = CM$ и $\angle A = 60^\circ$.
2. Точки M и L различны. Тогда $AC = AL$ и $LC = CM = MA$. Следовательно, $\angle ALC = \angle LMC = 2\angle A$ (рис. 8.5). С другой стороны, $2\angle ALC + \angle A = 180^\circ$. Значит, $\angle A = 36^\circ$.

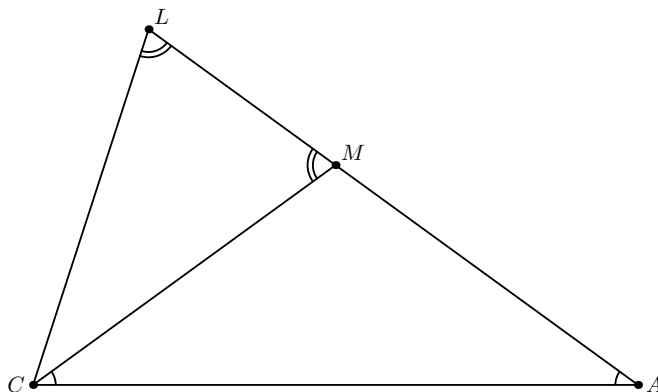


Рис. 8.5.

6. (И.Михайлов) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в точках P и Q . Докажите, что $2PQ < AD$.

Решение. Пусть K, L — проекции B, C на AD . Тогда окружности с диаметрами AB, CD проходят через K и L соответственно, а точки P, Q лежат на дугах BK и CL (рис. 8.6). Поскольку $\angle BAK < 90^\circ$, получаем, что $PQ \leq BK \leq AD/2$, причем равенство возможно только при совпадении точек B и C .

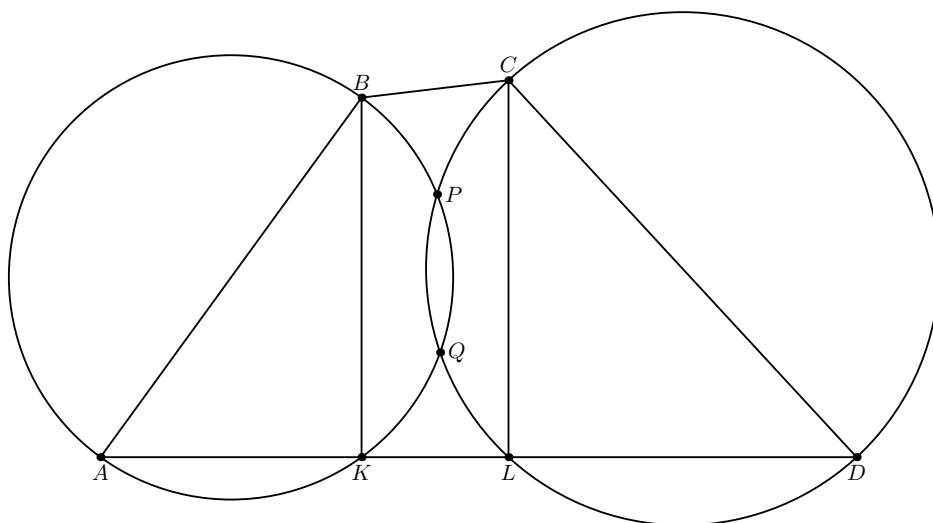


Рис. 8.6.

7. (К.Бельский) Правильный треугольник ABC вписан в окружность Ω . Окружности Ω_A , Ω_B , Ω_C с центрами A , B , C соответственно проходят через точку P , лежащую на Ω , и касаются одной прямой. Докажите, что существует прямая, касающаяся двух из этих окружностей и проходящая через вершину треугольника ABC .

Первое решение. Пусть точка P лежит на дуге AB окружности Ω . Тогда по теореме Помпейю $PC = PA + PB$, поэтому длина общей касательной к окружностям Ω_A и Ω_C равна $\sqrt{AC^2 - (PC - PA)^2} = \sqrt{BC^2 - PB^2}$, т.е. длине касательной из C к окружности Ω_B . Аналогично, длина общей касательной к окружностям Ω_B и Ω_C равна длине касательной из C к окружности Ω_A . При этом, поскольку окружности Ω_A , Ω_B , Ω_C касаются одной прямой, длина общей касательной к одной из пар этих окружностей равна сумме длин общих касательных к двум другим парам. Значит, это верно и для длин касательных из C к окружностям Ω_A , Ω_B и длины общей касательной к этим окружностям. Следовательно, одна из общих касательных к Ω_A , Ω_B проходит через C .

Второе решение. Обозначим через ℓ общую касательную к окружностям Ω_A , Ω_B и Ω_C . Предполагая, как и в первом решении, что P лежит на дуге AB , докажем, что отражение прямой ℓ относительно прямой AB проходит через вершину C , то есть является искомой касательной. Для этого достаточно показать, что точка C' , симметричная точке C относительно середины M отрезка AB , лежит на прямой ℓ . Поскольку $PC = PA + PB$, расстояние от точки M до прямой ℓ , равное $(PA + PB)/2$, в два раза меньше расстояния от точки C до ℓ . Следова-

тельно, при отражении точки C относительно M она перейдёт в точку, лежащую на ℓ (рис. 8.7).

