V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Д.Прокопенко) (8) Точки B_1 и B_2 лежат на луче AM, а точки C_1 и C_2 на луче AK. Окружность с центром O вписана в треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2. Докажите, что углы B_1OB_2 и C_1OC_2 равны.

   Решение. Пусть отрезки B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в точке D (рис.1). Тогда по теореме о внешнем угле треугольника $\angle B_1OB_2 = \angle AB_1O - \angle AB_2O = (\angle AB_1C_1 - \angle AB_2C_2)/2 = \angle B_1DB_2/2$. Аналогично $\angle C_1OC_2 = \angle C_1DC_2/2$, т.е. эти углы равны.

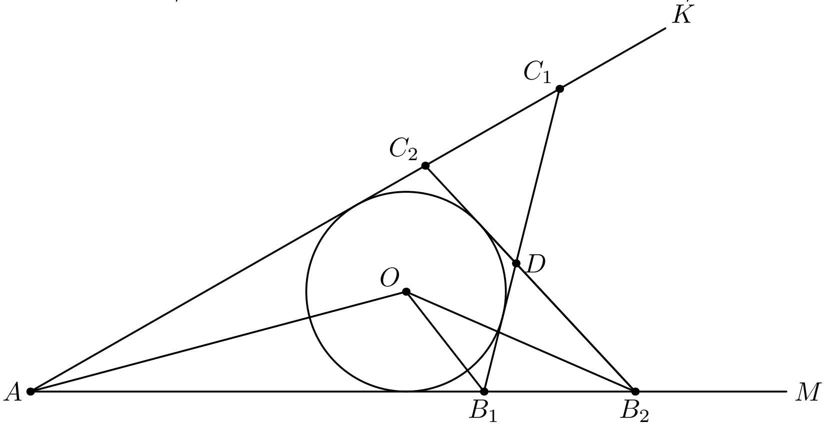

Рис.1

2. (Б.Френкин) (8) Через каждую вершину неравнобедренного треугольника ABC проведен отрезок, разбивающий его на два треугольника с равными периметрами. Верно ли, что все эти отрезки имеют разные длины?

   Ответ. Да.

   Решение. Предположим, например, что отрезки AA' и BB' равны. Тогда из равенства периметров треугольников $AA'B$ и $AA'C$ следует, что $BA' = (AB + BC + CA)/2 - AB$. Аналогично, $AB' = (AB + BC + CA)/2 - AB$, и значит, треугольники ABA' и BAB' равны по трем сторонам. Но тогда $\angle A = \angle B$, что противоречит неравнобедренности треугольника ABC.

3. (Д.Шноль) (8) Биссектрисы углов трапеции образуют при пересечении четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что трапеция равнобокая.

   Решение. Пусть $KLMN$ — четырехугольник, образованный биссектрисами (рис. 3). Так как AK и BK — биссектрисы смежных углов трапеции, то $\angle LKN = 90°$. Аналогично, $\angle LMN = 90°$. Следовательно, $LK^2 + KN^2 = LM^2 + MN^2$. С другой стороны, из перпендикулярности диагоналей получаем, что $KL^2+MN^2 = KN^2+LM^2$. Из этих двух равенств следует, что $KL = LM$ и $MN = NK$, а значит $\angle NKM = \angle NMK$. Но точки K, M, как точки пересечения биссектрис смежных углов, равноудалены от оснований трапеции, т.е. $KM \parallel AD$. Поэтому $\angle CAD = \angle BDA$, и трапеция равнобокая.

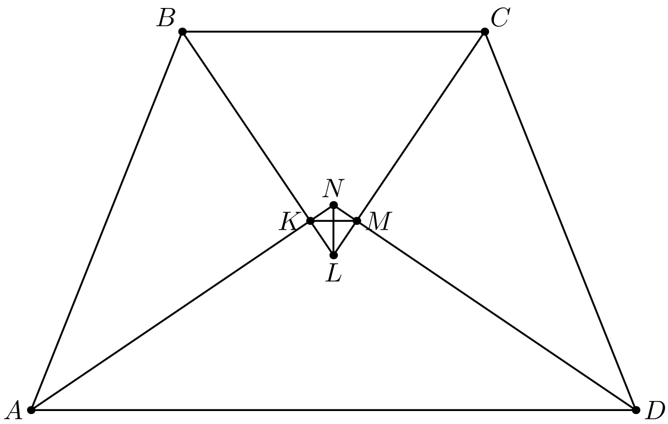

Рис.3

4. (Д.Прокопенко) (8–9) Две окружности пересекаются в точках P и Q. Из точки Q пустили в каждую из окружностей по одному лучу, которые отражаются от окружностей по закону "угол падения равен углу отражения". Точки касания траектории первого луча — $A_1, A_2, \dots$ второго — $B_1, B_2, \dots$.

   Оказалось, что точки A_1, B_1 и P лежат на одной прямой. Докажите, что тогда все прямые A_iB_i проходят через точку P.

   Решение. При отражении лучей от окружностей выполняются условия $QA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots$ и $QB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots$. Значит, $\angle(PQ, PA_1) = \angle(PA_1, PA_2) = \angle(PA_2, PA_3) = \cdots$ и $\angle(PQ, PB_1) = \angle(PB_1, PB_2) = \angle(PB_2, PB_3) = \cdots$ (углы ориентированные). Кроме того, так как точки A_1, B_1, P лежат на одной прямой, то $\angle(PQ, PA_1) = \angle(PQ, PB_1)$. Следовательно, при любом i имеем $\angle(PA_{i-1}, PA_i) = \angle(PB_{i-1}, PB_i)$, откуда по индукции получаем, что точки A_i, B_i, P лежат на одной прямой.

5. (Д.Шноль) (8–9) Дан треугольник ABC и построена вневписанная окружность с центром O, касающаяся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Точка O_1 симметрична точке O относительно прямой BC. Найдите величину угла A, если известно, что точка O_1 лежит на описанной около треугольника ABC окружности.

