Геометрия олимпиады им. Леонарда Эйлера

В скобках после номера задачи указано на какой по счёту олимпиаде она предлагалась. Решения всех задач можно найти на официальной странице олимпиады: matol.ru.

1 Дистанционный тур

1.1 (1). Дан равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$). На сторонах BC, AC, AB отмечены точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Оказалось, что C_1B_1 перпендикулярно AC, B_1A_1 перпендикулярно BC и $B_1A_1 = B_1C_1$. Докажите, что A_1C_1 перпендикулярно AB.

1.2 (1). Две биссектрисы треугольника пересекаются под углом 60 градусов. Докажите, что один из углов этого треугольника равен 60 градусам.

1.3 (1). Могут ли расстояния от точки плоскости до вершин некоторого квадрата быть равными 1, 1, 2 и 3?

1.4 (2). Точка D лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, но не совпадает с ее серединой. Докажите, что среди отрезков AD, BD и CD нет равных.

1.5 (2). В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол в 40 градусов. Найдите угол ABC.

1.6 (2). В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, вчетверо короче гипотенузы. Найдите острые углы треугольника.

1.7 (2). Вот четыре свойства четырёхугольников:
(1) противоположные стороны попарно равны;
(2) две противоположных стороны параллельны;
(3) какие-то две соседние стороны равны;
(4) диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения в одном и том же отношении.

Один из двух данных четырёхугольников обладает какими-то двумя из этих свойств, другой — двумя остальными. Докажите, что один из этих двух четырёхугольников — ромб.

1.8 (3). Точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно прямоугольника $ABCD$. Докажите, что $AE < 2EF$.

1.9 (3). Внутри угла AOB, равного $120°$, проведены лучи OC и OD так, что каждый из них является биссектрисой какого-то из углов, получившихся на чертеже. Найдите величину угла AOC. Укажите все возможные варианты.

1.10 (3). На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E, а на биссектрисе BD — точка F таким образом, что $EF||AC$ и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.

1.11 (3). Разделите прямоугольный треугольник с углом $30°$ на два меньших треугольника так, чтобы какая-то медиана одного из этих треугольников была параллельна одной из биссектрис второго треугольника.

1.12 (3). В пятиугольнике $ABCDE$ $AB = BC = CD = DE$, $\angle B = 96°$ и $\angle C = \angle D = 108°$. Найдите угол E.

1.13 (4). В треугольнике ABC угол C втрое больше угла A, а сторона AB вдвое больше стороны BC. Докажите, что угол ABC равен 60 градусам.

1.14 (4). В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, и на ее продолжении за точку L выбрана точка K, для которой $LK = AB$. Оказалось, что $AK||BC$. Докажите, что $AB > BC$.

1.15 (4). Внутри острого угла BAC взяли такую точку D, что угол CAD вдвое больше угла BAD. Могла ли точка D оказаться вдвое дальше от прямой AC, чем от прямой AB?

1.16 (4). В треугольнике ABC $AC = 1$, $AB = 2$, O — точка пересечения биссектрис. Отрезок, проходящий через точку O параллельно стороне BC, пересекает стороны AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите периметр треугольника AKM.

1.17 (4). Можно ли из пяти одинаковых прямоугольников с периметром 10 составить один прямоугольник с периметром 22?

2 Второй тур

2.1 (1). Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что $BL = CM$. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный.

2.2 (1). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ некоторая точка диагонали AC принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AB и CD, а некоторая точка диагонали BD принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AD и BC. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

2.3 (2). На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K так, что $AB = AK$. Отрезок AK пересекает биссектрису CL в ее середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

2.4 (2). Биссектрисы углов A и C трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а биссектрисы углов B и D — в точке Q, отличной от P. Докажите, что если отрезок PQ параллелен основанию AD, то трапеция равнобокая.

2.5 (3). На доске нарисованы три четырёхугольника. Петя сказал: «На доске нарисованы по крайней мере две трапеции». Вася сказал: «На доске нарисованы по крайней мере два прямоугольника». Коля сказал: «На доске нарисованы по крайней мере два ромба». Известно, что один из мальчиков сказал неправду, а двое других — правду. Докажите, что среди нарисованных на доске четырёхугольников есть квадрат. (Напомним, что трапеция — это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — нет.)

2.6 (3). Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AD = AB + CD$. Оказалось, что биссектриса угла A проходит через середину стороны BC. Докажите, что биссектриса угла D также проходит через середину BC.

2.7 (3). В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и AB соответственно. На медиане BM выбрана точка P, не лежащая на CN. Оказалось, что $PC = 2PN$. Докажите, что $AP = BC$.

2.8 (4). Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD — прямой и $BC + CD = AD$. Найдите отношение оснований $AD : BC$.

2.9 (4). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABC и ADC прямые. На сторонах AB, BC, CD, DA взяты точки K, L, M, N соответственно так, что $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что середина диагонали AC равноудалена от прямых KL и MN.

3 Финал

3.1 (1). В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что угол ADC вдвое больше угла ABC. Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до прямой, делящей пополам углы, смежные с углом ADC, равно $AD + DC$.

3.2 (1). В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнены соотношения $AB = BD$; $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.

3.3 (2). В четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC и перпендикулярна стороне AD, а диагональ AC перпендикулярна стороне CD. На стороне AD взята точка K такая, что $AC = AK$. Биссектриса угла ADC пересекает BK в точке M. Найдите угол ACM.

3.4 (2). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы B и D равны, $CD = 4BC$, а биссектриса угла A проходит через середину стороны CD. Чему может быть равно отношение $\frac{AD}{AB}$?

3.5 (3). Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = CD$, выбрана точка P таким образом, что сумма углов PBA и PCD равна 180 градусам. Докажите, что $PB+PC < AD$.

3.6 (3). Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $AB||CD$, $BC||AD$, $AC||DE$, $CE \perp BC$. Докажите, что EC — биссектриса угла BED.

3.7 (4). На стороне BC треугольника ABC взята точка D таким образом, что серединный перпендикуляр к отрезку AD проходит через центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что этот перпендикуляр проходит через вершину треугольника ABC.

3.8 (4). Существуют ли два многоугольника (не обязательно выпуклых), обладающих следующим свойством: прикладывая их друг к другу (без наложения), можно получить многоугольники с любым числом сторон от 3 до 100 включительно?

3.9 (4). Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $2\angle A + \angle B = \angle C$. Внутри этого треугольника на биссектрисе угла A выбрана точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KBC = 2\angle KBA$.