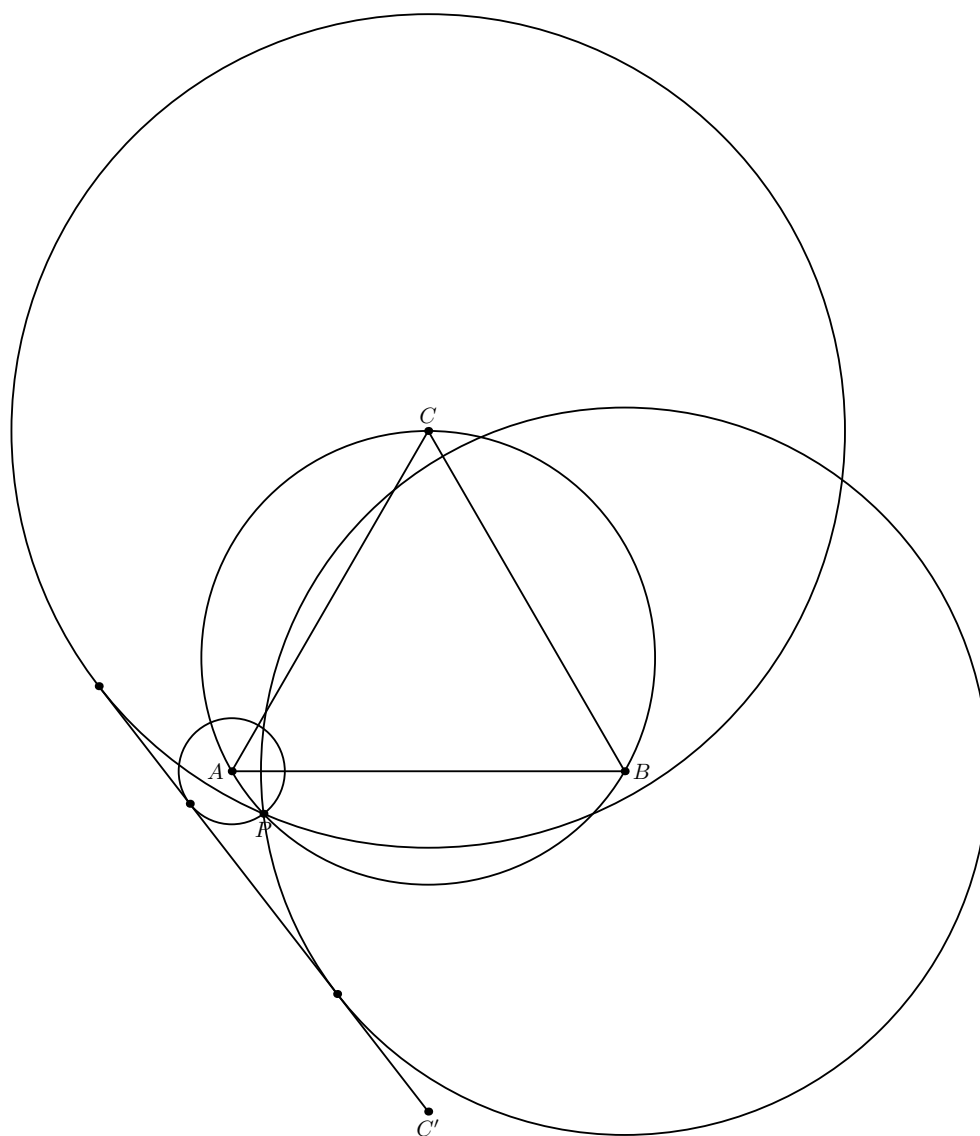


Рис. 8.7.

Примечание. Точка P , удовлетворяющая условию, является точкой пересечения описанной и внеписанной окружностей треугольника. При этом утверждение, что окружности с центрами A , B , C , проходящие через P , касаются одной прямой, верно для произвольного треугольника.

8. (А.Блинков) Из бумаги вырезан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = AE$, $\angle A = \angle B = \angle E = 90^\circ$, $BC = 3$, $CD = 5$, $DE = 2$. Постройте перпендикуляр из A на прямую CD , пользуясь только линейкой и проведя не более шести линий. Линии можно проводить только внутри пятиугольника.

Решение. Окружность с центром A и радиусом AB касается прямых BC и DE . Поскольку $CB + DE = CD$, эта окружность касается также прямой CD , т.е. CA и DA — биссектрисы углов C и D соответственно и $\angle CAD = 45^\circ$. Пусть AK — высота треугольника ACD , а M, N — точки пересечения прямой BE с AC и AD соответственно. Тогда $BC = CK$, $DE = DK$ и $\angle CKM = \angle CBM = \angle DEN = \angle DKN = 45^\circ = \angle A$. Следовательно, DM и CN — тоже высоты треугольника ACD (рис. 8.8). Отсюда получаем следующее построение

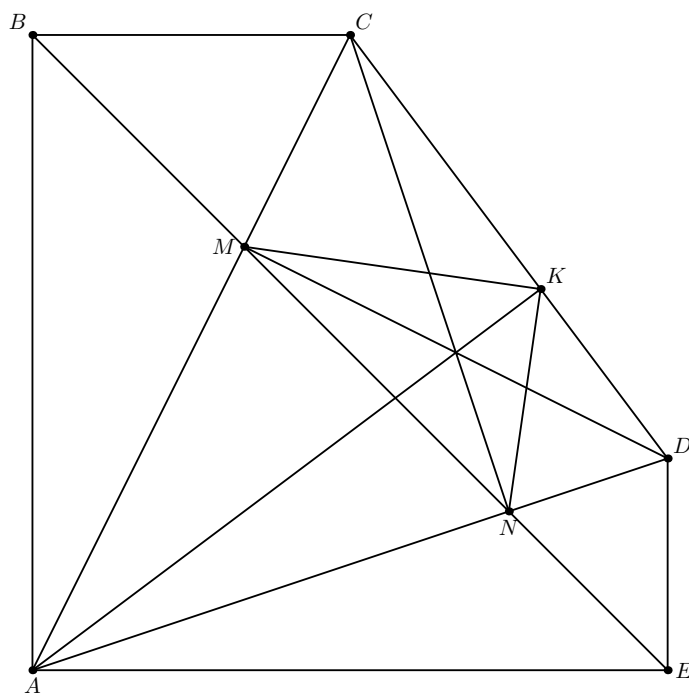


Рис. 8.8.

- 1–3. Проводим прямые AC , AD , BE и отмечаем точки M , N .
- 4–5. Проводим прямые DM , CN и отмечаем точку H их пересечения.
6. Проводим искомую прямую AH .

XXI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2025 г.

1. (Я.Щербатов) Высоты AA_1 , BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки A' , B' симметричны A , B относительно BB_1 , AA_1 соответственно. Докажите, что окружности девяти точек треугольников $A'B'C$ и $A'B'H$ касаются.

Решение. Пусть K , M_1 , N_1 , M_2 , N_2 — середины отрезков $A'B'$, CB' , CA' , HB' , HA' соответственно. Тогда утверждение задачи равносильно равенству $\angle M_1KM_2 = \angle M_1N_1K + \angle M_2N_2K$. Поскольку $\angle M_1KM_2 = \angle CA'H$, $\angle M_1N_1K = \angle KB'C$, $\angle KN_2M_2 = \angle HB'K$, это равенство сводится к равенству углов $CA'H$ и $HB'C$. Но $\angle HA'A = \angle A'AH = \angle HBB' = \angle BB'H = \pi/2 - \angle C$, откуда и следует утверждение задачи (рис. 9.1).

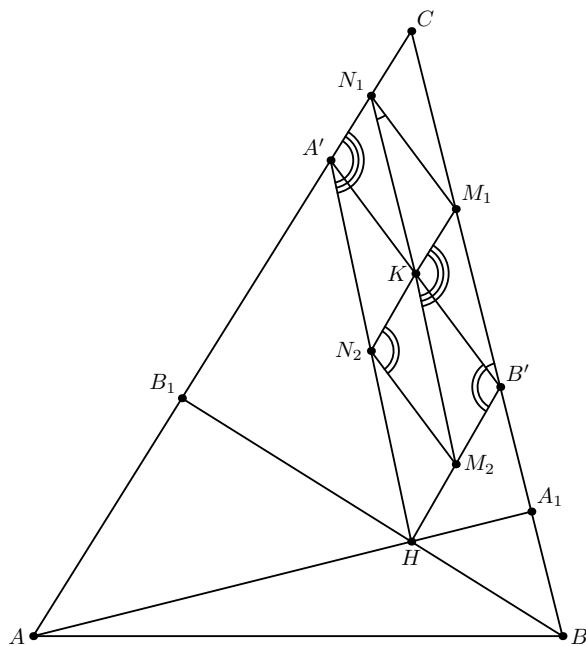


Рис. 9.1.

2. (Ф.Нилов) На плоскости отметили несколько точек и раскрасили их в четыре цвета так, что никакие три разноцветные точки не лежат на одной прямой и на любой окружности, проходящей через точки трех разных цветов, лежит еще ровно одна отмеченная точка, окрашенная в четвертый цвет. Обязательно ли все отмеченные точки лежат на одной окружности?

Ответ. Нет.

Решение. Рассмотрим полный четырехсторонник, образованный прямыми A_1B_1 , A_1B_2 , A_2B_1 , A_2B_2 . Пусть прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке C_1 , а прямые A_1B_2 и A_2B_1 в точке C_2 . Тогда окружности $A_1B_1C_2$, $A_1B_2C_1$, $A_2B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ пересекаются в точке Микеля, обозначим ее через D_2 . Сделаем инверсию с центром в произвольной точке D_1 , не лежащей на построенных прямых и окружностях, и покрасим в первый цвет образы точек A_1 , A_2 , во второй образы точек B_1 , B_2 , в третий образы точек C_1 , C_2 и в четвертый D_1 и образ D_2 . Эти восемь точек удовлетворяют условию задачи.