   Решение. Из условия задачи следует, что $\angle BOC = \angle BO_1C = \angle A$. С другой стороны, $\angle BOC = 180° - (180° - \angle B)/2 - (180° - \angle C)/2 = (180° - \angle A)/2$. Отсюда получаем, что $\angle A = 60°$.

6. (Б.Френкин) (8–9) Найдите геометрическое место центров всех вневписанных окружностей прямоугольных треугольников, имеющих данную гипотенузу.

   Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, I_a, I_b, I_c — центры его вневписанных окружностей (см. рис. 6). Тогда

$$\angle AI_cB = 180° - (180° - \angle BAC)/2 - (180° - \angle ABC)/2 = (\angle BAC + \angle ABC)/2 = 45°,$$

$$\angle AI_aB = 180° - \angle BAC/2 - \angle ABC - (180° - \angle ABC)/2 = 90° - (\angle BAC + \angle ABC)/2 = 45°$$

   и аналогично $\angle AI_bB = 45°$, причем точки I_a, I_b лежат по одну сторону от прямой AB, а I_c по другую. Следовательно, все эти три точки лежат на двух окружностях c_1, c_2, проходящих через точки A, B, в которых хорда AB стягивает дугу в $90°$.

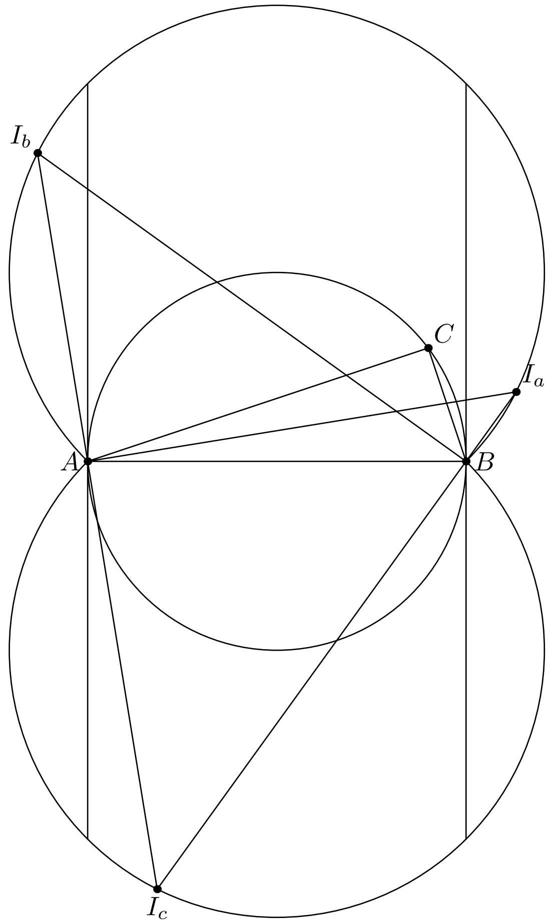

Рис.6

Пусть прямые k, l проходят соответственно через A, B перпендикулярно AB. Когда точка C описывает полуокружность с диаметром AB, каждый из центров пробегает четверть соответствующей окружности. А именно, I_a пробегает дугу между B и точкой пересечения окружности с l; I_b — дугу между A и точкой пересечения окружности с k; I_c — дугу между точками пересечения окружности с k и l. Когда C описывает всю окружность с диаметром AB, исключая точки A, B, центры пробегают искомое ГМТ, а именно дуги окружностей c_1, c_2, которые лежат вне окружности с диаметром AB и из которых исключены их концы A, B и точки их пересечения с прямыми k, l.

7. (В.Протасов) (8–9) Дан треугольник ABC. Из вершин B и C опущены перпендикуляры BM и CN на биссектрисы углов C и B соответственно. Докажите, что прямая MN пересекает стороны AC и AB в точках их касания со вписанной окружностью.

   Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, P — точка пересечения MN и AC (рис. 7). Так как точки M и N лежат на окружности с диаметром BC, то $\angle MNB = \angle MCB = \angle ACI$. Следовательно, точки C, I, P, N лежат на одной окружности и $\angle CPI = \angle CNI = 90°$. Значит, P — точка касания AC с вписанной окружностью. Для стороны AB доказательство аналогично.

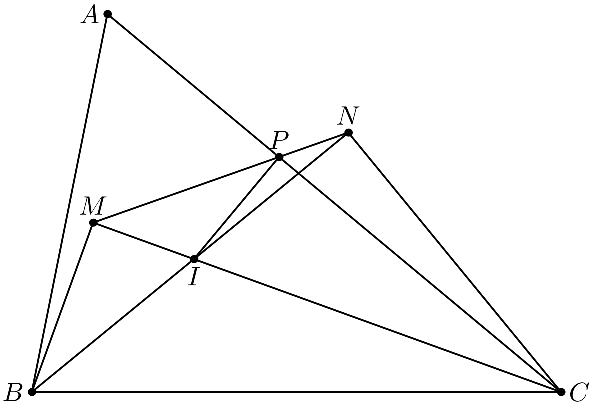

Рис.7

8. (С.Маркелов) (8–10) Многоугольник можно разрезать на две равные части тремя различными способами. Верно ли, что у него обязательно есть центр или ось симметрии?

   Ответ. Нет, см., например, рис.8.

