Еще раз о задаче Мальфатти

И.Богданов, А.Заславский

Немного истории

В 1803 г. Итальянский математик Мальфатти сформулировал следующую задачу: поместить в данный треугольник три непересекающихся круга максимальной общей площади. Мальфатти предполагал, что решение этой задачи дают три окружности, вписанные в углы треугольника и попарно касающиеся друг друга. Хотя впоследствии было доказано, что эти окружности ни для какого треугольника не дают решения исходной задачи, их стали называть кругами Мальфатти, а задачу построения таких окружностей — задачей Мальфатти.

Сам Мальфатти в своей работе привел только формулы для радиусов искомых окружностей, указав, что алгебраические выкладки, позволяющие их получить очень громоздки. Довольно интересное аналитическое решение задачи Мальфатти приводится в "Кванте" №4, 1994. В 1826 г. Штейнер опубликовал также без доказательства следующее построение кругов Мальфатти.

Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Построим окружности α, β, γ, вписанные в треугольники IBC, ICA, IAB, и проведем общие внутренние касательные, отличные от биссектрис ABC, к α и γ, β и γ. Тогда окружность Мальфатти, вписанная в угол C, касается этих двух прямых.

Полное доказательство метода Штейнера было впервые опубликовано Шретером в 1874 г. Его можно найти в учебнике Адамара "Элементарная геометрия". Однако, это доказательство довольно сложно и не элементарно[1]. В частности, оно использует инверсию.

В книге Шклярского, Ченцова и Яглома "Избранные задачи и теоремы математики" приводится элементарное, но тоже довольно сложное доказательство метода Штейнера. В 2003 г. второй автор данной статьи, исследуя его, обнаружил следующий, представляющий самостоятельный интерес факт.

Задача 1. В приведенных выше обозначениях общая внутренняя касательная к окружностям α и β, отличная от прямой IC, проходит через точку касания окружности γ с прямой AB (рис.1).

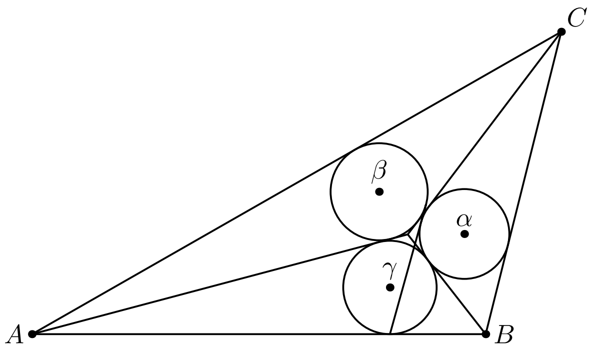

Рис.1

Обратно, из утверждения задачи 1 легко получается элементарное доказательство метода Штейнера. Но найти решение задачи 1, не использующее задачи Мальфатти, очень

[1] Зато оно позволяет обосновать построение Штейнера не только для обычного треугольника, но и для образованного дугами трех окружностей

долго не удавалось. Только совсем недавно такое решение было получено первым автором данной статьи. Мы изложим его и покажем, как с его помощью решить задачу Мальфатти.

Решение задачи 1

Наше решение использует следующие два факта.

Задача 2. Даны три окружности, каждая из которых лежит вне двух других. К каждой паре окружностей проведена одна из общих внутренних касательных. Оказалось, что три эти прямые пересекаются в одной точке. Тогда три другие общие внутренние касательные также пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть A, B, C — центры окружностей; P — точка пересечения касательных; A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные P относительно прямых BC, CA, AB; P' — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$; A', B', C' — точки пересечения $P'A_1$, $P'B_1$, $P'C_1$ с BC, CA, AB соответственно. Тогда, так как $CA_1 = CP = CB_1$ и $P'A_1 = P'B_1$, то $\angle A'PC = \angle A'A_1C = \angle B'B_1C = \angle B'PC$, т.е. лучи PA, PB, PC являются биссектрисами углов $B'PC'$, $C'PA'$, $A'PB'$. Это значит, что прямые PA', PB', PC' являются общими касательными к окружностям, а симметричные им относительно линий центров прямые $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$ — вторыми общими касательными (рис.2).

