VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина. Решения.

Финал. Первый день. 8 класс

1. (А.Блинков) Точка M — середина основания AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC. Точка N симметрична M относительно BC. Прямая, параллельная AC и проходящая через точку N, пересекает сторону AB в точке K. Найдите угол AKC.

   Ответ. 90°.

   Решение. Пусть L — точка пересечения NK и BC. Тогда $\angle AKC = \angle ALC$. Кроме того, $AM = MC = CN = NL$. Значит, $MCNL$ — ромб, $ALNM$ — параллелограмм и $AL \parallel MN \perp LC$ (рис.8.1).

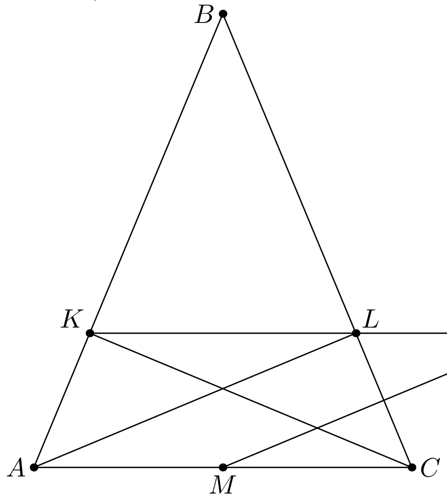

Рис.8.1

2. (А.Карлюченко) Восстановите треугольник ABC по вершине A и основаниям B' и C' биссектрис углов ABC и ACB соответственно.

   Первое решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольник. Тогда $\angle B'IC' = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B'AC'$. Поэтому мы можем построить точку I как пересечение соответствующей дуги с биссектрисой угла $B'AC'$. Теперь точки B, C строятся как пересечение $B'I$ с AC' и $C'I$ с AB' соответственно.

   Второе решение. Так как BB' — биссектриса угла B, точка B' равноудалена от прямых BC и AB. Поэтому окружность с центром B', касающаяся AC', касается также BC. Аналогично BC касается окружности с центром C', касающейся AB'. Следовательно, для восстановления треугольника достаточно провести общую внешнюю касательную к этим двум окружностям и найти точки ее пересечения с AB' и AC'.

3. (Л.Штейнгарц, Израиль) Бумажный квадратный лист согнули по прямой так, что одна из вершин квадрата оказалась на несмежной стороне. При этом образовалось три треугольника. В эти треугольники вписали окружности. Докажите, что радиус одной из этих окружностей равен сумме радиусов двух других.

   Решение. Пусть квадрат $ABCD$ перегнули по прямой XY, X лежит на CD, Y — на AB, U — точка на AD, в которую перешла C, V — точка, в которую перешла B, P — точка пересечения UV и AB. Так как треугольники UDX, UAP и

PVY — прямоугольные, диаметры вписанных в них окружностей равны соответственно $UD + DX - XU$, $UA + AP - UP$, $PV + VY - PY$.

Опустим перпендикуляр YK на CD. Так как $XY \perp CU$, $\angle DCU = \angle KYX$. Кроме того, $KY = BC = CD$. Следовательно, треугольники CDU и YKX равны, т.е. $DU = XK = XC - CK = XU - YB = XU - YV$. Поэтому $UD + DX - XU + PV + VY - PY + UP - UA - AP = DX + UV - UA - AP - PY = DX + DU - AY = 0$ (рис.8.3).

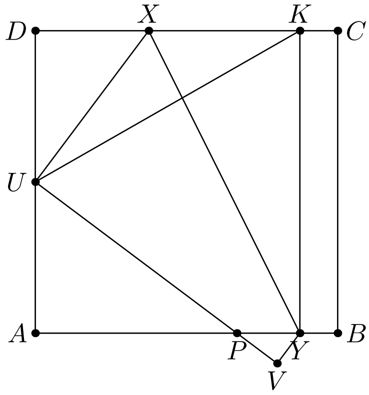

Рис.8.3

4. (А. Акопян, Д.Швецов) Дан равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине B, равным $120°$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяли точки P и Q соответственно так, что угол между AQ и CP прямой. Докажите, что $\angle PQB = 2\angle PCQ$.

Решение. Пусть серединный перпендикуляр к AQ пересекает AB в точке K, L — точка на BC такая, что $KL \parallel AC$, P' — точка на прямой AB такая, что $LP' = LC$, а прямые QP' и AC не параллельны. Так как в треугольниках BKQ и BLP' $BK = BL$, $KQ = LP'$, $\angle QBK = \angle P'BL$, но $P'B \neq QB$, $\angle BQK + \angle BP'L = 180°$. Следовательно, $\angle P'LB + \angle QKB = 60°$ и $\angle QAB + \angle P'CB = 30°$, т.е. P' совпадает с P (рис.8.4).