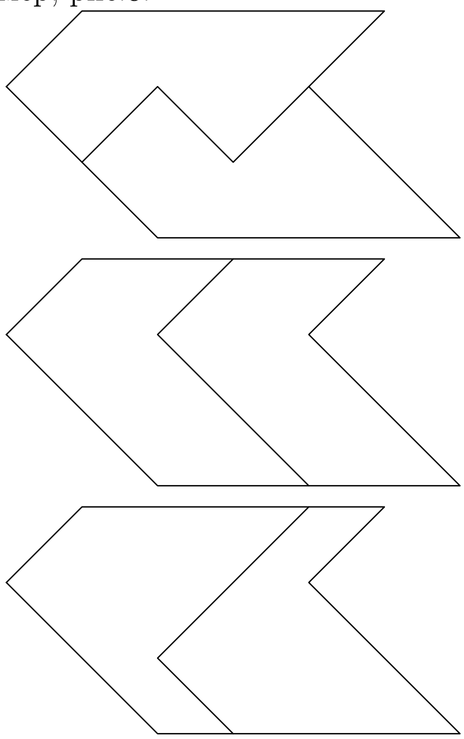

Рис.8

9. (В.А.Ясинский, Украина) (8–11) На плоскости задано n точек, являющихся вершинами выпуклого n-угольника, $n > 3$. Известно, что существует ровно k равносторонних треугольников со стороной 1, вершины которых — заданные точки.

   а) Докажите, что $k < \frac{2}{3}n$.

   б) Приведите пример конфигурации, для которой $k > 0,666n$.

   Решение. а) Для каждой из данных точек существует проходящая через неё прямая, такая что все другие заданные точки лежат по одну сторону от этой прямой. Это позволяет среди всех единичных треугольников с вершиной в рассматриваемой точке выделить два треугольника — "крайний левый"треугольник и "крайний правый"треугольник (не исключено, что они могут совпадать). Будем называть эти два единичных треугольника присоединёнными к этой вершине

Лемма. Каждый единичный треугольник будет присоединённым, по крайней мере, трижды.

Доказательство. Предположим, что единичный треугольник не является "крайним левым"для вершины C и не является "крайним правым"для вершины B (см. рис.9).

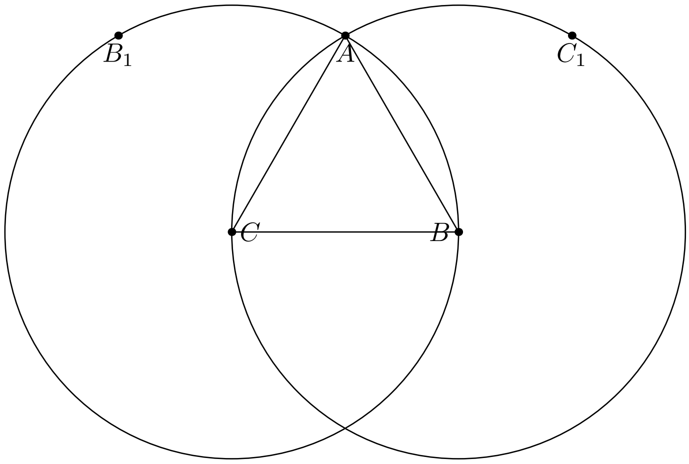

Рис.9

Тогда на дугах AB_1 и AC_1 обязательно будут заданные точки. Но эти точки вместе с точками A, B и C не образуют выпуклую оболочку. Поэтому этот треугольник будет присоединённым одним из двух выше указанных способов. Значит, он будет "крайним левым"для вершины C или "крайним правым"для вершины B. Аналогично, он будет "крайним левым"для вершины A или "крайним правым"для вершины C, а также, он будет "крайним левым"для вершины B или "крайним правым"для вершины A. А это значит, что он будет присоединённым по крайней мере трижды, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что для заданных точек существует k единичных треугольников. Поскольку для каждой из n точек существует максимум два присоединённых треугольника, то $2n$ — это наибольшее количество всех возможных присоединений. Так как каждый единичный треугольник будет присоединённым, по крайней мере, трижды, то $3k$ — это наименьшее количество из всех возможных присоединений. Таким образом, $3k \leq 2n$, т.е. $k \leq \frac{2}{3}n$.

б) Рассмотрим ромб, который состоит из двух правильных треугольников, и будем поворачивать его на очень "маленькие"углы вокруг одной из его тупых вершин так, что в результате получим m ромбов.

Если все углы поворота меньше $\pi/3$, то все вершины наших ромбов будут вершинами выпуклого многоугольника. При этом $n = 3m + 1$, $k = 2m$, и, если m достаточно велико, $k > 0,666n$.

10. (Ф.Ивлев) (9) Пусть ABC — остроугольный треугольник, CC_1 — его биссектриса, O — центр описанной окружности. Точка пересечения прямой OC_1 с перпендикуляром из C на AB лежит на описанной окружности треугольника AOB. Найдите угол C.

Решение. Пусть D — точка пересечения OC_1 с перпендикуляром из C на AB (рис.10). Так как D лежит на описанной окружности треугольника AOB и $AO = OB$, то $\angle ADC_1 = \angle BDC_1$. Значит, $AD/BD = AC_1/BC_1 = AC/BC$. С другой стороны, так как $CD \perp AB$, то $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$. Из этих равенств следует, что $AC = AD$, т.е. D симметрична C относительно AB. Но тогда CC_1 пересекает серединный перпендикуляр к AB в точке, симметричной O. Поскольку точка пересечения биссектрисы и серединного перпендикуляра лежит на описанной окружности, получаем, что хорда AB делит перпендикулярный ей радиус пополам. Следовательно, опирающийся на эту дугу $\angle C = 60°$.

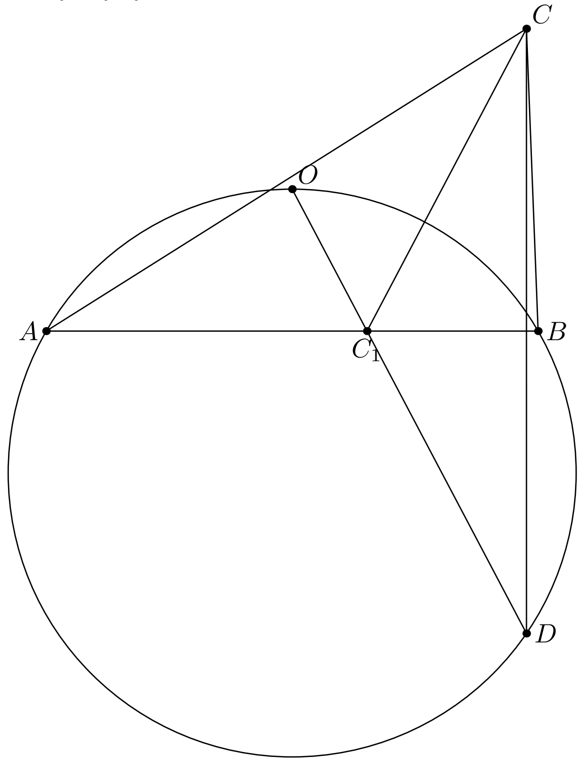

Рис.10

11. (А.Блинков) (9) Дан четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается стороны CD, а окружность, описанная около треугольника ACD, касается стороны AB. Докажите, что диагональ AC меньше, чем расстояние между серединами сторон AB и CD.