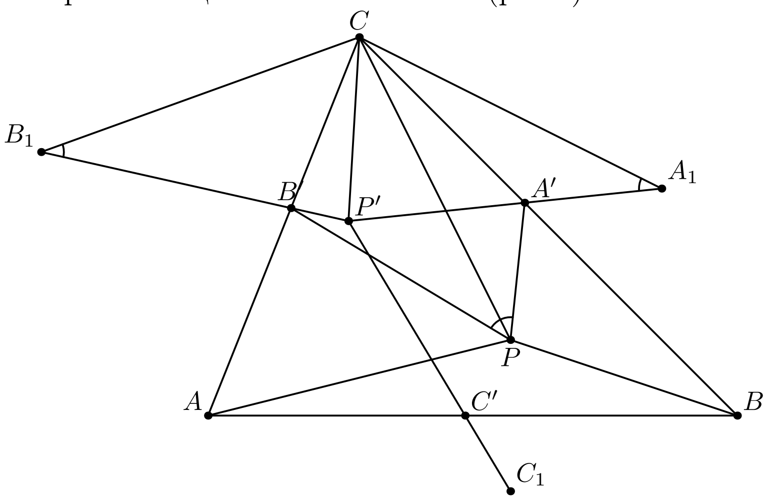

Рис.2

Примечание. Нетрудно видеть, что точки P, P' обладают следующим свойством: прямые соединяющие их с каждой из вершин треугольника ABC, симметричны относительно соответствующей биссектрисы. Такие точки называются изогонально сопряженными относительно треугольника и являются фокусами вписанного в треугольник эллипса (параболы, гиперболы). При этом точки A', B', C' являются точками касания эллипса со сторонами треугольника.

Задача 3. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, лучи BA и CD пересекаются в точке E, BC и AD — в точке F. Вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AB, CD и биссектрисой угла B, касается прямой AB в точке K, а вписанная окружность треугольника, образованного прямыми AD, BC и биссектрисой угла B, касается прямой CB в точке L. Тогда прямые KL, AC и EF пересекаются в одной точке.

Решение. Для решения этой задачи нам понадобится понятие двойного отношения четырех точек.

Определение. Пусть четыре точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Тогда *двойное отношение*

$$(AB:CD) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Нетрудно убедиться, что, если четыре прямые, проходящие через одну точку, пересекают прямую l в точках A, B, C, D, а прямую l' — в точках A', B', C', D', то $AB;CD) = (A'B';C'D')$.

Вернемся теперь к решению задачи. Обозначим точки касания вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности со сторонами AB и BC через U и V. Имеем

$$(EB;KU) = \frac{EK}{BK} : \frac{EU}{BU} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\angle BEC}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{4}} : \frac{\operatorname{ctg}\frac{\angle BEC}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\angle B}{2}} = (FB;LV).$$

Отсюда следует, что прямые KL, EF, UV пересекаются в одной точке. Аналогично доказывается, AC, EF, UV пересекаются в одной точке (рис.3).