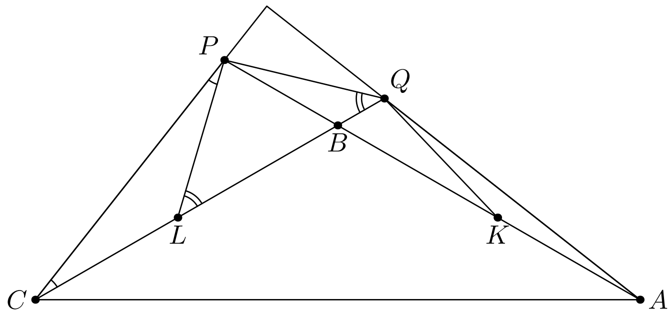

Рис.8.4

Заметим теперь, что, если треугольники BKQ и BLP приложить друг к другу равными сторонами QK и LP, то они образуют равносторонний треугольник. Следовательно, $BP + BQ = BL$. Поэтому, если T — точка на BL такая, что $BT = BP$, то треугольник BPT — равносторонний, а треугольник PTL равен треугольнику PBQ. Значит, $PQ = PL = LC$ и $\angle PQB = \angle PLB = 2\angle PCQ$.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. Второй день. 8 класс

5. (А.Акопян) Существует ли выпуклый четырехугольник и точка P внутри него такие, что сумма расстояний от P до вершин больше периметра четырехугольника?

   Ответ. Да.

   Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AD = BD = CD = x$, $AB = BC = y < x/4$, P — точка на диагонали BD, $PD = y$. Тогда $PA = PC > AD - PD = x - y$, следовательно, $PA + PB + PC + PD > 3x - 2y > 2x + 2y = AB + BC + CD + DA$.

6. (А.Туманян, Украина) На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B взяли точку B_1 такую, что $AB_1 = AC$. Биссектриса угла A пересекает описанную около треугольника окружность в точке W. Докажите, что ортоцентр треугольника AWB_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC.

   Решение. Пусть H — вторая точка пересечения описанной окружности с прямой CB_1. Так как AW — биссектриса равнобедренного треугольника AB_1C, $B_1H \perp AW$. Кроме того, $\angle AWH = \angle ACH = 90° - \angle CAW = 90° - \angle WAB$, т.е. $WH \perp AB_1$. Следовательно, H — ортоцентр треугольника AWB_1 (рис.8.6).

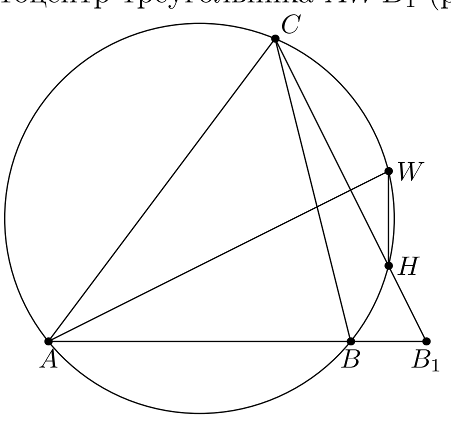

Рис.8.6

7. (Д.Швецов) Высоты AA_1, CC_1 пересекаются в точке H. Точка Q симметрична середине стороны AC относительно AA_1; точка P — середина A_1C_1. Докажите, что $\angle QPH = 90°$.

   Первое решение. Пусть K — середина AC. Так как $KQ \parallel BC$, то KQ делит высоту AA_1 пополам и AKA_1Q — ромб. Аналогично, если R — точка, симметричная K относительно CC_1, то CKC_1R — ромб, а значит, QA_1RC_1 — параллелограмм, т.е. P — середина RQ. Кроме того, $HR = HK = HQ$. Следовательно, HP — высота равнобедренного треугольника HQR (рис 8.7).