   Решение. Из условия следует, что $\angle BAC + \angle BCD = \angle ACD + \angle BAD = 180°$. Значит, $\angle BCA = \angle CAD$, т.е. $AD \parallel BC$ и отрезок, соединяющий середины AB и CD, является средней линией трапеции и равен $(AD + BC)/2$. Кроме того, так как $\angle ACD = \angle ABC$ и $\angle BAC = \angle CDA$, то треугольники ABC и DCA подобны. Следовательно, $AC^2 = AD \cdot BC$ и утверждение задачи вытекает из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

12. (Д.Прокопенко) (9–10) В треугольнике ABC провели биссектрису CL. Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно CL, A_2 и B_2 симметричны точкам A и B относительно L. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников AB_1B_2 и BA_1A_2. Докажите, что углы O_1CA и O_2CB равны.

   Решение. Из условия следует, что $CB_1/CA = CB/CA = BL/LA = B_2L/AL$, т.е.

$B_1B_2 \parallel CL$ (рис.12). Аналогично $A_1A_2 \parallel CL$. Значит, $\angle AB_1B_2 = \angle BA_1A_2 = \angle C/2$. При симметрии относительно CL точки B и A_1 перейдут в B_1 и A, а точка A_2 — в некоторую точку A'. При этом $\angle A'AB_2 + \angle A'B_1B_2 = \angle A + \angle B + 2\angle C/2 = 180°$. Следовательно, четырехугольник $AA'B_1B_2$ вписанный и точки O_1, O_2 симметричны относительно CL.

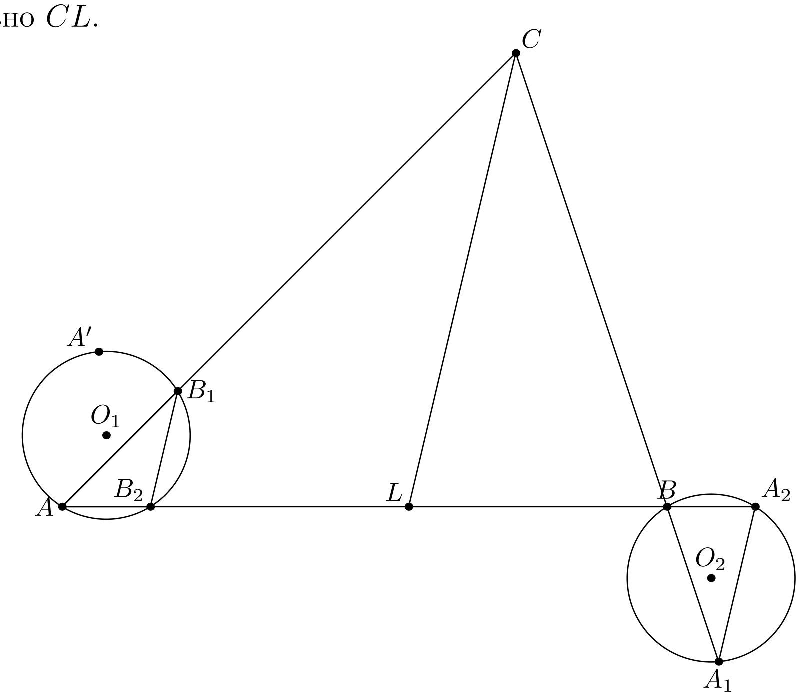

Рис.12

13. (А.Заславский) (9–10) В треугольнике ABC отметили центр вписанной окружности, основание высоты, опущенной на сторону AB, и центр вневписанной окружности, касающейся этой стороны и продолжений двух других. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его.

Решение. Центры вписанной и вневписанной окружностей I и I_c лежат на биссектрисе угла C. Пусть C' — точка пересечения этой биссектрисы со стороной AB (рис.13). Тогда $CI/CI_c = r/r_c = C'I/C'I_c$, где r, r_c — радиусы вписанной и вневписанной окружностей. Поэтому для любой точки X окружности с диаметром CC' отношение XI/XI_c будет одним и тем же. Так как основание H высоты, опущенной на AB, лежит на этой окружности, $HI/HI_c = CI/C/I_c = C'I/C'I_c$, т.е. HC' и HC — внутренняя и внешняя биссектрисы угла IHI_c. Следовательно, проведя эти биссектрисы, мы восстановим точку C и прямую AB. Поскольку $\angle IAI_c = \angle IBI_c = 90°$, точки A, B лежат на окружности с диаметром II_c. Соответственно, построив эту окружность и найдя точки ее пересечения с прямой AB, мы восстановим треугольник.