Примечание. Задачу также можно решить, используя сложение точек на циркулярной кубике. Пусть произвольная окружность пересекает такую кубику в точках A , B , C , D , а K_1 , K_2 , K_3 — три точки кубики, удовлетворяющие условию $2K_i = 0$. Тогда, покрасив в один цвет точки A , $A + K_i$, в другой B , $B + K_i$, в третий C , $C + K_i$ и в четвертый D , $D + K_i$, получим удовлетворяющую условиям задачи конфигурацию из 16 точек.

3. (Л.Емельянов) Дан треугольник ABC . Прямая m_1 пересекает прямые BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно, а прямая m_2 пересекает прямые BC , CA , AB в точках A_2 , B_2 , C_2 , при этом A_1 и A_2 симметричны относительно середины BC , B_1 и B_2 симметричны относительно середины CA , C_1 и C_2 симметричны относительно середины AB . Докажите, что $m_1 \perp m_2$ тогда и только тогда, когда m_1 и m_2 являются для треугольника ABC прямыми Симсона (для некоторых точек окружности ABC).

Первое решение. Прямые $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ порождают линейное семейство треугольников $A_tB_tC_t$, где A_t , B_t , C_t — точки, делящие отрезки A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 в одном отношении. Это семейство содержит серединный треугольник $A_0B_0C_0$ и два вырожденных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

Если в таком семействе найдутся два ортологичных треугольника, то и любые два треугольника семейства будут ортологичны. Поэтому из перпендикулярности прямых m_1 и m_2 следует, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_0B_0C_0$ ортологичны, т.е. перпендикуляры из точек A_1 , B_1 , C_1 к соответствующим сторонам треугольника ABC пересекаются в одной точке P . Тогда P лежит на описанной окружности треугольника, а прямая m_1 является ее прямой Симсона. Соответственно m_2 будет прямой Симсона противоположной точки окружности. Обратно, если m_1 , m_2 — пря-

мые Симсона, то семейство $A_tB_tC_t$ состоит из педальных треугольников точки P_t , линейно движущейся по прямой. Поскольку это семейство содержит серединный треугольник, эта прямая проходит через центр O описанной окружности, а значит, m_1 и m_2 перпендикулярны.

Второе решение. Обозначим через m'_2 образ прямой m_2 при гомотетии с центром в центроиде треугольника ABC и коэффициентом $-1/2$. Заметим, что при такой гомотетии точки A_2, B_2, C_2 перейдут в середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 . Следовательно, прямая m'_2 является прямой Гаусса четырехугольника, образованного треугольником ABC и прямой m_1 . Известно, что прямая Гаусса перпендикулярна прямой Симсона точки Микеля этого четырехугольника, то есть параллельна прямой m_1 . Это возможно только в том случае, если m_1 совпадает с прямой Симсона точки Микеля. Учитывая, что точка Микеля лежит на описанной окружности треугольника ABC , мы получаем требуемое.

Примечание. Условию задачи удовлетворяют прямые Симсона двух любых диаметрально противоположных точек (рис. 9.3).

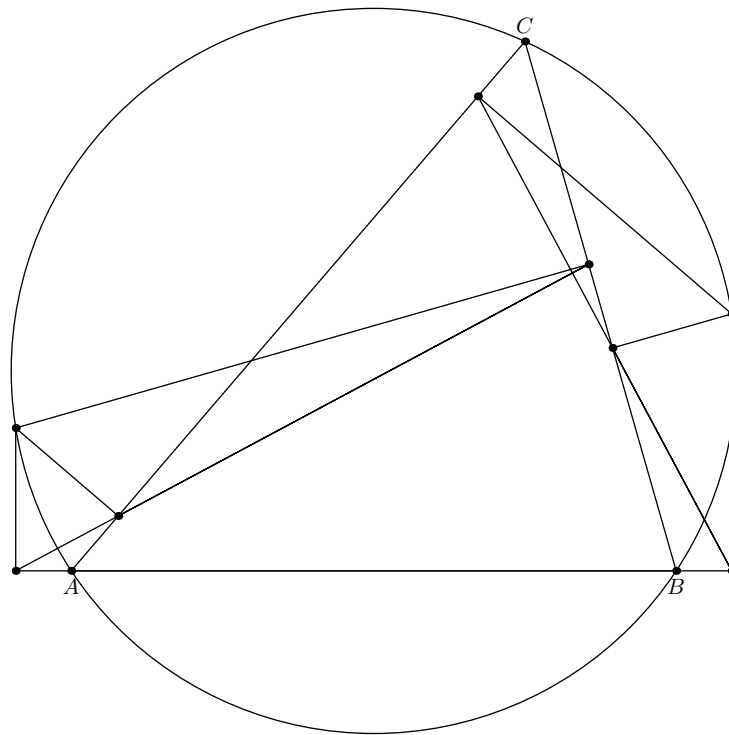


Рис. 9.3.

4. (Е.Волокитин) Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ через ортоцентр H треугольника ABC проведены прямые, параллельные BD и CD и

пересекающие AC и AB соответственно в точках E и F . Докажите, что прямая EF делит отрезок DH пополам.

Первое решение. Середина отрезка DH является центром равносторонней гиперболы $ABCDH$. Пусть B', C' — точки этой гиперболы, противоположные B, C соответственно. Тогда $HB' \parallel BD, HC' \parallel CD$ и, применяя теорему Паскаля к шестиугольнику $ABB'HC'S$, получаем утверждение задачи.

Второе решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC . Заметим, что $\angle ENF = \angle A$, поэтому у точки H есть изогонально сопряженная точка в четырехугольнике $BFECS$ и она совпадает с O . Пусть X и C_1 проекции точки H на стороны BF и EF соответственно. Обозначим через M проекцию точки O на сторону EF , а через C' середину отрезка CH . Тогда точки M, C', X, C_1 лежат на окружности девяти точек треугольника ABC , так как педальные окружности точек O и H в четырехугольнике $BEFC$ совпадают. Из леммы Фусса получаем, что $FH \parallel C'M$, а значит, после гомотетии с центром в H и коэффициентом 2 точка M перейдет в точку D .

Третье решение. Пусть H_b, H_c — точки пересечения высот треугольника ABC с описанной окружностью; Q_b, Q_c — проекции D на AC, AB ; D_b, D_c — пересечения этих перпендикуляров с описанной окружностью; P_b, P_c — точки пересечения этих перпендикуляров с высотами. Заметим, что BD_bDH_b — равнобокая трапеция, а значит, $\angle DBH_b = \angle EN_bH = \angle ENH_b$, поэтому $HE \parallel BD$ и точка E лежит на прямой H_bD_b . Аналогично F лежит на H_cD_c . Применяя теорему Паскаля к шестиугольнику $H_bD_bDACH_c$, получаем, что прямая EP_c проходит через точку пересечения AD и H_bH_c (рис. 9.4). Аналогично через эту точку проходит прямая P_bF . Тогда по теореме Дезарга треугольники FP_cQ_c и EP_bQ_b перспективны, но P_bP_c проходит через середину DH как диагональ параллелограмма HP_bDP_c , а Q_bQ_c — как прямая Симсона точки D .