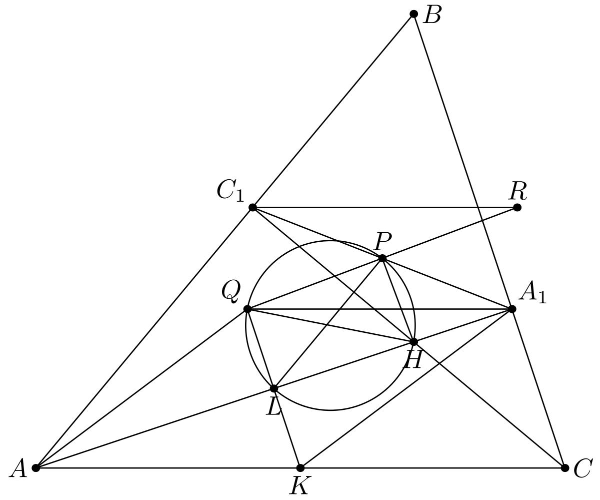

Рис.8.7

Второе решение. Пусть L — середина AA_1. Тогда KL — средняя линия треугольника AA_1C_1, $\angle PLH = \angle BAA_1$ и $\angle PLQ = \angle C_1HA$. С другой стороны, $\angle A_1C_1H = \angle HAC$, потому что точки A_1, C_1 лежат на окружности с диаметром AC. Следовательно, при симметрии относительно биссектрисы угла C_1HA точки A_1, C_1 попадут на прямые HC, HA, а прямая A_1C_1 перейдет в параллельную AC. Значит по теореме Фалеса точка P попадет на прямую HK. Таким образом, прямые HQ и HP симметричны HK относительно HA и биссектрисы угла C_1HA соответственно, т.е. $\angle PHQ = \angle C_1HA$. Следовательно, точки P, Q, L, H лежат на одной окружности и $\angle QPH = \angle QLH = 90°$.

8. (А.Заславский) Квадрат разрезан на несколько (больше одного) выпуклых многоугольников с попарно различным числом сторон. Докажите, что среди них есть треугольник.

   Решение. Пусть квадрат разрезан на n многоугольников. Тогда у каждый из этих многоугольников имеет не более одной стороны на каждой из сторон квадрата, а с любым другим многоугольником граничит не более, чем по одной стороне. Следовательно, всего он имеет не более $n+3$ сторон. Значит, если среди многоугольников нет треугольника, то они должны иметь $4, 5, \dots, n+3$ сторон. Но тогда $n+3$-угольник должен примыкать ко всем сторонам квадрата. Поэтому каждый из остальных многоугольников может примыкать не более, чем к двум сторонам квадрата и, следовательно, иметь не более $n+1$ стороны — противоречие.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

1. (Л.Штейнгарц, Израиль) В треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Затем провели высоту A_1A_2 в треугольнике OBA_1 и высоту B_1B_2 в треугольнике OAB_1. Докажите, что отрезок A_2B_2 параллелен стороне AB.

   Решение. Так как треугольники OA_1B и OB_1A подобны, их высоты A_1A_2 и B_1B_2 делят отрезки OB и OA в одном и том же отношении. Отсюда по теореме Фалеса получаем утверждение задачи.

2. (Д.Швецов, А.Заславский) Через вершины треугольника ABC проведены три параллельные прямые, пересекающие описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны A_1, B_1, C_1 относительно сторон BC, CA, AB. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

   Решение. Проведем через A_1, B_1, C_1 прямые, параллельные соответственно BC, CA, AB. Из условия следует, что они пересекутся в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC. Действительно, если, например, прямая, проходящая через C_1, пересекает окружность в точке P, то $\smile BP = \smile C_1A = \smile A_1C$, т.е. $A_1P \parallel BC$. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны этой точке относительно середин сторон ABC. Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ центрально симметричны и прямые, соединяющие их соответствующие вершины, проходят через центр симметрии (рис.9.2).

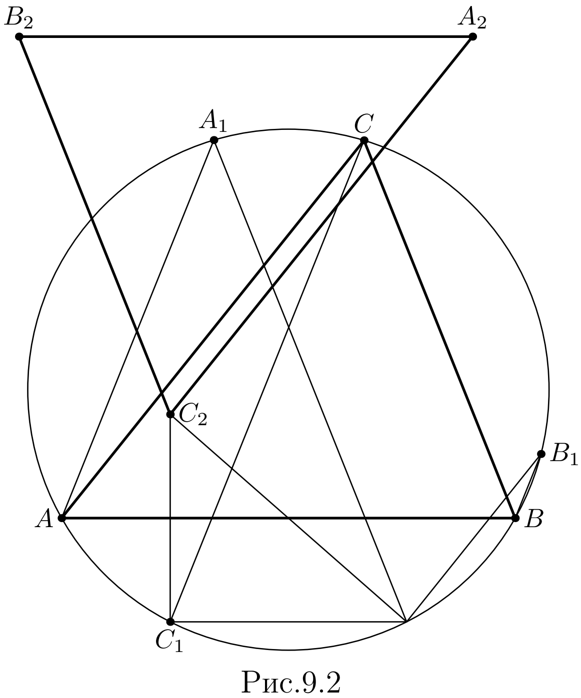

Рис.9.2

3. (В.Протасов) В треугольнике ABC провели биссектрису CL. В треугольники CAL и CBL вписали окружности, которые касаются прямой AB в точках M и N соответственно. Затем все, кроме точек A, L, M и N, стерли. С помощью циркуля и линейки восстановите треугольник.

