VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс. Решения.

1. (М. Рожкова, Украина) В неравнобедренном треугольнике ABC проведены высота из вершины A и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведенной из вершины A.

   Решение. Обозначим через I точку пересечения биссектрис, а через X и Y — точки пересечения высоты с биссектрисами углов B и C соответственно. Пусть для определённости $AB > AC$; тогда точки I и Y лежат на отрезках BY и AX, соответственно. Значит, $\angle AIY = \angle A/2 + \angle B/2 = 90^\circ - \angle C/2 = \angle IXY$, откуда (по теореме об угле между касательной и хордой) сразу следует утверждение задачи.

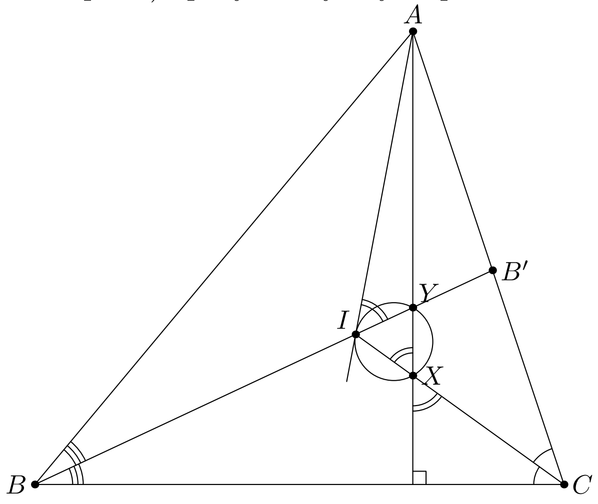

Рис. 8.1

2. (А. Акопян) Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что точки A, B и C можно накрыть кругом единичного радиуса.

   Решение. Обозначим искомое ГМТ через Φ. Очевидно, что Φ пусто при $AB > 2$, а при $AB = 2$ является кругом с диаметром AB. Пусть $AB < 2$, а окружности ω_A, ω_B с центрами A, B и радиусами, равными 1, пересекаются в точках P и Q. Рассмотрим круги единичного радиуса, покрывающие точки A и B; ГМТ их центров есть «линза», образованная дугами PQ окружностей ω_A и ω_B. Значит, Φ есть объединение кругов единичного радиуса с центрами в этой линзе.

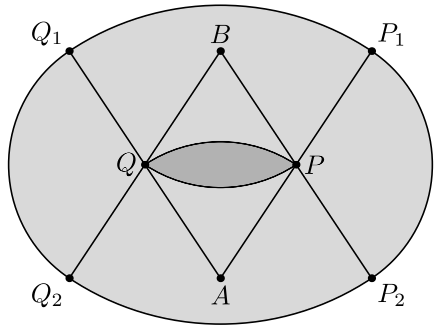

Рис. 8.2.1

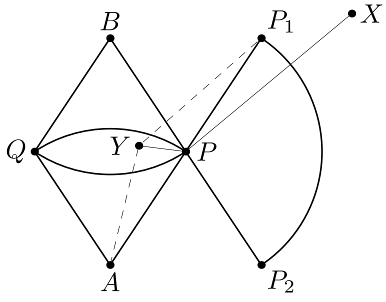

Рис 8.2.2

Построим точки P_1, P_2, Q_1, Q_2 такие, что P — середина отрезков AP_1, BP_2, а Q — середина отрезков AQ_1, BQ_2, и проведем четыре дуги окружностей: P_1Q_1 с центром A и радиусом 2, P_2Q_2 с центром B и радиусом 2, P_1P_2 с центром P и радиусом 1, Q_1Q_2 с центром Q и радиусом 1 (рис. 8.2.1). Докажем, что Φ есть фигура, ограниченная этими дугами. Ясно, что любая точка X этой фигуры принадлежат Φ. В самом деле, если X лежит в секторе P_1PP_2, то она лежит в круге с центром P; если же она лежит в секторе P_1AQ_1, то она лежит в круге с центром Y, где Y — точка пересечения луча AX и дуги PQ окружности ω_1. Остальные случаи аналогичны.

