IV Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура четвертой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники 8–11 классов. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов (на момент проведения олимпиады) она предназначена. Впрочем, можно решать также задачи и для более старших классов.

Работа с решениями задач должна быть прислана в обычной тетради не позднее 1 апреля 2008 года по адресу: 119002, Москва Г-002, Большой Власьевский пер. д. 11. МЦНМО. На олимпиаду им. И.Ф.Шарыгина.

Работа должна быть выполнена на русском языке. Присылайте ее простой бандеролью, не сворачивая тетрадь в трубку.

На обложке тетради обязательно приведите следующие сведения: фамилию, имя, отчество; полный почтовый адрес с индексом и (если есть) телефон и/или E-mail; класс, в котором сейчас учитесь; номер и адрес Вашей школы; ФИО учителей математики и/или руководителей кружка, в котором занимаетесь.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая аккуратные чертежи. Если задача на вычисления, в конце ее решения должен быть отчетливо выделенный ответ. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении какой-то известной теоремой или фактом, приведенном в задаче из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему или факт Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Ваши работы будут тщательно проверены и Вы получите (не позднее середины мая 2008 г.) ответ жюри. Победители заочного тура, учащиеся 8–10 классов, будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2008 года в г. Дубна под Москвой. Победители заочного тура, выпускники школ получат Грамоты оргкомитета олимпиады.

1) (8) Существует ли правильный многоугольник, в котором ровно половина диагоналей параллельна сторонам?

2) (8) Для данной пары окружностей постройте две концентрические окружности, каждая из которых касается двух данных. Сколько решений имеет задача, в зависимости от расположения окружностей ?

3) (8) Треугольник можно разрезать на три равных треугольника. Докажите, что один из его углов равен 60°.

4) (8–9) Биссектрисы двух углов вписанного четырехугольника параллельны. Докажите, что сумма квадратов двух сторон четырехугольника равна сумме квадратов двух других сторон.

5) (8–9) Постройте квадрат $ABCD$, если даны его вершина A и расстояния от вершин B и D до фиксированной точки плоскости O.

6) (8-9) На плоскости даны две концентрические окружности с центром в точке A. Пусть B — произвольная точка одной из этих окружностей, C — другой. Для каждого треугольника ABC рассмотрим две окружности одинакового радиуса, ка-

сающиеся друг друга в точке K, причем одна окружность касается прямой AB в точке B, а другая — прямой AC в точке C. Найдите ГМТ K.

7) (8–9) Дана окружность и точка O на ней. Вторая окружность с центром O пересекает первую в точках P и Q. Точка C лежит на первой окружности, а прямые CP, CQ вторично пересекают вторую окружность в точках A и B. Докажите, что $AB = PQ$.

8) (8–11) а) Докажите, что при $n > 4$ любой выпуклый n-угольник можно разрезать на n тупоугольных треугольников.

   б) Докажите, что при любом n существует выпуклый n-угольник, который нельзя разрезать меньше, чем на n тупоугольных треугольников.

   в) На какое наименьшее число тупоугольных треугольников можно разрезать прямоугольник?

9) (9–10) Прямые, симметричные диагонали BD четырехугольника $ABCD$ относительно биссектрис углов B и D, проходят через середину диагонали AC. Докажите, что прямые, симметричные диагонали AC относительно биссектрис углов A и C, проходят через середину диагонали BD.

10) (9–10) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Докажите, что проекции точек B и D на прямые IA и IC лежат на одной окружности.

11) (9–10) Даны четыре точки A, B, C, D. Известно, что любые две окружности, одна из которых проходит через A и B, а другая — через C и D, пересекаются. Докажите, что общие хорды всех таких пар окружностей проходят через одну точку.

12) (9–10) Имеется треугольник ABC. На луче BA отложим точку A_1, так что отрезок BA_1 равен BC. На луче CA отложим точку A_2, так что отрезок CA_2 равен BC. Аналогично построим точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 параллельны.

13) (9–10) Дан треугольник ABC. Вневписанная окружность касается его стороны BC в точке A_1 и продолжений двух других сторон. Другая вневписанная окружность касается стороны AC в точке B_1. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке N. На луче AA_1 отметили точку P, такую что $AP = NA_1$. Докажите, что точка P лежит на вписанной в треугольник окружности.

14) (9–10) Прямая, соединяющая центр описанной окружности и точку пересечения высот неравнобедренного треугольника, параллельна биссектрисе одного из его углов. Чему равен этот угол?

15) (9–11) Даны две окружности и не лежащая на них точка P. Проведите через P прямую, высекающую на данных окружностях хорды равной длины.

16) (9–11) Даны две окружности. Общая внешняя касательная касается их в точках A и B. Точки X, Y на окружностях таковы, что существует окружность, касающаяся данных в этих точках, причем одинаковым образом (внешним или внутренним). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AX и BY.

17) (9–11) Дан треугольник ABC и линейка, на которой отмечены два отрезка, равные AC и BC. Пользуясь только этой линейкой, найдите центр вписанной окружности треугольника, образованного средними линиями ABC.

18) (9–11) Докажите, что для треугольника со сторонами a, b, c и площадью S выполнено неравенство
$$a^2+b^2+c^2-\frac{1}{2}(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

19) (10-11) Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB=a$, $AD=b$. Первая окружность имеет центр в вершине A и проходит через D, вторая имеет центр в C и проходит через D. Произвольная окружность с центром B пересекает первую окружность в точках M_1, N_1, а вторую — в точках M_2, N_2. Чему равно отношение M_1N_1/M_2N_2?

20) (10–11) а) Многоугольник обладает следующим свойством: если провести прямую через две точки[1], делящие его периметр пополам, то эта прямая разделит многоугольник на два равновеликих многоугольника. Верно ли, что многоугольник центрально симметричен?

б) Верно ли, что любая фигура, обладающая свойством, указанным в п.а), центрально симметрична?

21) (10–11) В треугольнике провели серединные перпендикуляры к его сторонам и измерили их отрезки, лежащие внутри треугольника.

а) Все три отрезка оказались равны. Верно ли, что треугольник равносторонний?

б) Два отрезка оказались равны. Верно ли, что треугольник равнобедренный?

в) Могут ли длины отрезков равняться 4, 4 и 3?

22) (10–11) а) Все вершины пирамиды лежат на гранях куба, но не на его ребрах, причем на каждой грани лежит хотя бы одна вершина. Какое наибольшее количество вершин может иметь пирамида?

б) Все вершины пирамиды лежат в плоскостях граней куба, но не на прямых, содержащих его ребра, причем в плоскости каждой грани лежит хотя бы одна вершина. Какое наибольшее количество вершин может иметь пирамида?

23) (10–11) В пространстве даны две пересекающиеся сферы разных радиусов и точка A, принадлежащая обеим сферам. Докажите, что в пространстве существует точка B, обладающая следующим свойством: если через точки A и B провести произвольную окружность, то точки ее повторного пересечения с данными сферами будут равноудалены от B.

24) (11) Пусть h — наименьшая высота тетраэдра, d — наименьшее расстояние между его противоположными ребрами. При каких t возможно неравенство $d > th$?

Свои вопросы Оргкомитету можно задать по электронной почте *geomolymp@mccme.ru*

[1] Комментарий — через *любые* две точки