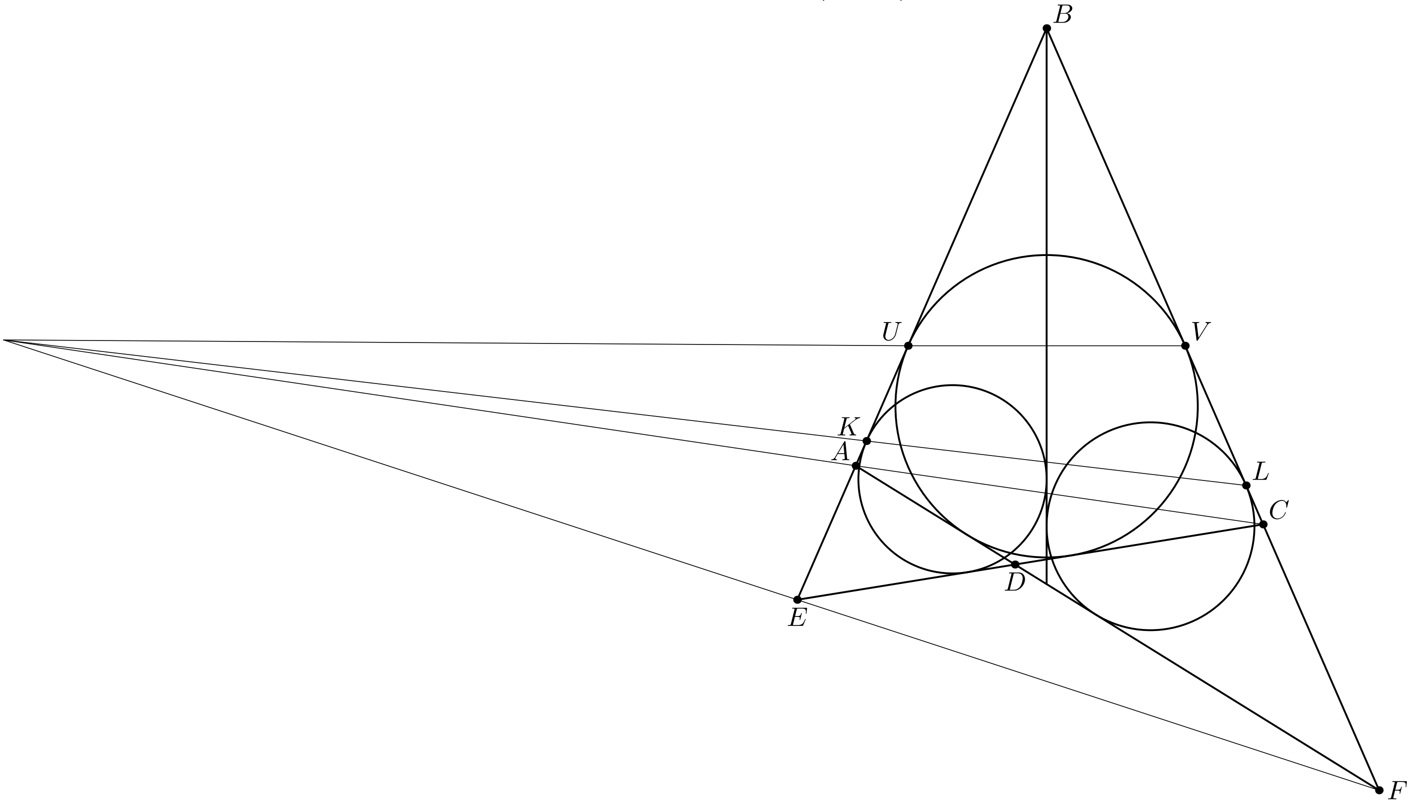

Рис.3

Отметим, что из утверждения задачи 3 следует, что точки K, L либо совпадают с A и C соответственно, либо лежат по одну сторону от прямой AC. Теперь утверждение задачи 1 получается достаточно просто.

Обозначим через a, b, c общие внутренние касательные к окружностям β и γ, γ и α, α и β, отличные от биссектрис ABC, а через A', B', C' — точки касания α, β, γ с соответствующими сторонами ABC. Согласно утверждению задачи 2, a, b, c пересекаются в одной точке X. Обозначим точки их пересечения с противоположными сторонами через A'', B'', C'', а точки пересечения, например, b и c соответственно с AB и AC через B_1, C_1. Тогда четырехугольник B_1AC_1X — описанный! Действительно, общими касательными к

β и γ (они проходят через A и X) он делится на два описанных; записав для них условие описанности, получаем требуемое.