Осталось показать, что любая точка X вне нашей фигуры не принадлежат Φ. Если X лежит в угле P_1AQ_1, то $AX > 2$, и точки A и X не накрываются единичным кругом. Пусть теперь X лежит в угле P_1PP_2; нам надо доказать, что расстояние от X до любой точки Y, лежащей в линзе, больше 1. Для этого покажем, что $\angle XPY \geqslant 90^\circ$ (и, следовательно, $XY \geqslant XP > 1$). Пусть для определённости в угле XPY лежит точка P_1 (рис. 8.2.2); тогда $\angle XPY \geqslant \angle P_1PY$. С другой стороны, $AY \leqslant 1$, а $AP_1 = 2$, откуда $P_1Y \geqslant 1 \geqslant AY$. Это и означает, что точки A и Y лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к AP_1, т.е. $90^\circ \leqslant \angle P_1PY \leqslant \angle XPY$.

3. (С. Берлов, Д. Прокопенко) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

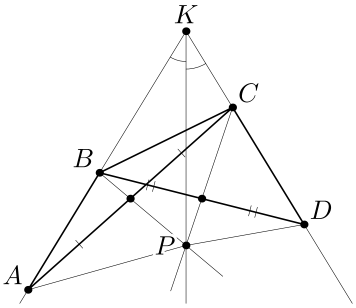

Рис. 8.3

Решение. Поскольку прямые BP и CP являются медианами треугольников ABC и BCD, то точки A и C равноудалены от BP, а B и D — от CP. Это значит, что $S_{PAB} = S_{PBC} = S_{PCD}$. С другой стороны, высоты треугольников PAB и PCD из точки P равны, так как P лежит на биссектрисе; значит, равны и их основания, что и требовалось доказать.

4. (И. Богданов) В равные углы X_1OY и YOX_2 вписаны окружности ω_1 и ω_2, касающиеся сторон OX_1 и OX_2 в точках A_1 и A_2 соответственно, а стороны OY — в точках B_1 и B_2. Точка C_1 — вторая точка пересечения A_1B_2 и ω_1, а точка C_2 — вторая точка пересечения A_2B_1 и ω_2. Докажите, что C_1C_2 — общая касательная к окружностям.

Решение. Можно считать, что $OA_2 > OA_1$. Треугольники OA_1B_2 и OB_1A_2 равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $\angle OB_2A_1 = \angle OA_2B_1$ и $\angle OA_1B_2 = \angle OB_1A_2$. Далее, из равенства $\angle A_1OB_1 = \angle B_2OA_2 = \varphi$ следует, что $\angle A_1C_1B_1 = 90^\circ - \varphi/2 = 180^\circ - (90^\circ + \varphi/2) = 180^\circ - \angle A_2C_2B_2$. Следовательно, четырехугольник $B_2C_2B_1C_1$ вписан, поэтому $\angle B_1C_2C_1 = \angle B_1B_2C_1 = \angle OA_2B_1$. Наконец, поскольку прямые C_1C_2 и OA_2 образуют равные углы с хордой A_2C_2 окружности ω_2, а OA_2 —

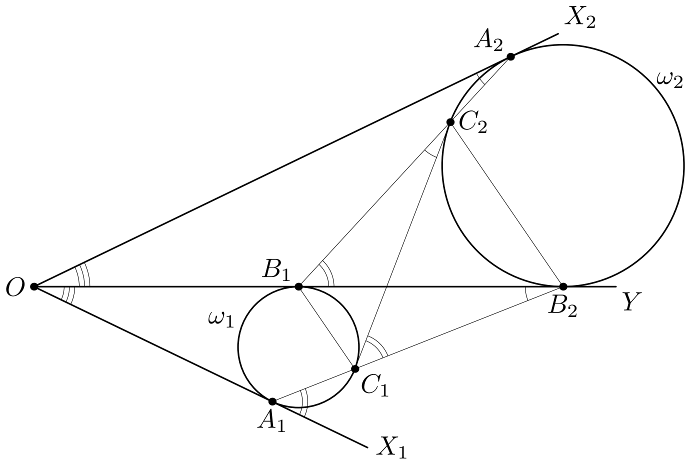

Рис. 8.4

касательная, то и C_1C_2 — также касательная. Касание C_1C_2 и ω_1 доказывается аналогично.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что из равенства треугольников OA_1B_2 и OA_2B_1 следует $A_1B_2 = A_2B_1$, а затем применив теорему о секущей и касательной: $B_1C_2 \cdot B_1A_2 = B_1B_2^2 = B_2C_1 \cdot B_2A_1$, откуда $B_2C_1 = B_1C_2$. Теперь, поскольку четырёхугольник $B_1C_2B_2C_1$ вписан, он является равнобокой трапецией и, следовательно, симметричен относительно линии центров наших окружностей.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс. Решения.