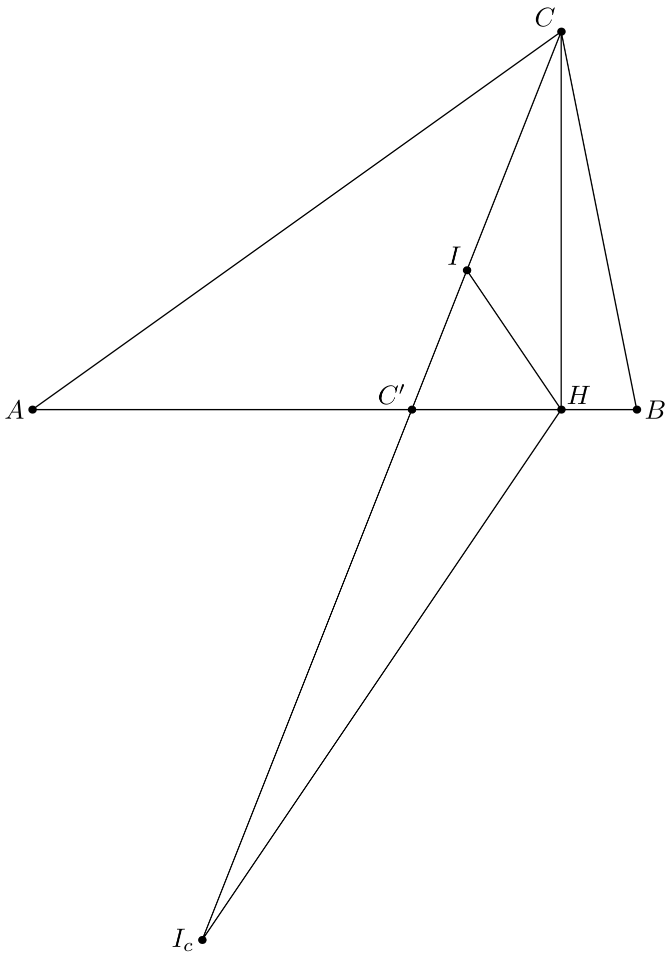

Рис.13

14. (В.Протасов) (9–10) Дан треугольник ABC площади 1. Из вершины B опущен перпендикуляр BM на биссектрису угла C. Найдите площадь треугольника AMC.

Первое решение. Проведем через точку B прямую, параллельную AC до пересечения с биссектрисой угла C в точке N (рис.14). Так как $\angle BNC = \angle ACN = \angle BCN$, то треугольник BCN — равнобедренный и BM его медиана. Следовательно, $S_{AMC} = \frac{1}{2}S_{ANC} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}$.

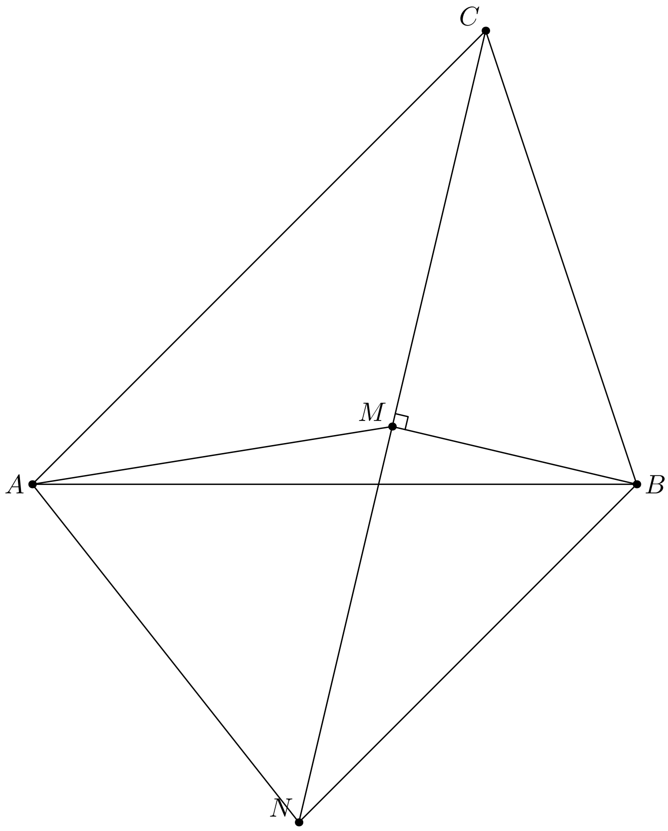

Рис.14

Второе решение. Так как $S_{AMC} = \frac{1}{2}AC \cdot CM \sin\frac{C}{2}$ и $CM = BC\cos\frac{C}{2}$, то $S_{AMC} = \frac{1}{4}AC \cdot BC \sin C = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{1}{2}$.

15. (Б.Френкин) (9–10) Даны окружность и не лежащая на ней точка. Из всех треугольников, одна вершина которых совпадает с данной точкой, а две другие лежат на окружности, выбран треугольник наибольшей площади. Докажите, что он равнобедренный.

Решение. Пусть C — данная точка, A, B — точки на окружности (рис.15). Если касательная к окружности в точке A не параллельна CB, то, переместив точку A, можно увеличить расстояние от нее до BC, а значит, и площадь треугольника. Аналогично, касательная в точке B параллельна CA. Следовательно, прямые AC и BC симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB, т.е. $AC = BC$.

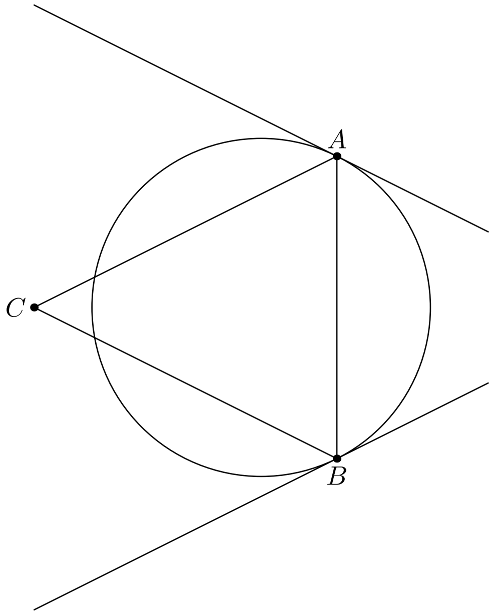

Рис.15

Отметим, что проведенное рассуждение не зависит от того, лежит ли данная точка внутри или вне окружности.