   Решение. Докажем равенство $1/AM + 1/ML = 1/LN + 1/NB$. Пусть $x = AC$, $y = CL$, $z = LA$ — длины сторон треугольника ACL, p, S r — его полупериметр, площадь и радиус вписанной окружности, h — высота из вершины C. Тогда

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{ML}=\frac{1}{p-y}+\frac{1}{p-x}=\frac{z}{(p-x)(p-y)}=\frac{zp(p-z)}{S^2}=\frac{2(p-z)}{rh}=\frac{1}{2h\operatorname{tg}\frac{\angle ACL}{2}}.$$

Так как в треугольнике BCL угол при вершине C и высота из этой вершины такие же, искомое равенство доказано.

Таким образом, зная отрезки AM, ML, LN, мы можем найти отрезок NB и построить точку B. Теперь из соотношений $AC-CL=AM-LM$, $BC-CL=BN-LN$ мы находим разность сторон AC, BC, а из соотношения $AC/BC=AL/BL$ их отношение. Поэтому мы можем найти эти стороны и построить треугольник.

4. (Б.Френкин) При каких $n>3$ правильный n-угольник можно разрезать диагоналями (возможно, пересекающимися внутри него) на равные треугольники?

   Ответ. При четных.

   Решение. Если $n=2k$, то k диагоналей, проходящих через центр многоугольника, разрезают его на n равных треугольников.

   Пусть n нечетно. Если проведенные диагонали не пересекаются внутри многоугольника, то они разрезают многоугольник на $n-2$ треугольника, причем центр лежит внутри одного из этих треугольников. Тогда треугольник, содержащий центр, остроугольный, а остальные тупоугольные. Следовательно, равенство треугольников невозможно.

   Так как n нечетно, никакие две диагонали не перпендикулярны. Поэтому через любую точку пересечения двух диагоналей должна проходить, по крайней мере, еще одна диагональ (в противном случае образованные диагоналями углы являются двумя разными углами одного треугольника, что невозможно). Докажем теперь, что из каждой вершины многоугольника выходит не меньше двух диагоналей.

   Предположим, что из вершины A_i не выходит ни одной диагонали. Тогда треугольником, содержащим эту вершину, будет $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Сторона $A_{i+1}A_{i+2}$ должна принадлежать такому же треугольнику, и им может быть только треугольник $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$. Продолжая это рассуждение, получим противоречие с нечетностью n.

   Предположим, что из вершины A_i выходит одна диагональ. тогда она делит угол при этой вершине на два неравных угла. Так оба эти угла примыкают к стороне треугольника, равной стороне многоугольника, то из вершины A_{i+1} тоже должна выходить одна диагональ и т.д. Но при нечетном числе вершин это невозможно.

   Пусть теперь n-угольник разрезан на k треугольников. Сумма углов всех треугольников равна $k\pi$. Из этой суммы $(n-2)\pi$ составляют углы многоугольника, значит, сумма углов во внутренних вершинах равна $(k-n+2)\pi$, а число этих вершин равно $(k-n+2)/2$. Поскольку каждая внутренняя вершина принадлежит, по крайней мере, шести треугольникам, а каждая вершина многоугольника — трем, то общее число треугольников не меньше, чем $(3(k-n+2)+3n)/3>k$ — противоречие.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. Второй день. 9 класс

5. (М.Кунгожин) Пусть ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник. На продолжении гипотенузы AB за точку A взята точка D такая, что $AB = 2AD$. Точки M и N на стороне AC таковы,что $AM = NC$. На стороне CB за точку B взята точка K такая, что $CN = BK$. Найдите угол между прямыми NK и DM.

   Ответ. $45°$.

   Решение. Пусть L — проекция M на AB. Так как $ML/CN = AL/BK = AD/BC = 1/\sqrt{2}$, треугольники MLD и NCK подобны и $\angle MDL = \angle NKC$. Значит. искомый угол равен углу между KC и DL, т.е. $45°$ (рис.9.5).