5. (Б. Френкин) В треугольнике ABC проведены высота AH, биссектриса BL и медиана CM. Известно, что в треугольнике HLM прямая AH является высотой, а BL — биссектрисой. Докажите, что CM является в этом треугольнике медианой.

   Решение. Так как $AH \perp LM$, то $LM \parallel BC$, т.е. LM — средняя линия треугольника. Значит, BL — биссектриса и медиана треугольника ABC, т.е $AB = BC$. Поскольку BL является биссектрисой углов ABC и HLM, точки H и M симметричны относительно нее; значит, $\frac{1}{2}AB = BM = BH = \frac{1}{2}BC$, и высота AH является медианой треугольника ABC. Таким образом, $AC = AB = BC$, треугольник ABC — равносторонний, и из симметрии CM делит HL пополам, что и требовалось доказать.

6. (Д. Прокопенко) Точки E, F — середины сторон BC, CD квадрата $ABCD$. Прямые AE и BF пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle PDA = \angle AED$.

   Первое решение. Заметим, что прямые AE и BF перпендикулярны, поскольку получаются друг из друга поворотом на $90°$ вокруг центра квадрата. Пусть прямая, проходящая через A и параллельная BF, пересекает прямую CD в точке G. Так как $ABFG$ — параллелограмм, то FG=AB и, значит, $FD = DG$. По теореме Фалеса прямая, проходящая через D и параллельная BF, является медианой треугольника ADP. Поскольку $AE \perp BF$, эта прямая является и высотой (рис. 8.6). Следовательно, треугольник ADP — равнобедренный, как и треугольник AED. Угол EAD в обоих треугольниках является углом при основании, поэтому углы при вершинах также равны.

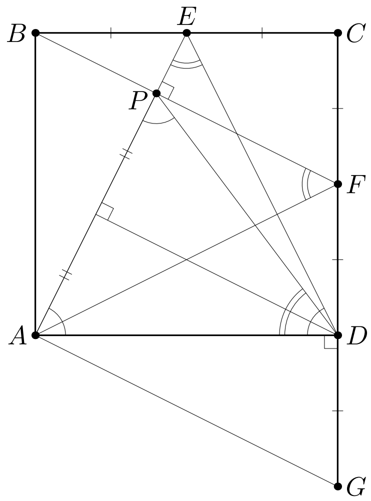

Рис. 8.6

Второе решение. Опять же заметим, что $\angle APF = 90° = \angle ADF$. Значит, четырехугольник $APFD$ вписан, откуда $\angle ADP = \angle AFP = \angle AFB$. С другой стороны, $\angle AFB = \angle AED$, поскольку треугольники ABF и ADE равны.

Третье решение. Пусть $AB = 1$. Поскольку BP — высота прямоугольного треугольника с катетами 1 и $\frac{1}{2}$, получаем $AP : PE = 4 : 1$. Тогда по теореме Фалеса проекция отрезка DP на CD равна $\frac{4}{5}$. Аналогично получаем, что его проекция на AD равна $\frac{3}{5}$. Значит, по теореме Пифагора $DP = 1 = AD$. Дальнейшие рассуждения такие же, как в первом решении.

7. (Б. Френкин) Каждый из двух правильных многоугольников P и Q разрезали прямой на две части. Одну из частей P и одну из частей Q сложили друг с другом по линии разреза. Может ли получиться правильный многоугольник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть сторон?

Ответ. Да, может; 3 или 4 стороны.

Рис. 8.7

Решение. Примеры, как может получиться правильный треугольник или квадрат, приведены на рисунке 8.7. Предположим, что у полученного многоугольника M хотя бы 5 сторон. Разрез пересекает его по двум точкам, каждая из которых принадлежит максимум двум сторонам. Значит, у M есть сторона AB, не имеющая общих точек (даже вершин) с разрезом. Пусть она лежит в куске, полученном из P; тогда сторона P равна AB, и углы при ней равны углам многоугольника M. Поскольку правильный многоугольник однозначно задается стороной и углом при ней, то $P = M$, что невозможно.

8. (А. Заславский) Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. На отрезках A_1I и B_1I построены как на основаниях равнобедренные треугольники с вершинами A_2 и B_2, лежащими на прямой AB. Известно, что прямая CI делит отрезок A_2B_2 пополам. Верно ли, что треугольник ABC — равнобедренный?