16. (А.Заславский) (9–11) Три прямые проходят через точку O и образуют попарно равные углы. На одной из них взяты точки A_1, A_2, на другой — B_1, B_2, так что точка C_1 пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 лежит на третьей прямой. Пусть C_2 — точка пересечения A_1B_2 и A_2B_1. Докажите, что угол C_1OC_2 прямой.

    Решение. Пусть C_3 — точка пересечения прямых OC_1 и A_2B_1 (рис.16). Применив сначала к треугольнику OA_2B_1 и точке C_1 теорему Чевы, а затем к этому же треугольнику и прямой A_1B_2 теорему Менелая, получаем, что $C_2A_2/C_2B_1 = C_3A_2/C_3B_1 = OA_2OB_1$. Следовательно, OC_2 — внешняя биссектриса угла A_2OB_1 и $OC_2 \perp OC_1$.

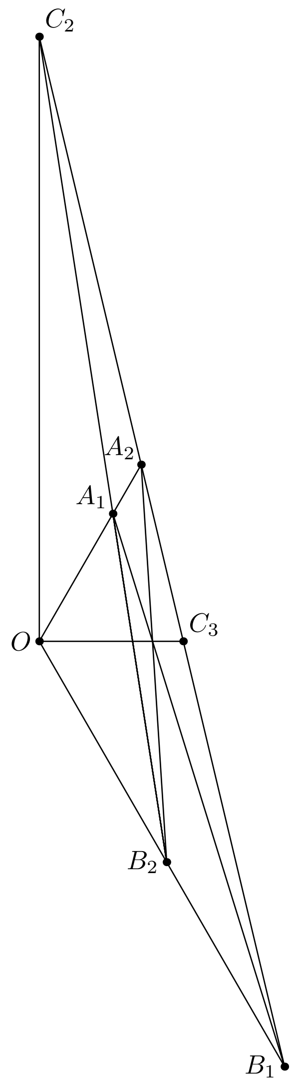

Рис.16

17. (А. Заславский.) (9–11) Дан треугольник ABC и точки X, Y, не лежащие на его описанной окружности. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции X на BC, CA, AB, а A_2, B_2, C_2 — проекции Y. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A_1, B_1, C_1 на, соответственно, B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямая XY проходит через центр окружности, описанной около ABC.

    Решение. Пусть прямая XY проходит через центр O описанной окружности. Зафиксируем точку Y и будем двигать точку X по прямой. При этом перпендикуляры из A_1, B_1, C_1 на стороны $A_2B_2C_2$ перемещаются равномерно и параллельно себе и, значит, точки их пересечения движутся по прямым. Когда точка X совпадает с O или Y, три перпендикуляра пересекаются в одной точке, следовательно, это выполняется для любого положения точки X.

    Из предыдущего рассуждения следует, что для фиксированной точки Y множество точек X, для которых перпендикуляры пересекаются в одной точке, это либо прямая OY, либо вся плоскость. Предположим, что имеет место второй случай, и возьмем в качестве X точку C. Тогда точки A_1, B_1 совпадают с C, а C_1 с основанием высоты треугольника ABC, проведенной из C. Так как три перпендикуляра пересекаются в одной точке, $A_2B_2 \parallel AB$, т.е. Y лежит на прямой OC. Взяв теперь в качестве X

другую вершину треугольника, получим, что Y совпадает с O.

18. (Б.Френкин) (9–11) На плоскости даны три параллельные прямые. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей треугольников, вершины которых расположены (по одной) на этих прямых.

Ответ. Полоса, края которой не входят в ГМ, параллельны данным прямым и находятся посредине между средней прямой и крайними.

Решение. Если произвольный треугольник с вершинами на данных прямых перенести параллельно этим прямым, его центр вписанной окружности подвергнется такому же переносу. Следовательно, искомое ГМТ является полосой с краями, параллельным исходным прямым.

Пусть a, c — крайние из исходных прямых, b — средняя, и на них соответственно находятся вершины треугольника A, C, B. Проведём диаметр вписанной окружности, перпендикулярный этим прямым, и рассмотрим его конец, ближайший к прямой a (рис.18). Он лежит ближе к a, чем точка касания вписанной окружности со стороной AB, и, значит, ближе к a, чем прямая b. Так как другой конец диаметра находится ближе к a, чем прямая c, то середина диаметра лежит ближе к a, чем прямая, средняя между b и c. Поменяв в рассуждении местами a и c, получаем, что центр вписанной окружности I располагается в полосе, указанной в ответе.

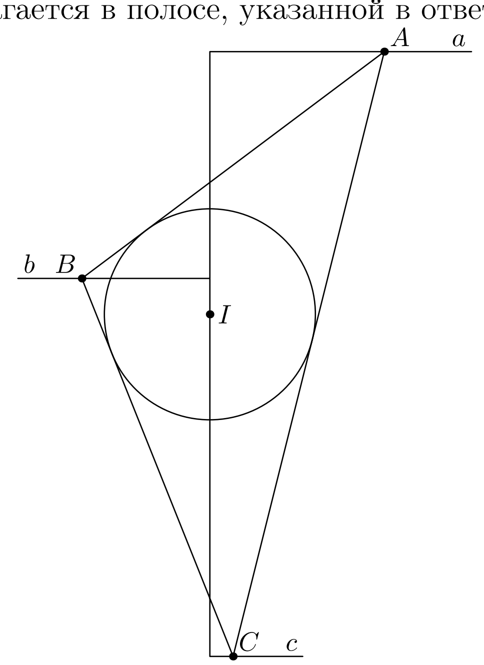

Рис.18

Возьмём теперь произвольный треугольник ABC с вершинами на соответствующих прямых. Переместим вершину B так, чтобы сторона AB стала перпендикулярна исходным прямым. Теперь устремим точку C в бесконечность. Углы при вершинах A и B стремятся к прямым, а точка пересечения их биссектрис, т.е. I, стремится к вершине равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой AB. Значит, I неограниченно приближается к прямой посредине между a и b. Аналогично, начав с того же треугольника, можно устремить I к прямой посредине между b и c. Следовательно, возможные положения I заполняют всю полосу, указанную в ответе.