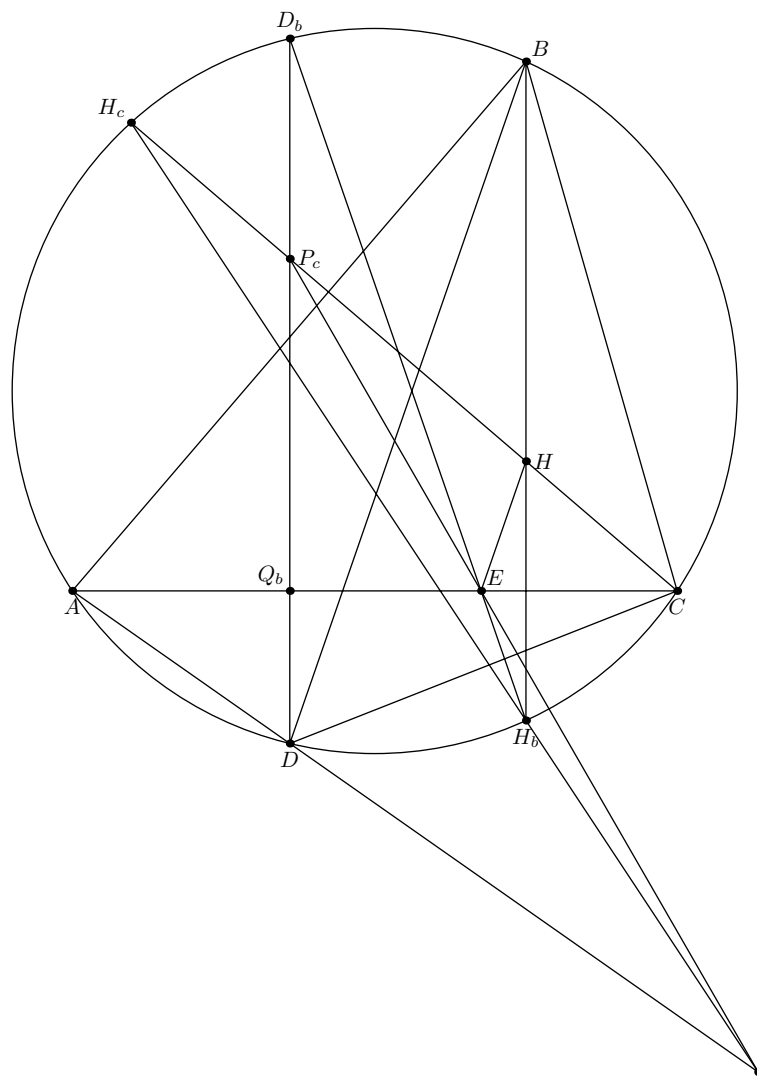


Рис. 9.4.

XXI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

Ратмино, 1 августа 2025 г.

5. (И.Михайлов) В треугольнике ABC BE и CF — высоты, внутренние биссектрисы углов B и C пересекаются в точке I , а внешние в точке J . Докажите, что $IJ > EF$.

Решение. По теореме о трилистнике B и C лежат на окружности с диаметром IJ , следовательно, $BC \leq IJ$. С другой стороны, из подобия треугольников ABC и AEF получаем $EF = BC \cos \angle A < BC$.

6. (ALEPH¹/Д.Бродский) Треугольник ABC вписан в окружность ω . Касательные к ω , проведенные в точках B и C , пересекаются в точке S . Отрезки AS и BC пересекаются в точке P . Биссектрисы (как лучи) углов APC и SPC пересекают ω в точках X и Y . Докажите, что точки X , Y и S лежат на одной прямой.

Решение. Докажем более общее утверждение: если прямая, проходящая через S , пересекает ω в точках U , V , то прямые PA , PB , PU , PV образуют гармоническую четверку.

Сделаем проективное преобразование, сохраняющее окружность ω и переводящее P в ее центр. Тогда прямые BC и AS перейдут в перпендикулярные диаметры окружности, а точки U , V в точки, симметричные относительно BC . Очевидно, что требуемое утверждение выполняется.

7. (ALEPH/Н.Штейнберг, А.Науменя) Дан треугольник ABC . На серединном перпендикуляре к отрезку BC вне треугольника выбирается переменная точка D . Прямые BD и AC пересекаются в точке C' , а прямые CD и AB — в точке B' . Пусть M_a — середина BC , M — вторая точка пересечения окружностей $(BB'D)$ и $(CC'D)$. Докажите, что центр окружности DMM_a лежит на фиксированной прямой.

Решение. Пусть H_a — точка пересечения A -окружности Аполлония треугольника ABC и медианы AM_a . Докажем, что H_a , D , M_a , M лежат на одной окружности, из этого, очевидно, будет следовать утверждение задачи.

Так как M — точка Микеля четырехсторонника, образованного прямыми: AB' , CB' , AC' , BC' , треугольники ABM и MDC подобны, следовательно, $\frac{MB}{AB} = \frac{MD}{DC} = \frac{MD}{DB} = \frac{MC}{AC}$, т.е. M лежит на окружности Аполлония.

¹<https://aleph-problems.com/>

Пусть A' — точка, симметричная A относительно прямой BC , A' также лежит на окружности Аполлония

Докажем, что A' , M , D лежат на одной прямой. Поскольку при движении D по серединному перпендикуляру к BC точка M проективно движется по окружности Аполлония, достаточно убедиться в этом для трех положений точки D .

Если D — бесконечно удаленная точка, то M совпадает с A и утверждение верно.

Если D — центр окружности $A'BC$, то M совпадает с A' , поскольку треугольники $A'DC$ и $A'BA$ подобны. При этом касательная к окружности Аполлония в точке A' проходит через D , так как эта окружность перпендикулярна окружности $A'BC$.

Если D лежит на окружности $A'DC$, то $A'D$ — биссектриса треугольника $BA'C$ и M — основание этой биссектрисы, потому что треугольники MDC , MBA' и MBA подобны.

Осталось заметить, что $M_aD \parallel AA'$, значит, по обратной лемме Фусса H_a , M_a , M , D лежат на одной окружности (рис.9.7).