Ответ. Нет, не обязательно.

Решение. Покажем, что условию задачи удовлетворяет любой треугольник с $\angle C = 120°$. Пусть CC_1 — биссектриса угла C. Тогда CA_1 — внешняя биссектриса угла ACC_1, т.е. точка A_1 равноудалена от прямых AC и CC_1. Но она также равноудалена от прямых AC и AB, поэтому C_1A_1 — биссектриса угла CC_1B.

Значит, точка J, симметричная I относительно C_1A_1, лежит на прямой AB (рис. 8.8). Заметим, что $\angle AA_1C_1 = \angle A_1C_1B - \angle A_1AB = \frac{1}{2}(\angle CC_1B - \angle CAB) = \frac{1}{2}\angle ACC_1 = 30°$, откуда $\angle IA_1J = 2\angle AA_1C_1 = 60°$. Итого, в равнобедренном треугольнике IA_1J ($IA_1 = A_1J$) угол равен $60°$; значит, он равносторонний, $IJ = JA_1$, и потому $A_2 = J$. Таким образом, мы получили, что $A_2C_1 = JC_1 = IC_1$. Аналогично получаем $B_2C_1 = IC_1 = A_2C_1$, что и требовалось доказать.

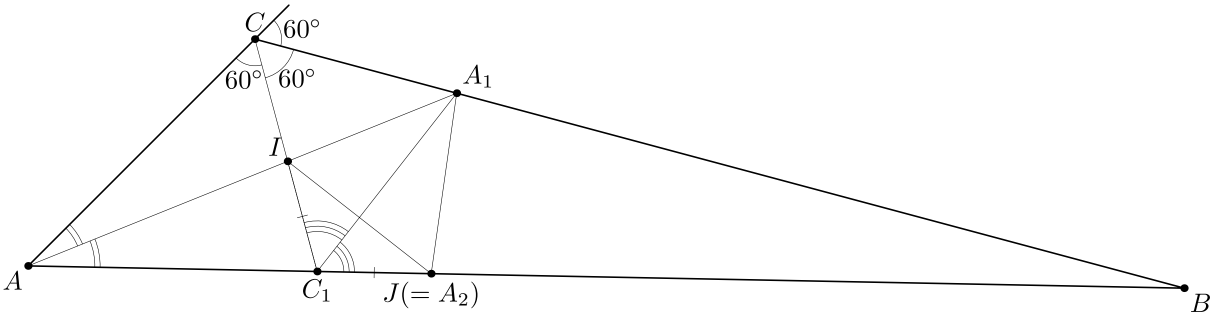

Рис. 8.8

Замечание. Можно показать, что в треугольнике, удовлетворяющем условию задачи, обязательно либо $AC = BC$, либо $\angle C = 120°$.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс. Решения.

1. (Б. Френкин) Для каждой вершины треугольника ABC нашли угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из этой вершины. Оказалось, что эти углы в вершинах A и B равны друг другу и меньше, чем угол в вершине C. Чему равен угол C треугольника?

   Ответ. 60°.

   Решение. Нетрудно посчитать, что угол между биссектрисой и высотой в вершине X треугольника XYZ равен $\frac{1}{2}|\angle Y - \angle Z|$. Следовательно, если эти углы в вершинах A и B треугольника ABC равны, то $\angle A - \angle C = \angle B - \angle C$ или $\angle A - \angle C = \angle C - \angle B$. В первом случае треугольник равнобедренный, т.е. высота и биссектриса из вершины C совпадают, что противоречит условию. Во втором случае $\angle C = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 60^\circ$.

   Замечание. Условие задачи выполняется в любом неравностороннем треугольнике с $\angle C = 60^\circ$.

2. (А. Акопян) Два треугольника пересекаются. Докажите, что внутри описанной окружности одного из них лежит хотя бы одна вершина другого. (Здесь треугольником считается часть плоскости, ограниченная замкнутой трёхзвенной ломаной; точка, лежащая на окружности, считается лежащей внутри нее.)