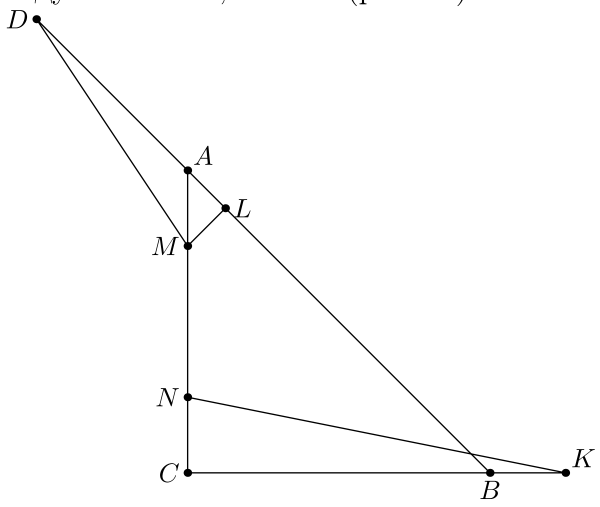

Рис.9.5

6. (М.Рожкова) Задан равнобедренный треугольник ABC, $BC = a$, $AB = AC = b$. На стороне AC во внешнюю сторону построен $\triangle ADC$, $AD = DC = a$; CM — биссектриса $\triangle ABC$, CN — биссектриса $\triangle ADC$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CMN.

   Ответ. $\frac{ab}{a+b}$.

   Решение. Пусть K — точка на AC такая, что $MK \parallel BC$. Так как $\angle MCA = \angle MCB = \angle CMK$, получаем, что $MK = KC$. Кроме того, $CK/AK = BM/AM = a/b = DN/AN$. Следовательно, $KN \parallel CD$ и $KN = KC$. Таким образом, K — центр описанной окружности треугольника CMN, а ее радиус по теореме о биссектрисе равен $KC = ab/(a + b)$ (рис.9.6).

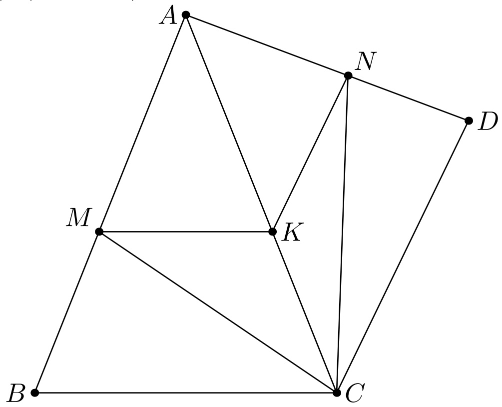

Рис.9.6

7. (А.Белов) В выпуклом пятиугольнике провели все диагонали, в результате чего он оказался разбитым на 10 треугольников и 1 пятиугольник. Из суммы площадей треугольников, прилегающих к сторонам исходного пятиугольника, вычли площадь внутреннего, получилось число N. Совершив те же операции с внутренним пятиугольником, получили число K. Докажите, что $N > K$.

   Решение. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ — исходный пятиугольник, $B_1B_2B_3B_4B_5$ — пятиугольник, образованный его диагоналями (B_1 — точка пересечения A_2A_4 с A_3A_5 и т.д.), $C_1C_2C_3C_4C_5$ — пятиугольник, образованный диагоналями $B_1B_2B_3B_4B_5$. Тогда разность $N - K$ содержит сумму пяти треугольников вида $A_iA_{i+1}B_{i+3}$, сумму пяти треугольников вида $B_iB_{i+1}C_{i+3}$ с коэффициентом, равным -2, и сумму пяти треугольников вида $B_iC_{i+2}C_{i+3}$ с коэффициентом, равным -1. То же самое выражение получится, если из суммы площадей треугольников вида $A_iA_{i+1}B_{i+3}$ вычесть суммы площадей треугольников вида $B_iB_{i+1}B_{i+2}$. Поэтому для доказательства искомого неравенства достаточно доказать пять неравенств вида $S_{A_iA_{i+1}B_{i+3}} > S_{B_{i+2}B_{i+3}B_{i+4}}$.

   Присоединив к каждому из треугольников $A_1A_2B_4$ и $B_3B_4B_5$ треугольник $A_1B_3B_4$, получим треугольники $A_1B_3A_2$ и $A_1B_3B_5$ с общим основанием A_1B_3. При этом расстояние от точки B_5 до этого основания меньше, чем от точки A_2 (рис.9.7). Аналогично доказываются остальные неравенства.