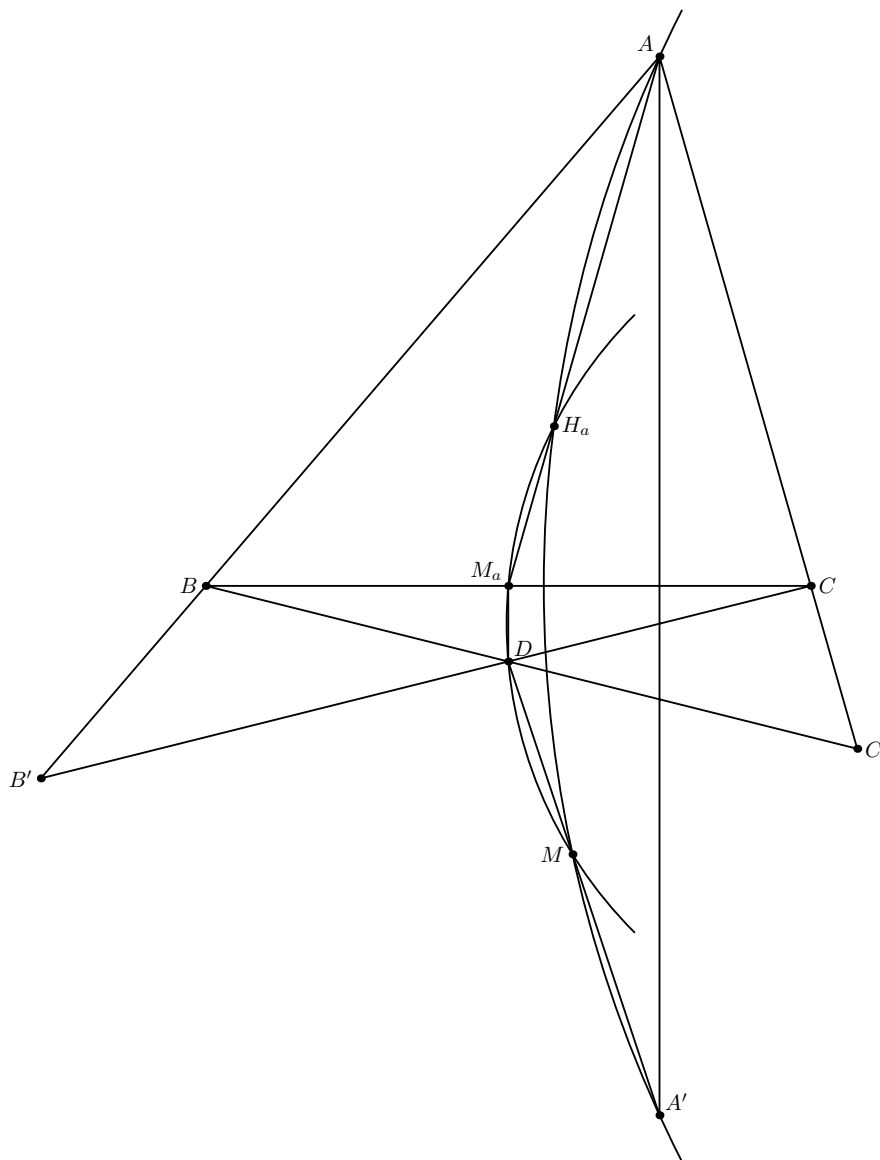


Рис. 9.7.

8. (С.Арутюнян) Восстановите вписанно-описанный четырехугольник $ABCD$ по центру I вписанной окружности, точке E пересечения касательных к описанной окружности в точках A, C и точке F пересечения касательных к описанной окружности в точках B, D .

Решение. Докажем два утверждения.

Лемма 1. $EI \parallel BD$, $FI \parallel AC$.

Доказательство. Будем считать, что $AB \geq AD$. Тогда

$$\angle AIC = \angle IAB + \angle ICB + \angle B = \frac{\pi}{2} + \angle B = \pi - \frac{\angle AEC}{2},$$

следовательно, E — центр окружности AIC и

$$\begin{aligned}\angle(IE, AC) &= \angle EIC + \angle ICA = \frac{\pi}{2} - \angle IAC + \angle ICA = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC - \angle CAD}{2} + \frac{\angle BCA - \angle ACD}{2} = \frac{\sphericalangle BC + \sphericalangle AD}{2} = \angle(BD, AC).\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что $FI \parallel AC$.

Лемма 2. Пусть AC и BD пересекают EF в точках K, L соответственно. Тогда $\angle EIK = \angle FIL = \pi/2$.

Доказательство. Пусть O — центр описанной окружности четырехугольника и прямая OI пересекает EF в точке P . Так как EF — поляра точки пересечения диагоналей, лежащей на OI , то $EF \perp OI$ и P лежит на окружности с диаметром EI , которая по лемме 1 касается окружности AIC . Кроме того, точки A, C, P лежат на окружности с диаметром OE . Значит, K — радикальный центр окружностей ACE, IPE, AIC и $\angle EIK = \pi/2$. Аналогично $\angle FIL = \pi/2$.

Из доказанных лемм получаем следующее построение.

1. Проведем через I прямые, перпендикулярные EI, IF , и отметим точки K, L .
2. Проведем через K, L прямые k, ℓ , параллельные IF, IE соответственно.
3. Построим ортоцентр O треугольника IEF и окружность с диаметром OE , она пересечет прямую k в точках A и C . Точки B и D строятся аналогично (рис. 9.8).

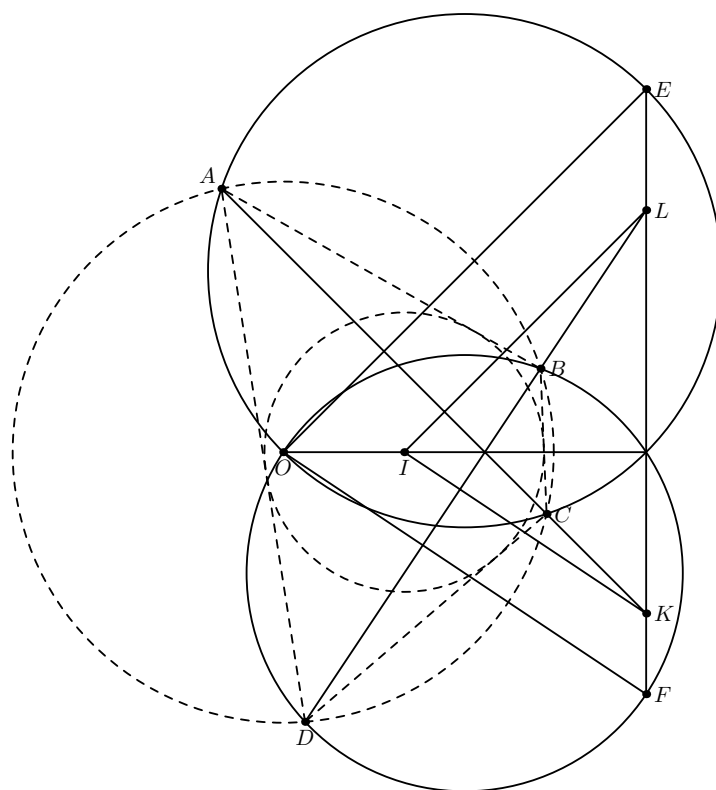


Рис. 9.8.

XXI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2025 г.

1. (И.Богданов) В выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписаны два параллелограмма $KL_1M_1N_1$ и $KL_2M_2N_2$ так, что K — середина AB , а L_1, M_1, N_1 и L_2, M_2, N_2 лежат на сторонах BC, CD, DA соответственно. Может ли оказаться, что площадь одного параллелограмма меньше половины площади четырехугольника, а площадь другого больше?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть $\angle A + \angle B < \pi$. Зафиксируем произвольный параллелограмм $KLMN$ такой, что N лежит на отрезке AP , L на отрезке BP , а M внутри треугольника ABP , где P — точка пересечения прямых AD и BC . Пусть произвольная прямая, проходящая через M , пересекает отрезки BP, AP в точках C', D' соответственно (рис. 10.1). Известно, что треугольник $PC'D'$ имеет наименьшую площадь, когда M — середина $C'D'$. В этом случае $KLMN$ — параллелограмм Вариньона четырехугольника $ABC'D'$ и его площадь равна половине площади этого четырехугольника. Таким образом, площади обоих параллелограммов $KL_1M_1N_1$ и $KL_2M_2N_2$ не меньше половины площади четырехугольника $ABCD$.