   Решение. Очевидно, что, если одна из описанных окружностей лежит внутри другой, то утверждение задачи выполнено, а если каждая из окружностей лежит вне другой, то треугольники не могут пересекаться. Поэтому будем считать, что описанные окружности треугольников пересекаются в точках P и Q (возможно, совпадающих), и предположим, что утверждение задачи не выполняется. Тогда вершины каждого из треугольников лежат на дуге PQ соответствующей окружности, расположенной вне другой окружности. Но эти дуги лежат по разные стороны от прямой PQ. Значит, сами треугольники тоже лежат по разные стороны от этой прямой и не могут пересекаться. (В случае, если $P = Q$, в качестве прямой PQ рассматривается общая касательная к окружностям.)

3. (В. Ясинский, Украина) На прямой лежат точки X, Y, Z (именно в таком порядке). Треугольники XAB, YBC, ZCD — правильные, причем вершины первого и третьего ориентированы против часовой стрелки, а второго по часовой стрелке. Докажите, что прямые AC, BD и XY пересекаются в одной точке.

   Решение. Через $\angle(k, \ell)$ будем обозначать направленный угол между прямыми k и ℓ (считающийся против часовой стрелки).

   При повороте на 60° по часовой стрелке вокруг B точки A и C переходят соответственно в X и Y. Следовательно, $\angle(XY, AC) = 60^\circ$. Пусть P — точка пересечения прямых XY и AC. Тогда $\angle(XP, AP) = 60^\circ = \angle(XB, AB)$, т.е. точки A, X, P, B лежат на одной окружности. Отсюда $\angle(CP, PB) = \angle(AX, XB) = 60^\circ = \angle(CY, YB)$, т.е. точки B, C, P, Y также лежат на одной окружности. Таким образом, точка P является второй точкой пересечения прямой XZ и описанной окружности треугольника BCY. Аналогично показывается, что прямая BD также проходит через эту

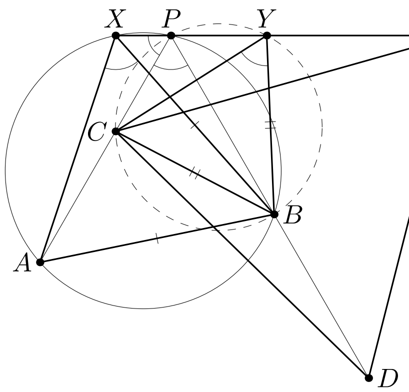

Рис. 9.3

точку. (В случае, если эти окружность и прямая касаются, получаем $P = Y$, и все три прямые проходят через Y.)

4. (А. Заславский) В треугольнике ABC отметили точки A', B' касания сторон BC, AC с вписанной окружностью и точку G пересечения отрезков AA' и BB'. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

   Первое решение. Обозначим через C' точку касания вписанной окружности со стороной AB. Сделаем инверсию с центром в точке B'. Будем обозначать образы точек индексами «1», т.е. образом точки A' будет A'_1 и т.п. Тогда образами прямых AB и BC будут окружности A_1B_1B' и C_1B_1B', а образом вписанной окружности — прямая $A'_1C'_1$, касающаяся обеих окружностей (рис. 9.4.1). Далее, радикальная ось $B'B_1$ этих окружностей, содержащая точку G_1, делит отрезок $A'_1C'_1$ пополам.

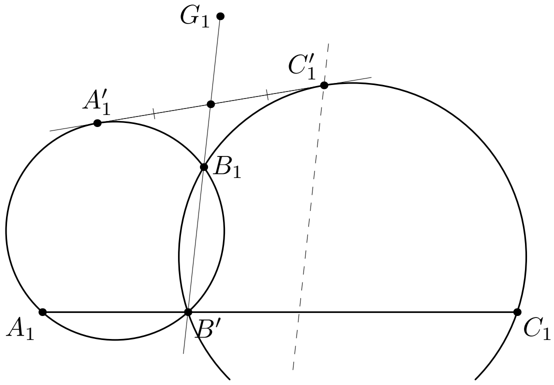

Рис. 9.4.1

Отсюда вытекает построение. Построим ℓ_1 — образ прямой $B'G$ (на которой лежит B_1) при гомотетии с центром A'_1 и коэффициентом 2; эта прямая содержит C'_1. Значит, её инверсный образ содержит точку C'. Проведя аналогичное построение, начиная с инверсии в точке A', получим вторую окружность, содержащую C' и, значит, сможем восстановить точку C' (вообще говоря, двумя способами). После этого восстанавливается описанная окружность треугольника $A'B'C'$ и стороны исходного треугольника, являющиеся касательными к ней.