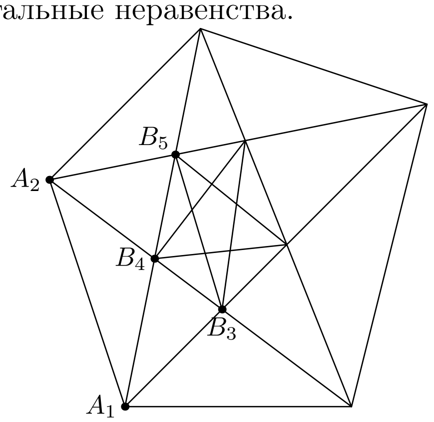

Рис.9.7

8. (М.Плотников, Украина) В остроугольном треугольнике ABC точки K и L — проекции основания H высоты из точки A на другие стороны треугольника. Прямая KL пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q, а высота, опущенная на сторону BC, повторно пересекает эту окружность в точке T. Докажите, что H является центром вписанной окружности треугольника PQT.

   Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника. Так как $AK = AH \sin B$, $AL = AH \sin C$, треугольники ALK и ABC подобны, т.е. $\angle ALK = \angle B$. Поскольку $\angle OAC = \pi/2 - \angle B$, то $OA \perp KL$. Значит, $AP = AQ$ и TA — биссектриса угла PTQ. Теперь по теореме о трилистнике утверждение задачи равносильно тому, что A — центр описанной окружности треугольника HPQ.

   Пусть D — проекция A на KL. По теореме Пифагора $AQ^2 - R^2 = AD^2 - (R - AD)^2$, где R — радиус описанной окружности. Так как коэффициент подобия треугольников AKL и ABC равен $AH/2R$, имеем $AD = AH^2/2R$ и $AQ^2 = AH^2$ (рис.9.8).

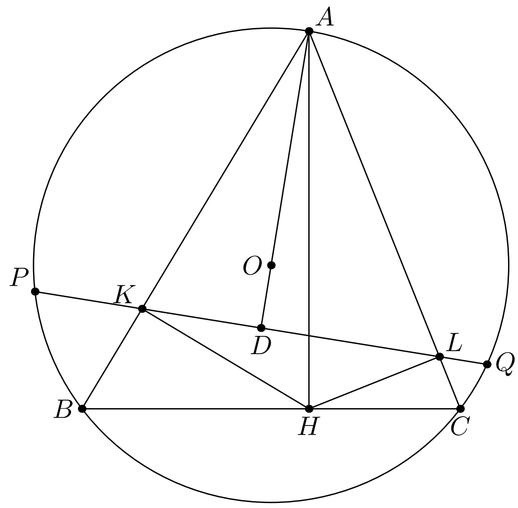

Рис.9.8

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

1. (А.Шаповалов) При каких n можно оклеить куб $n \times n \times n$ доминошками 1×2 так, чтобы каждая доминошка граничила ровно с пятью другими?

   Ответ. При четных.

   Решение. Если n четно, разобьем каждую грань куба на квадраты 2×2 и заклеим каждый квадрат двумя доминошками так, чтобы к длинным сторонам доминошек, лежащих в одном квадрате, примыкали короткие стороны доминошек, лежащих в соседних квадратах. На рис.10.1 показано расположение доминошек вблизи вершины куба.

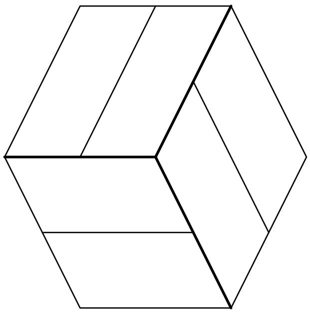

Рис.10.1

   При нечетных n общее число доминошек нечетно. Поскольку число доминошек, имеющих нечетное число соседей, всегда четно, требуемая оклейка невозможна.

2. (А.Заславский, Б.Френкин) Точку внутри треугольника назовем хорошей, если проходящие через нее чевианы обратно пропорциональны соответствующим сторонам. Для каких треугольников число хороших точек максимально?

   Ответ. Для остроугольных.

   Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, а P — хорошая точка. Так как проходящие через P чевианы пропорциональны соответствующим высотам, они образуют с высотами равные углы. При этом возможны два случая.

   Ориентированные углы PAH, PBH, PCH равны. Тогда P лежит на окружностях ABH, BCH, CAH и, значит, совпадает с H.

   Два из трех углов равны, а третий (например, PCH) им противоположен. Тогда, как и в первом случае P лежит на окружности ABH. Пусть прямые CP и CH вторично пересекают эту окружность в точках X и Y. Тогда, так как $\angle PCH = \angle PBH$, то $\smile XY = 2 \smile CP$, $\angle XPY = 2\angle PCY$ и $\angle PCY = \angle PYC$. Но, так как P не лежит на серединном перпендикуляре AB к отрезку CY, это возможно только при $P = H$.

   Таким образом хорошей точкой может быть только ортоцентр треугольника. Следовательно, в остроугольном треугольнике хорошая точка одна, а в неостроугольном — ни одной.