19. (Б.Френкин) (10–11) Дан выпуклый n-угольник $A_1 \dots A_n$. Пусть $P_i\,(i = 1, \dots, n)$ —

такая точка на его границе, что прямая A_iP_i делит его площадь пополам. Дано, что все точки P_i не совпадают с вершинами и лежат на k сторонах n-угольника. Каково наименьшее и наибольшее возможное значение k при каждом данном n?

Ответ. Наименьшее значение равно 3, наибольшее равно $n-1$ при четном n и n при нечетном.

Решение. Так как отрезки A_iP_i делят площадь многоугольника пополам, любые два из них пересекаются. Пусть точка P_i лежит на стороне A_jA_{j+1}. Тогда точки P_j и P_{j+1} лежат по разные стороны от A_i, т.е. всегда найдутся три точки, лежащие на разных сторонах. С другой стороны, если две вершины многоугольника являются вершинами правильного треугольника, а все остальные расположены вблизи его третьей вершины, то все точки P_i лежат на трех сторонах многоугольника.

Очевидно, для правильного n-угольника при нечетном n все P_i лежат на разных сторонах. Пусть $n = 2m$. Так как отрезки A_mP_m и $A_{2m}P_{2m}$ пересекаются, точки P_m и P_{2m} лежат по одну сторону от диагонали A_mA_{2m}. По другую сторону от этой диагонали лежат m сторон многоугольника, и точка P_i может попасть на эти стороны, только если соответствующая вершина A_i лежит между P_m и P_{2m}. Но таких вершин не больше, чем $m-1$, значит существует сторона, на которой нет точек P_i.

Рассмотрим теперь n-угольник, вершины $A_1, \ldots, A_{n-2}$ которого являются вершинами правильного $n-1$-угольника, а вершины A_{n-1}, A_n расположены вблизи оставшейся вершины этого $n-1$-угольника. Точки P_i расположены на всех сторонах построенного многоугольника, кроме $A_{n-1}A_n$.

20. (Д.Прокопенко) (10–11) В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, O — центр описанной окружности, AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты. Точка C_2 симметрична C относительно A_1B_1. Докажите, что H, O, C_1 и C_2 лежат на одной окружности.

Решение. Так как $CA_1/CA = CB_1/CB = \cos C$, треугольники ABC и A_1B_1C подобны. Значит, поскольку $\angle ACO = \angle BCC_1 = 90^\circ - \angle B$, прямая CO содержит высоту треугольника A_1B_1C, т.е. точки C, O, C_2 лежат на одной прямой (рис.20). Кроме того, из подобия треугольников ABC и A_1B_1C вытекает, что $CC_2/CC_1 = 2\cos C$. С другой стороны, известно, что $CH = 2CO\cos C$. Следовательно, $CO\cdot CC_2 = CH\cdot CC_1$, что равносильно утверждению задачи.

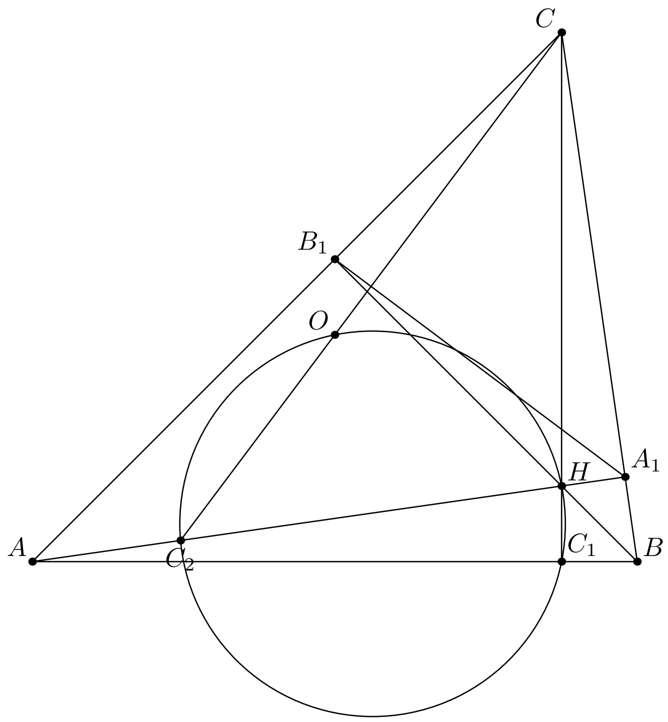

Рис.20

21. (Ф.Нилов) (10–11) Дан четырехугольник $ABCD$, противоположные стороны которого пересекаются в точках P и Q. Две прямые, проходящие через эти точки, пересекают стороны четырехугольника в четырех точках, являющихся вершинами параллелограмма. Докажите, что центр этого параллелограмма лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей $ABCD$.

    Решение. Аффинным преобразованием переведем параллелограмм в квадрат и рассмотрим систему координат, оси которой совпадают с диагоналями квадрата. Будем считать, что стороны четырехугольника пересекают оси координат в точках $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, а точки P, Q имеют координаты $(p, 0)$ и $(0, q)$ соответственно. Тогда стороны четырехугольника лежат на прямых с уравнениями $\frac{x}{p} \pm y = 1$, $\pm x + \frac{y}{q} = 1$; вершины имеют координаты $(\frac{p(q-1)}{pq-1}, \frac{q(p-1)}{pq-1})$, $(-\frac{p(q-1)}{pq+1}, \frac{q(p+1)}{pq+1})$, $(-\frac{p(q+1)}{pq-1}, -\frac{q(p+1)}{pq-1})$, $(\frac{p(q+1)}{pq+1}, -\frac{q(p-1)}{pq+1})$, и нетрудно видеть, что прямая, соединяющая середины диагоналей, проходит через начало координат.

22. (А.Заславский) (10–11) Постройте четырехугольник, в который можно вписать и около которого можно описать окружность, по радиусам этих окружностей и углу между диагоналями.