Второе решение. Пусть C' — точка касания вписанной окружности со стороной AB, A_1, B_1, C_1 — проекции G на стороны треугольника $A'B'C'$ (рис. 9.4.2).

Заметим, что

$$\frac{GB_1}{GA_1} = \frac{\rho(C, A'C')}{\rho(C, B'C')} = \frac{CA' \sin\angle CA'C'}{CB' \sin\angle CB'C'} = \frac{\sin\angle A'B'C'}{\sin\angle B'A'C'},$$

то есть $GB_1 \sin\angle B'A'C' = GA_1 \sin\angle A'B'C'$. Это означает, что проекции отрезков GA_1 и GB_1 на прямую $A'B'$ равны, и C_1G является медианой в треугольнике $A_1B_1C_1$. Аналогично, A_1G также является медианой в этом треугольнике, т.е. G — его центр тяжести.

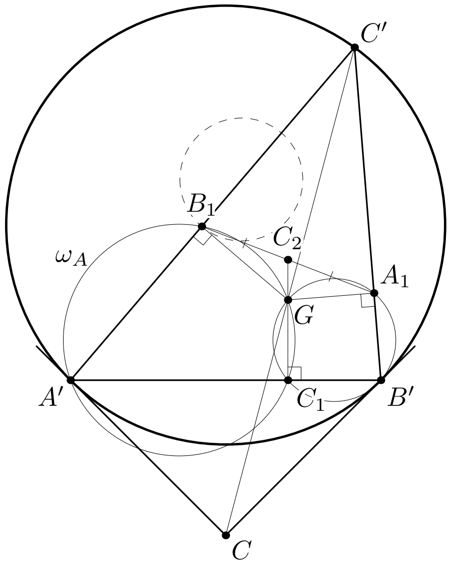

Рис. 9.4.2

Отсюда получаем искомое построение. Построим точку C_1 и ее образ C_2 при гомотетии с центром G и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ (таким образом, C_2 — середина A_1B_1). Далее построим окружности ω_A, ω_B с диаметрами GA', GB', и найдем точку пересечения окружности ω_A с окружностью, симметричной ω_B относительно C_2; мы получили точку B_1 (опять же, вообще говоря, двумя способами). Точка A_1 симметрична ей относительно C_2. Теперь можно восстановить прямые $A'C'$ и $B'C'$ как перпендикуляры к GA_1 и GB_1 в точках A_1 и B_1; дальнейшее ясно.

Замечание. В первом абзаце по сути доказывается, что точка Лемуана G (треугольника $A'B'C'$) является центром тяжести своего педального треугольника $A_1B_1C_1$.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс. Решения.

5. (Д. Швецов) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90°$), касается сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке A_2. A_0 — центр окружности, описанной около треугольника $A_1A_2B_1$; аналогично определяется точка C_0. Найдите угол A_0BC_0.

   Решение. Поскольку точки A_1 и A_2 симметричны относительно середины отрезка BC, то $A_0B = A_0C$. С другой стороны, A_0 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_1, который совпадает с биссектрисой угла C. Следовательно, $\angle CBA_0 = \angle A_0CB = \frac{1}{2}\angle C$. Аналогично $ABC_0 = \frac{1}{2}\angle A$, и, значит, $\angle A_0BC_0 = \angle C - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 45°$.

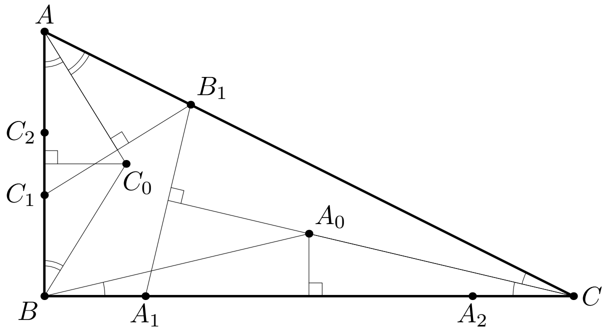

Рис. 9.5.

6. (Ю. Блинков) Произвольная прямая, проходящая через вершину B треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке K, а описанную окружность в точке M. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников AMK.