   Примечание. Во втором случае есть более короткое, но не элементарное решение. Геометрическим местом точек P, удовлетворяющих равенству $\angle BB'A = \angle CC'B$, является описанная около треугольника ABC равносторонняя гипербола. Четвертой точкой ее пересечения с другой гиперболой будет ортоцентр H.

3. (А.Карлюченко) Пусть M и I — точки пересечения медиан и биссектрис неравнобедренного треугольника ABC, а r — радиус вписанной в него окружности. Докажите, что $MI = r/3$ тогда и только тогда, когда прямая MI перпендикулярна одной и сторон треугольника.

Первое решение. Напомним, что три прямые, соединяющие вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями, пересекаются в одной точке N (точка Нагеля). Эта точка лежит на луче IM, и $IN = 3IM$.

Перейдем к решению задачи. Пусть $MI = r/3$. Тогда точка N лежит на вписанной окружности. Пусть касательная к окружности в этой точке пересекает стороны AC, BC. Проведем прямую CN. Она пересечет сторону AB в точке C_1 ее касания с вневписанной окружностью. Так как вписанная и вневписанная окружности гомотетичны относительно C, получаем, что касательная в N параллельна AB, т.е. $AB \perp IM$ (рис.10.3).

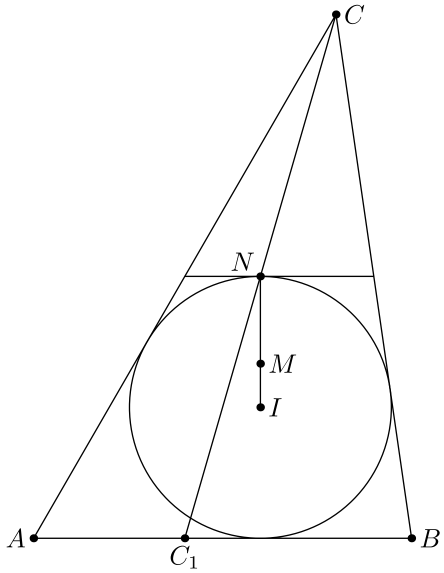

Рис.10.3

Обратно, пусть $AB \perp IM$. Рассмотрим точку E вписанной окружности, диаметрально противоположную точке ее касания с AB. Прямая CE проходит через C_1, а значит, и через N. С другой стороны, E лежит на прямой IM, также проходящей через N. Так как треугольник неравнобедренный, эти прямые различны, т.е. E совпадает с N и $r = IE = 3IM$.

Второе решение. Пусть $AB \perp IM$. Тогда по теореме Пифагора $AM^2 - BM^2 = (p-a)^2 - (p-b)^2$. Отсюда, используя формулу медианы, получаем $a + b = 3c$ или $p = 2c$. Так $S_{ABM} = S_{ABC}/3 = pr/3 = c(IM + r)/2$, получаем требуемое равенство.

Пусть теперь $MI = r/3$. Воспользовавшись формулами $IA^2 + IB^2 + IC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3IM^2$, $IA^2 = r^2 + (p-a)^2$ и $r^2 = S^2/p^2 = (p-a)(p-b)(p-c)/p$, приведем данное равенство к виду $(p-2a)(p-2b)(p-2c) = 0$. Как показано выше, каждая из скобок обращается в нуль тогда и только тогда, когда IM перпендикулярно соответствующей стороне.

4. (Б.Френкин) Дан квадрат. Найдите геометрическое место середин гипотенуз прямоугольных треугольников, вершины которых лежат на попарно различных сторонах

квадрата и не совпадают с его вершинами.

Ответ. Все точки криволинейного восьмиугольника, ограниченного дугами восьми парабол (рис.10.4), кроме середин сторон квадрата.

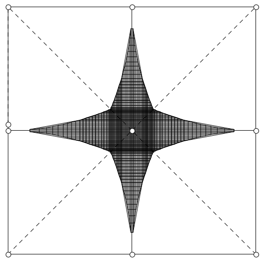

Рис.10.4

Решение. Если концы гипотенузы лежат на противоположных сторонах квадрата, то ее середина лежит на соответствующей средней линии. При этом очевидно, что любая точка средней линии, кроме концов, может быть получена таким способом.