    Решение. Если радиусы описанной и вписанной окружностей четырехугольника равны R и r, а растояние между их центрами O и I равно d, то

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}.$$

    Значит, по данным R, r мы можем определить d и построить эти окружности. Диагонали всех четырехугольников с данными описанной и вписанной окружностями пересекаются в одной и той же точке L, лежащей на прямой OI, а их середины лежат на окружности с диаметром OL. Кроме того, отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходит через точку I, а его длина равна $OL \sin \phi$, где ϕ — данный угол. Построив проходящую через I хорду такой длины, найдем середины диагоналей, а затем и вершины четырехугольника.

23. (В.Протасов) (10–11) Верно ли, что при любом n правильный $2n$-угольник является проекцией некоторого многогранника, имеющего не более, чем $n+2$ грани?

    Решение. Да. Применим к правильному $2n$-угольнику $A_1 \dots A_{2n}$ растяжение относительно диагонали A_nA_{2n} с коэффициентом $k > 1$ (рис.23). Теперь перегнем полученный многоугольник по прямой A_nA_{2n}, так чтобы его вершины $B_1, \dots, B_{n-1}, B_{n+1}, \dots, B_{2n-1}$ проецировались в вершины исходного правильного многоугольника. Тогда все прямые B_iB_{2n-i} будут параллельны и многогранник, ограниченный треугольниками $B_{n-1}B_nB_{n+1}$, $B_{2n-1}B_{2n}B_1$, трапециями $B_iB_{i+1}B_{2n-i-1}B_{2n-i}$ и двумя половинами $2n$-угольника, будет искомым.

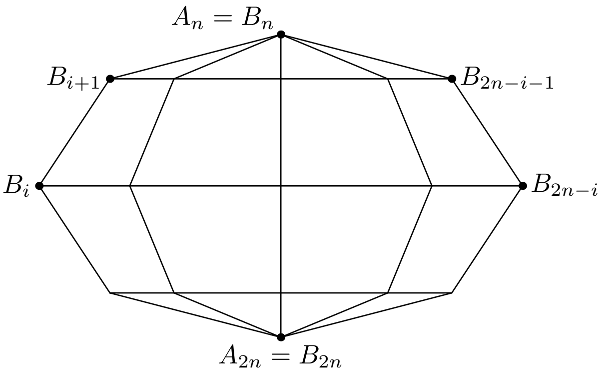

Рис.23

24. (Ф.Нилов) (11) Дана четырёхугольная пирамида, в которую можно вписать сферу. Точку касания этой сферы с основанием пирамиды спроектировали на рёбра основания. Докажите, что все проекции лежат на одной окружности.

    Решение. Пусть $ABCD$ — основание пирамиды, P — точка касания основания с вписанной сферой, P' — точка касания основания с вневписанной сферой, касающейся основания и продолжения боковых граней. Тогда расстояния от P до сторон основания относятся как котангенсы половин двугранных углов при соответствующих ребрах, а расстояния от P' — как их тангенсы. Отсюда следует, что прямые, соединяющие каждую вершину основания с P и P', симметричны относительно биссектрисы соответствующего угла основания.

    Пусть теперь K, L, M, N — точки, симметричные P относительно AB, BC, CD, DA. Так как, например, $BK = BP = BL$, серединный перпендикуляр к KL совпадает с биссектрисой угла KBL, т.е. прямой BP' (рис.24). Значит, P' — центр окружности, проходящей через точки K, L, M, N. Применив гомотетию с центром P и коэффициентом $1/2$, получаем, что середина отрезка PP' — центр окружности, проходящей через проекции P на ребра основания.

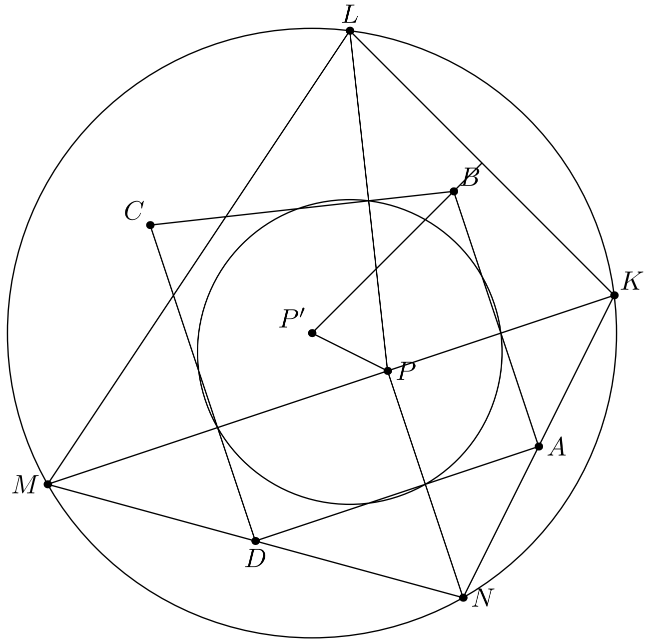

Рис.24

Нетривиальные критерии

4. В индукционном переходе перепутаны точки A_n и Q — 5 баллов.

5. Верный ответ — 1 балл.

6. Упоминается угол $45°$, но ГМТ не приводится — 2 балла.

Рассмотрен только один из трех центров — 3 балла.

Верное решение, но не выколоты точки — 5 баллов.

10. Верный ответ — 1 балл.

12. Замечено, но не доказано равенство окружностей или симметричность центров относительно биссектрисы — 2 балла.

13. Упоминаются факты, имеющие отношение к решению, но построения нет — 1 балл.

Верное построение с недостаточным обоснованием —5 баллов.

17. Доказана только достаточность — 3 балла.

18. Не доказано, что центр не может лежать вне полосы — 3 балла.

Не обосновано, что любая точка внутри полосы годится — 4 балла.

19. Верное решение с заменой площади на периметр — 6 баллов.

23. Верный пример без обоснования — 6 баллов.