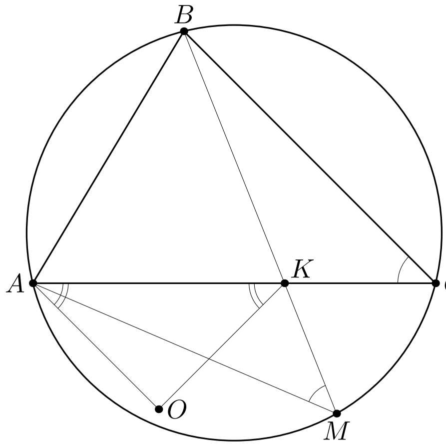

Рис. 9.6

   Решение. Пусть угол C — острый. Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMK. Так как $\angle AMK = \angle AMB = \angle C$, то $\angle AOK = 2\angle C$ и $\angle OKA = \angle OAC = 90° - \angle C$, т.е. этот угол не зависит от положения точек K, M (рис. 9.6). Следовательно, все центры лежат на одной прямой. Более того, поскольку все прямые KO при различных положениях точки K параллельны друг другу, то, когда точка K пробегает отрезок AC, точка O пробегает боковую сторону равнобедренного треугольника с основанием AC и углом при основании $90° - \angle C$ (этот треугольник и точка B лежат в разных полуплоскостях относительно AC).

Если угол C тупой, то рассуждения аналогичны; получается боковая сторона равнобедренного треугольника с углом при основании $\angle C - 90°$, лежащего по ту же сторону от AC, что и B.

7. (Н. Белухов, Болгария) В треугольнике ABC AL_a и AM_a — внутренняя и внешняя биссектрисы угла A. Пусть ω_a — окружность, симметричная описанной окружности треугольника AL_aM_a относительно середины BC. Окружность ω_b определена аналогично. Докажите, что ω_a и ω_b касаются тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.

   Первое решение. Известно, что описанная окружность треугольника AL_aM_a перпендикулярна описанной окружности Ω треугольника ABC и является геометрическим местом точек X, для которых $BX : CX = BA : CA$. Окружность ω_a симметрична её относительно серединного перпендикуляра к BC; поэтому ω_a также перпендикулярна Ω и является геометрическим местом точек X, для которых $BX : CX = CA : BA$. Аналогичный факт верен и для ω_b. Значит, множество общих точек ω_a и ω_b переходит в себя при инверсии относительно Ω; поэтому они касаются тогда и только тогда, когда некоторая их общая точка X лежит на Ω; при этом $AX : BX : CX = BC : CA : AB$.

   Итак, если окружности касаются, то по теореме Птолемея одно из произведений $AX \cdot BC$, $BX \cdot CA$, $CX \cdot AB$ равно сумме двух других. Так как эти произведения пропорциональны квадратам сторон треугольника ABC, он должен быть прямоугольным.

   Наоборот, пусть треугольник ABC прямоугольный, и точки A, B, C, X (в некотором порядке) образуют прямоугольник. Тогда эти точки лежат на одной окружности, и нетрудно убедиться, что $AX : BX : CX = BC : CA : AB$; это значит, что X — общая точка ω_a и ω_b, а это равносильно тому, что они касаются.

   Второе решение. Опять же напомним, что описанная окружность треугольника AL_aM_a является геометрическим местом точек X, для которых $BX : CX = BA : CA$, а её центр O_a лежит на касательной к Ω в точке A. Кроме того, известно, что точки O_a, O_b, O_c лежат на одной прямой. Получаем, что центр O'_a окружности ω_a симметричен O_a относительно середины BC, а её радиус равен длине касательной O'_aA', проведённой из O'_a к Ω (точка A' симметрична к A относительно серединного перпендикуляра к BC).

   Далее, точка X пересечения двух из окружностей ω_a, ω_b, ω_c удовлетворяет соотношениям $AX : BX : CX = BC : CA : AB$, то есть лежит и на третьей окружности. Значит, если две из окружностей ω_a, ω_b, ω_c касаются в точке X, то третья также проходит через эту точку и касается их обеих (ибо больше не имеет с ними общих точек).

   Это замечание позволяет ограничиться случаем, когда C — наибольший угол треугольника ABC. Если $\angle C = 90°$, то касательные из точек O'_a и O'_b к Ω касаются её в одной и той же точке $A' = B'$, диаметрально противоположной C (рис. 9.7.1).

Значит, точки O'_a, O'_b, A' лежат на одной прямой и, следовательно, окружности с центрами O'_a, O'_b, проходящие через A', касаются в ней.