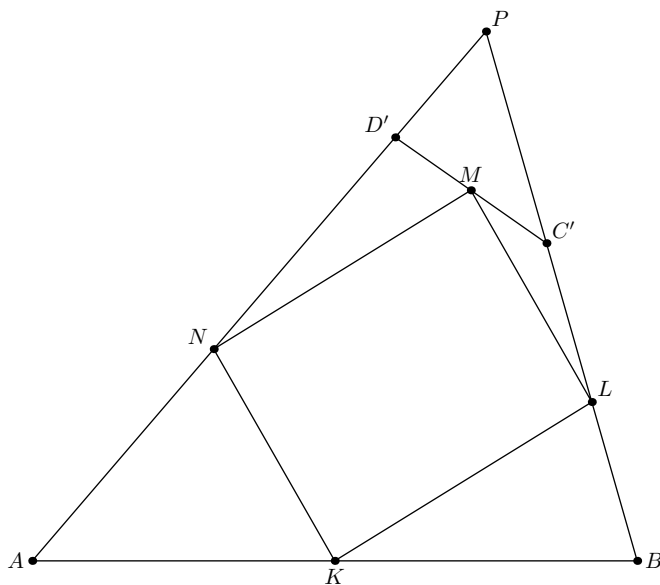


Рис. 10.1.

Аналогично получаем, что при $\angle A + \angle B > \pi$ площади обоих параллелограммов не больше половины площади четырехугольника. Наконец, при

$AD \parallel BC$ площади обоих параллелограммов равны половине площади четырехугольника.

2. (Е.Волокитин) В неравнобедренном треугольнике ABC I — центр вписанной окружности; P, Q — изогонально сопряженные точки такие, что $AP \parallel IQ \parallel BC$. Докажите, что $AP = |AB - AC|$.

Решение. Для любой точки P' такой, что $AP' \parallel BC$, сумма ориентированных площадей треугольников $P'AB$ и $P'CA$ равна нулю, а отношение этих площадей к площади треугольника $P'BC$ равно $\pm AP'/BC$. Возьмем такую точку P' , что для ориентированных площадей имеем: $S_{P'BC} : S_{P'CA} : S_{P'AB} = a : (b - c) : (c - b)$. Тогда для изогонально сопряженной точки Q' получаем $S_{Q'BC} : S_{Q'CA} : S_{Q'AB} = a : b^2/(b - c) : c^2(c - b)$, следовательно, $S_{Q'BC} : S_{ABC} = a : (a + b + c)$, т.е. $Q'I \parallel BC$. Таким образом, P', Q' совпадают с P, Q .

Примечание. Приведем идею другого решения.

Пусть a, b, c, p — стороны треугольника ABC и его полупериметр. Обозначим через X вторую точку пересечения IQ и окружности (BIC) . Тогда $BIXC$ — равнобедренная трапеция. Следовательно, проекция отрезка IX на BC равна $|(p - b) - (p - c)| = |b - c|$. Поэтому достаточно доказать, что $IX = AP$. Пусть точка X' изогонально сопряжена точке X в треугольнике ABC . Тогда точки X и X' симметричны относительно прямой AI , а значит, достаточно доказать, что точки P и X' симметричны относительно серединного перпендикуляра к AI . Пусть C — изогональный образ прямой IQ относительно треугольника ABC . Тогда точки A, B, C, I, X', P лежат на гиперболе $\mathcal{C}$, а прямые AQ и IQ её касаются. Так как отрезки IQ и AQ равны, получаем, что серединный перпендикуляр к AI — ось гиперболы $\mathcal{C}$. Тогда при симметрии относительно него точка P должна перейти в X' .

3. (Э.Алкин, А.Скопенков) Можно ли взять в пространстве шесть точек $A_1, \dots, A_6$ общего положения так, чтобы треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_4A_5A_6$ были зацеплены, а два треугольника, соответствующие любому другому разбиению данных точек на две тройки, — нет. *Два треугольника в пространстве зацеплены, если контур одного пересекает внутренность другого в единственной точке.*

Ответ. Да.

Решение. Возьмем две равные правильные пирамиды с общим основанием $A_1A_2A_3$ и вершинами A_4, A_5 , лежащими по разные стороны осно-

вания. Возьмем точку A_6 в плоскости, проходящей через ребро A_1A_4 и высоту треугольника $A_5A_2A_3$, в угле, вертикальном с углом, содержащим точки A_1, A_4, A_5 (рис. 10.3). Тогда все отрезки $A_6A_i, i = 1, \dots, 5$ лежат вне бипирамиды $A_1A_2A_3A_4A_5$, значит, точки $A_1, \dots, A_6$ удовлетворяют условию.

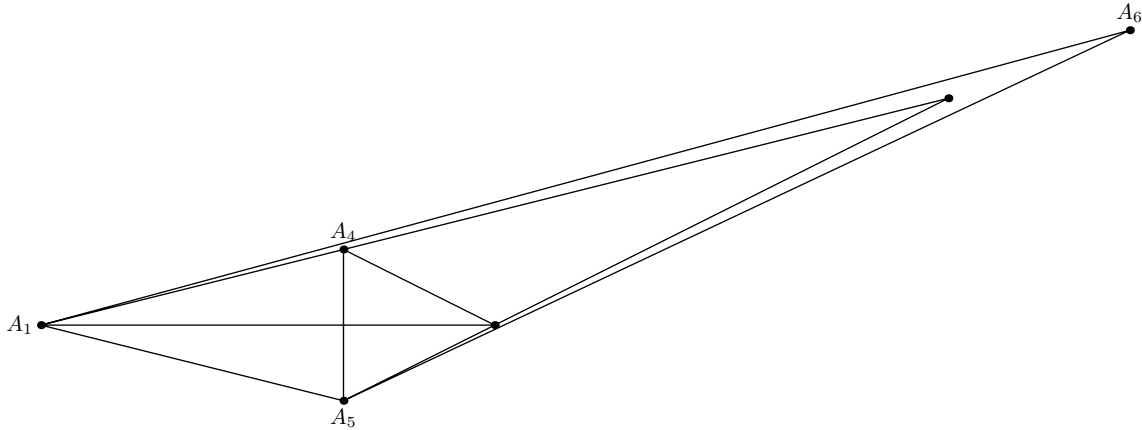


Рис. 10.3.

4. (С.Кузнецов) В треугольнике ABC отмечены центроид M , ортоцентр H и точка Лемуана L . Точка S такова, что окружности SLH, SML касаются MH , а L' инверсна L относительно описанной окружности. Докажите, что $SL' \parallel MH$.

Первое решение. Воспользуемся следующим свойством равносторонней гиперболы.

Пусть точки A, B лежат на равносторонней гиперболы центром O . Касательные в точках A, B к гиперболы пересекаются в точке S . Тогда O — это точка Шалтая треугольника SAB , соответствующая вершине S .

Действительно, построим прямоугольник $AUBV$ со сторонами, параллельными асимптотам гиперболы. Точки U, V, O, S лежат на одной прямой и образуют гармоническую четверку, следовательно, O и S инверсны относительно окружности с диаметром AB .

Применим это свойство к гиперболы Киперта $ABCMH$. Касательные к ней в точках M, H пересекаются в точке L , следовательно, S — центр гиперболы, т.е. середина отрезка T_1T_2 между двумя точками Торричелли. С другой стороны, L' — середина отрезка $T'_1T'_2$ между двумя точками Аполлония. Но $T_1T'_1 \parallel T_2T'_2 \parallel MH$ (рис. 10.4).