Пусть концы X, Y гипотенузы принадлежат сторонам AB, AD квадрата $ABCD$, а вершина Z прямого угла — стороне BC. Так как точки A, Z лежат на окружности с диаметром XY, расстояние от центра этой окружности до A меньше, чем до других вершин квадрата, но больше, чем до прямой BC. Геометрическим местом точек, равноудаленных от A и BC, является парабола с фокусом A и вершиной в середине AB. Значит, центр окружности лежит между BC и этой параболой в четверти квадрата, содержащей A. Рассмотрев аналогично другие случаи расположения вершин треугольника и объединив полученные области, получим криволинейный восьмиугольник, ограниченный дугами восьми парабол. Вершинами этого восьмиугольника являются середины сторон квадрата и точки пересечения парабол с его диагоналями. Так как средние линии квадрата содержатся в восьмиугольнике, он и является искомым ГМТ.

VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

5. (Ф.Нилов) В окружность ω вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого перпендикулярны. На сторонах AB и CD во внешнюю сторону как на диаметрах построены дуги α и β. Докажите, что у луночек, образованных окружностью ω и дугами α и β, одинаковая ширина (т.е. максимальные радиусы окружностей, вписанных в эти луночки, равны).

   Решение. Очевидно, что ширина луночки — это расстояние между серединами образующих ее дуг, а прямая, соединяющая эти середины проходит через центры содержащих эти дуги окружностей. Заметим теперь, что в силу перпендикулярности диагоналей четырехугольника $ABCD$ сумма дуг AB и CD описанной около него окружности равна π, значит, в эту окружность можно вписать прямоугольный треугольник с катетами, равными AB и CD, т.е. расстояние от центра окружности до середины AB равно $CD/2$. Поэтому ширина обеих луночек равна $(AB+CD)/2-R$, где R — радиус окружности $ABCD$.

6. (В.Ясинский) Дан тетраэдр $ABCD$. Внутри трехгранного угла с вершиной D и ребрами DA, DB, DC, вне тетраэдра, произвольно выбрали точку X. Обозначим через A', B', C' основания перпендикуляров, опущенных из точки D на плоскости XBC, XCA, XAB соответственно. Докажите, что $P_{A'B'C'} \leq DA+DB+DC$, где $P_{A'B'C'}$ — периметр треугольника $A'B'C'$.

   Решение. Так как $DA' \perp XBC$, $DA' \perp XC$. Аналогично $DB' \perp XC$. Поэтому XC перпендикулярно плоскости $DA'B'$. Пусть K — точка пересечения этой плоскости с XC. Тогда $\angle DB'K = \angle DA'K = \pi/2$, т.е. точки A', B' лежат на окружности с диаметром DK. Следовательно, $A'B' \leq DK \leq DC$. Из этого и двух аналогичных неравенств следует утверждение задачи.

7. (Ф.Ивлев) Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает AB в точке D. Докажите, что касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются на медиане треугольника BCD, проведенной из вершины D.

   Решение. Точка K пересечения касательных лежит на симедиане треугольника ACD, т.е. $\sin\angle KDA/\sin\angle KDC = AD/CD$. Но по теореме о касательной $AD/CD = CD/BD$, следовательно DK — медиана.

8. (Д.Швецов) На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрали точку M. Пусть X, Y, Z — инцентры треугольников ABM, CMD, AMD соответственно; H_x, H_y, H_z — ортоцентры треугольников AXB, CYD, AZD. Докажите, что точки H_x, H_y, H_z лежат на одной прямой.

   Решение. Пусть P, Q — точки на отрезках AM, DM такие, что $AP = DQ = AD$. Так как $BP \perp AX$, ортоцентром треугольника ABX будет точка пересечения прямых BP и AC. Аналогично ортоцентром треугольника CDY будет точка пересечения CQ и BD. Наконец, ортоцентром треугольника AZD будет точка пересечения прямых DP и AQ. По теореме Дезарга утверждение задачи равносильно перспективности треугольников BPQ и CAD. Но прямые BC, PA и QD пересекаются в точке M (рис.10.8).

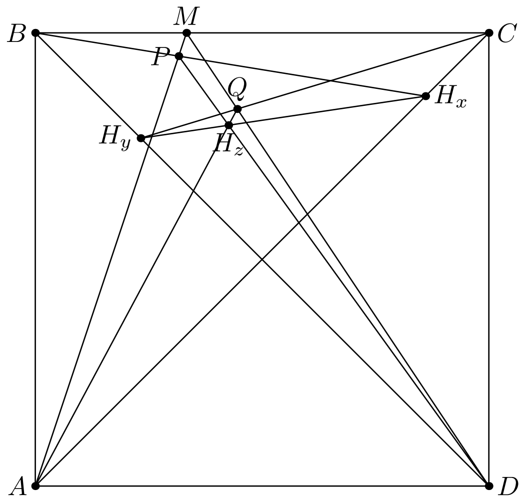

Рис.10.8