Теперь, применив следствие из задачи 3, получаем, что B' и C' лежат либо оба на отрезках AB'', AC'', либо оба на их продолжениях. Сделав так со всеми парами сторон, получим противоречие.

Доказательство метода Штейнера

Покажем теперь, как с помощью утверждения задачи 1 обосновать построение кругов Мальфатти. Прежде всего напомним довольно известный факт.

Задача 4. Пусть OZ — биссектриса угла XOY. Окружность ω_1, вписанная в угол XOZ, касается прямой OX в точке U, а окружность ω_2, вписанная в угол YOZ, касается прямой OY м точке V. Тогда касательная, проведенная из U к ω_2, равна касательной, проведенной из V к ω_1.

Решение. Пусть U', V' — вторые точки пересечения ω_1, ω_2 с прямой UV. Утверждение задачи равносильно равенству хорд $UU' = VV'$. Обозначив через r_1, r_2 радиусы окружностей, получаем (рис.4)

$$\frac{UU'}{VV'} = \frac{r_1 \sin\angle OUV}{r_2 \sin\angle OVU} = \frac{r_1}{r_2} : \frac{OU}{OV} = 1.$$

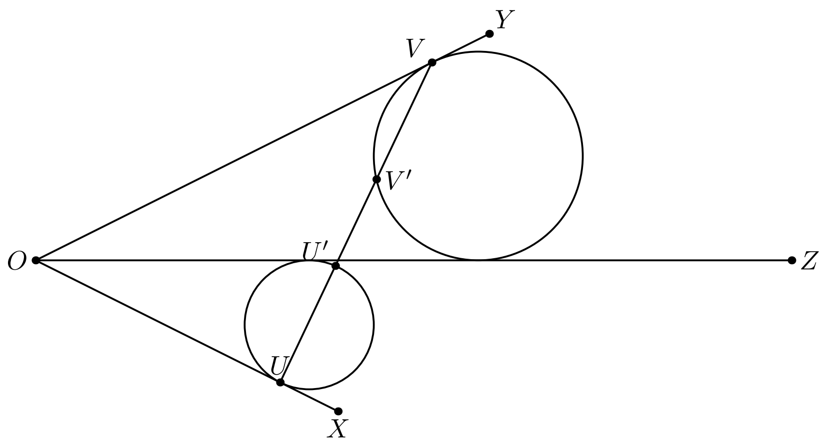

Рис.4

Заметим, что переформулировкой этой задачи является задача M1918.

Теперь нетрудно показать, что каждый из четырехугольников $XA'CB'$, $XB'AC'$, $XC'BA'$ является описанным. Действительно, разность длин, например, отрезков XA' и XB' равна разности длин касательных к окружности γ, проведенных из A' и B'. Поскольку эти касательные равны касательным, проведенным из C' к α и β, их разность есть просто длина общей внутренней касательной к этим окружностям, которая, очевидно, равна $CA' - CB'$.

Осталось показать, что вписанные в эти четырехугольники окружности касаются друг друга. Заметим, что окружность γ вписана в треугольник, образованный прямыми a, b и AB, а каждая из окружностей, вписанных в четырехугольники $XB'AC'$ и $XC'BA'$ касается двух сторон этого треугольника и прямой XC', разрезающей его на два треугольника. Найдя отрезки касательных к этим окружностям из вершины C', убеждаемся, что они равны.

В заключение отметим, что метод Штейнера позволяет решить не только классическую задачу Мальфатти, но и ее обобщение: построить три окружности, попарно касающиеся друг друга, так чтобы каждая из них касалась двух из трех данных прямых. Эта задача имеет 32 решения. С аналитическим методом их построения можно ознакомиться в статье В.Беленького и А.Заславского в "Математическом просвещении" №2, 1998. Подумайте, как для каждого из этих решений выглядит аналог задачи 1 и соответствующее геометрическое решение.