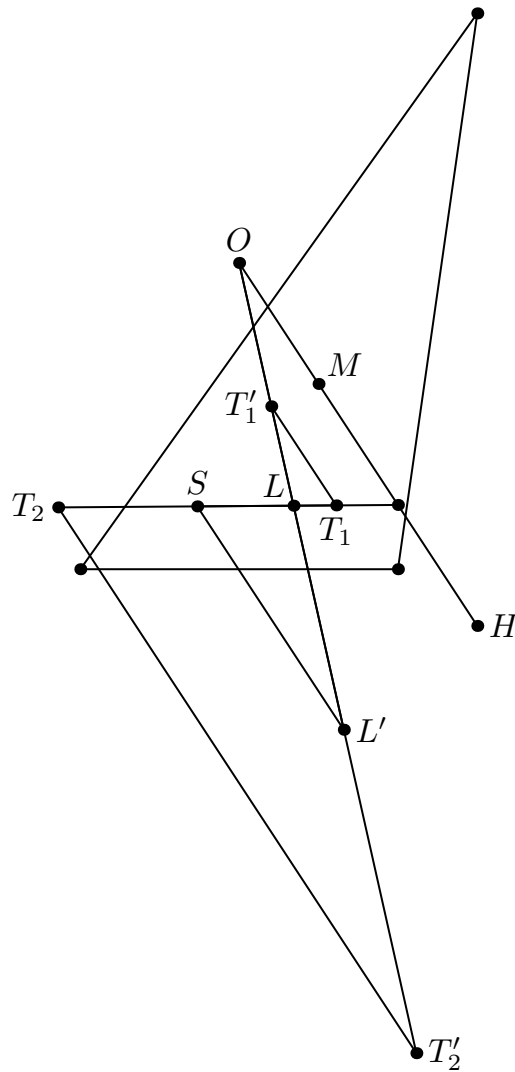


Рис. 10.4.

Второе решение. Пусть Γ — эллипс с фокусами O, H , вписанный в ABC . Будем вращать ABC по Понселе между описанной окружностью и Γ . При этом H всегда будет оставаться ортоцентром ABC как изогональный образ центра описанной окружности O , поэтому и центр тяжести M , и окружность девяти точек будут фиксированы. Точка S лежит на окружности девяти точек, как центр гиперболы Киперта, следовательно, ее инверсный образ — точка L будет двигаться по окружности Δ , центр которой лежит на MH , причем O и середина MH инверсны относительно этой окружности. Точка L' как инверсный образ L относительно описанной окружности ABC тоже движется по окружности, причем угловые скорости точек L' и S равны. Несложно убедиться, что радиус окружности, по которой движется L' равен радиусу окружности девяти точек. Следовательно, $SL' \parallel MH$.

Примечание. Точки S и L' симметричны относительно радикальной оси описанной окружности и точки M .

XXI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 1 августа 2025 г.

5. (К.Бельский) Внутри равностороннего треугольника ABC выбирается случайная точка P . Найдите вероятность того, что из отрезков AP , BP , CP можно сложить остроугольный треугольник.

Ответ. $4 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Решение. Рассмотрим поворот на $\pi/3$ вокруг точки C , переводящий A в B , а P в точку Q . Имеем $BQ = AP$, $PQ = CP$ (поскольку треугольник CPQ правильный), следовательно, стороны треугольника PBQ равны отрезкам AP , BP , CP . При этом $\angle PQB = \angle CQB - \pi/3 = \angle CPA - \pi/3$ (рис.10.5.1). Аналогично два других угла равны $\angle APB - \pi/3$ и $\angle BPC - \pi/3$. Таким образом, треугольник будет остроугольным тогда и только тогда, когда все стороны треугольника ABC видны из P под углами, меньшими $5\pi/6$.

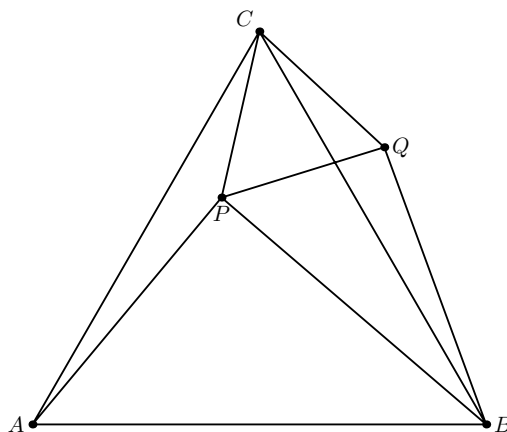


Рис. 10.5.1.

Пусть A' , B' , C' — точки, симметричные A , B , C относительно противоположных сторон треугольника ABC . Тогда сторона AB видна под углом $5\pi/6$ из точек дуги с центром C' и радиусом $C'A = AB$. Эта дуга и две аналогичные, построенные для других сторон, попарно касаются в вершинах треугольника ABC (рис.10.5.2). Поэтому площадь криволинейного треугольника, ограниченного этими дугами, равна разности площади треугольника $A'B'C'$ и утроенной площади кругового сектора с радиусом AB и углом $\pi/3$, т.е. $\sqrt{3} - \pi/2$ (если $AB = 1$). Разделив на площадь треугольника ABC , получим искомую вероятность.

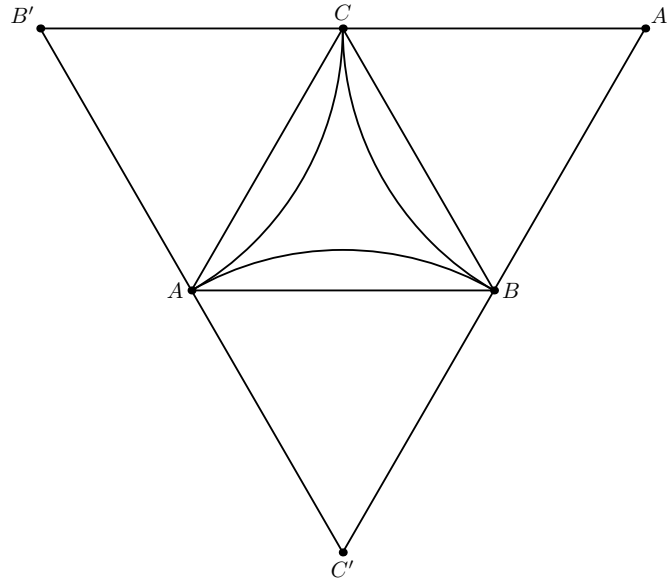


Рис. 10.5.2.

6. (Я.Щербатов) Даны окружности Ω и ω_a , являющиеся соответственно описанной и A —внеписанной для некоторого треугольника ABC . Пусть I_b , I_c — центры двух других внеписанных окружностей, а A_b , A_c — точки касания продолжений сторон AB , AC с ω_a . Докажите, что точка пересечения прямых A_bI_b и A_cI_c не зависит от треугольника ABC .

Решение. Пусть окружности Ω и ω_a пересекаются в точках P и Q , а прямые PQ и AB в точке X . Так как PQ — радикальная ось окружностей Ω и ω_a , а AB — радикальная ось окружностей Ω и I_bABI_a , точка X лежит на радикальной оси окружности ω_a и окружности с диаметром I_bI_a , т.е. на поляре точки I_b относительно ω_a . Таким образом, поляры относительно ω_a точек A_b и I_b пересекаются на прямой PQ , а значит, прямая I_bA_b проходит через точку Y пересечения касательных к ω_a в точках P , Q . Аналогично A_cI_c проходит через точку Y , которая, очевидно, не зависит от треугольника ABC (рис.10.6).

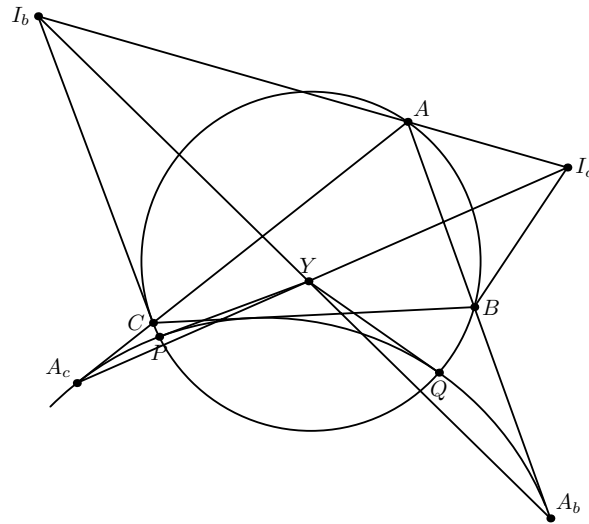


Рис. 10.6.

7. (М.Векшин) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Через точки A, B, C, D проведена произвольная коника. Рассмотрим четыре прямые, получающиеся при изогональном сопряжении этой коники относительно треугольников ABC, ABD, BCD, ACD . Докажите, что четырёхугольник, образованный этими прямыми, — описанный.

Первое решение. Уравнение произвольной коники, проходящей через A, B, C, D , имеет вид $tF_1(x, y) + (1 - t)F_2(x, y) = 0$, где $F_1(x, y) = 0, F_2(x, y) = 0$ — уравнения двух проходящих через A, B, C, D парабол. Иzegoнальные образы этих коник относительно треугольника ABC — параллельные прямые, так как образом точки D является бесконечно удаленная точка. Очевидно, что при равномерном изменении t соответствующая прямая тоже движется равномерно. При этом изогональные образы описанных парабол касаются окружности $ABCD$. Следовательно, изогональные образы любой коники равноудалены от центра окружности $ABCD$.

Второе решение. Обозначим через X и Y бесконечно удалённые точки данной коники. Пусть X_a и Y_a — точки, изогонально сопряжённые относительно треугольника BCD с X и Y соответственно. Заметим, что $\widehat{X_a Y_a} = 2\angle(X, Y)$, то есть эта дуга не зависит от выбора треугольника. Если дуги, которые отсекались прямыми — изогональными образами коники, равны, то равны и расстояния от центра описанной окружности до этих прямых.

Примечание. Если коника — эллипс, точки X, Y, X_a, Y_a будут мнимыми, но равенство $\widehat{X_a Y_a} = 2\angle(X, Y)$ выполнено и в этом случае.

Третье решение. Докажем, что изогональные образы коники относительно треугольников ABC и ABD симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB , из этого и аналогичных утверждений будет следовать, что все четыре прямые равноудалены от центра описанной окружности. Изогональные образы коник относительно каждого треугольника образуют пучок параллельных прямых. Легко видеть, что эти прямые образуют равные углы с AB , поэтому достаточно доказать, что соответствующие прямые пучков пересекаются на серединном перпендикуляре. Очевидно, что соответствие между пучками проективно и бесконечна прямая соответствует сама себе. По лемме Соллертинского достаточно найти две коники, образы которых пересекаются на AB . Подходят две вырожденных коники: $AC \cup BD$ и $AD \cup BC$.

8. (К.Бельский) Дан остроугольный треугольник ABC и прямая ℓ , которая пересекает стороны AB , AC и прямую BC в точках C_1 , B_1 , A_1 соответственно. Окружность ω_a касается прямой BC в точке A_1 и меньшей дуги BC описанной окружности треугольника ABC . Аналогично определяются окружности ω_b , ω_c . Докажите, что у окружностей ω_a , ω_b , ω_c есть общая касательная.

Решение. Пусть A_2 , B_2 , C_2 — точки касания окружности (ABC) с ω_a , ω_b , ω_c соответственно. Тогда из леммы Архимеда и основного свойства биссектрисы получаем, что $\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{BC_2}{AC_2}$. По синусной теореме Чебы и условию теоремы Менелая для прямой ℓ легко видеть, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке. Сделаем инверсию с центром в точке A . Получим следующую задачу.

Окружность ω_b касается прямых AC , BC в точках B_1 , B_2 , а окружность ω_c касается прямых AB , BC в точках C_1 , C_2 соответственно. Точка A_2 на BC такова, что $A_2C \cdot A_2C_2 = A_2B \cdot A_2B_2$. Надо доказать, что существует окружность, которая касается окружностей ω_a , ω_b , ω_c и проходит через точку A .

Проведем окружность ω , которая проходит через A и касается окружностей ω_b и ω_c внутренним образом. Будем доказывать, что окружности ω и ω_a касаются. Пусть ω пересекает BC в точках X и Y . Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников AXY и ABC . По лемме Саваямы получаем, что прямые B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в точке I_1 . Тогда треугольники BI_2C и $B_2I_1C_2$ гомотетичны. Откуда следует, что точка A_2 лежит на прямой I_1I_2 . Осталось только применить обратную лемму Саваямы для одной из касательных из точки A к ω_a и прямой

BC (рис. 10.8).

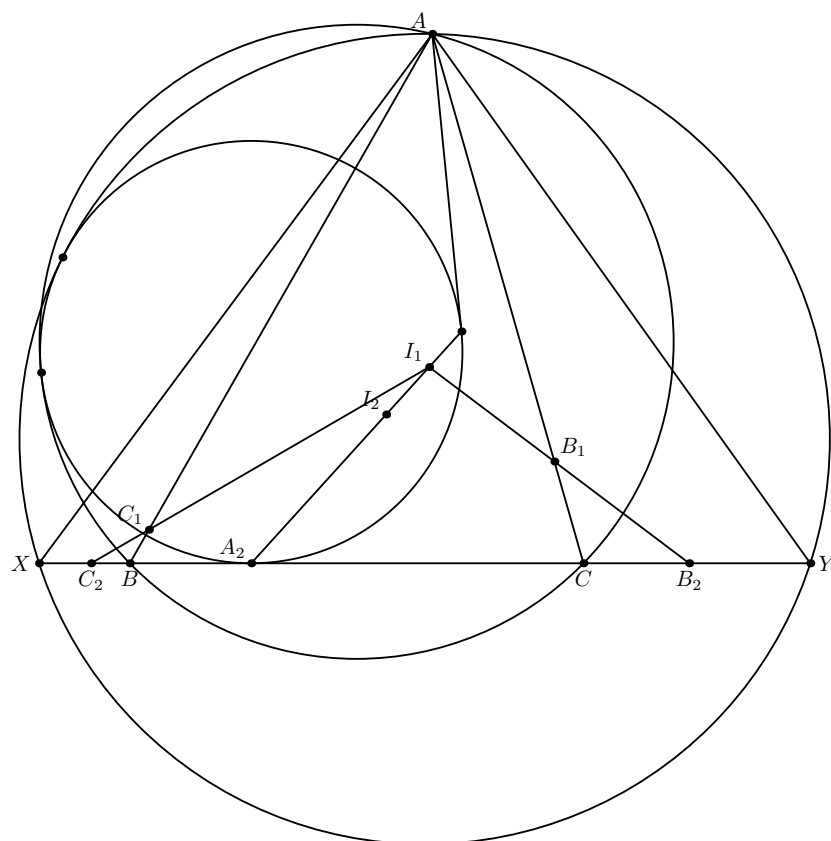


Рис. 10.8.