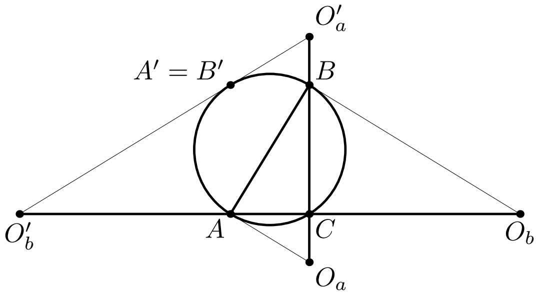

Рис. 9.7.1

Пусть угол C острый; проведём вторые касательные из точек O'_a и O'_b к Ω; тогда точки касания будут расположены так, как на рис. 9.7.2, и, следовательно, дуги $B'B''$ и $C'C''$ окружностей ω_a и ω_b пересекутся. Наконец, если угол C тупой (рис. 9.7.3), то отрезок $O'_aO'_b$ пересекает Ω в двух точках K и L; тогда $O_aA' + O_bB' = \sqrt{O_aK \cdot O_aL} + \sqrt{O_bK \cdot O_bL} < \dfrac{O_aK + O_aL}{2} + \dfrac{O_bK + O_bL}{2} = O_aO_b$; значит, сумма радиусов меньше расстояния между центрами, и окружности не имеют общих точек.

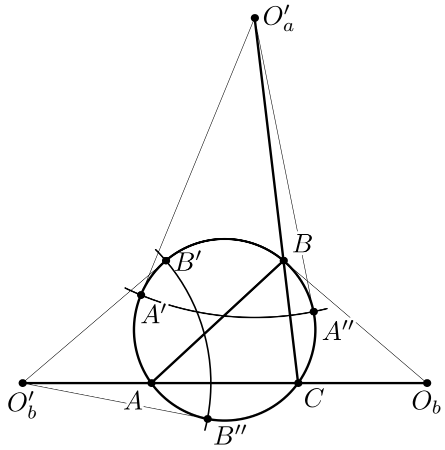

Рис. 9.7.2

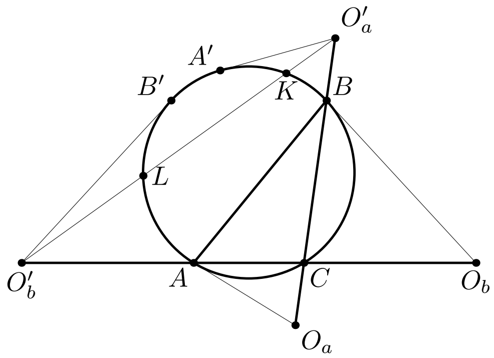

Рис. 9.7.3

8. (В. Гуровиц) На доске нарисован правильный многоугольник. Володя хочет отметить k точек на его периметре так, чтобы не существовало другого правильного многоугольника (не обязательно с тем же числом сторон), также содержащего отмеченные точки на своем периметре. Найдите наименьшее k, достаточное для любого исходного многоугольника.

Ответ. $k = 5$.

Решение. 1. Докажем сначала, что пяти точек достаточно. Пусть A, B, C, D — четыре последовательные вершины многоугольника (возможно, $A = D$). Отметим точки A, B, произвольную точку X на стороне AB, точку Y на стороне BC, достаточно близкую к B, и точку Z на стороне CD, достаточно близкую к C.

Пусть P — исходный многоугольник, Q — некоторый правильный многоугольник, содержащий на периметре наши пять точек, α и β — углы этих многоугольников. Прямая AB должна содержать сторону многоугольника Q, так как на ней лежат три отмеченных точки. Пусть эта сторона — $A'B'$ (рис. 9.8.1). Далее, пусть сторона Q, содержащая Y, лежит на прямой ℓ; тогда точки B и Z должны лежать по одну сторону от неё. Поскольку Z близка к C, это означает, что угол между прямыми ℓ и BC мал. С другой стороны, $\alpha = \angle ABY \geqslant \angle A'B'Y \geqslant \beta$, т.е. количество сторон у Q не больше, чем у P. Значит, угол между ℓ и BC может быть достаточно мал лишь тогда, когда эти прямые совпадают. Итак, прямая BC также содержит сторону Q, а точка B тогда является его вершиной. Отсюда следует, что P и Q гомотетичны с центром в точке B, и контур Q может содержать Z только тогда, когда $P = Q$. Итак, многоугольник восстановился однозначно.

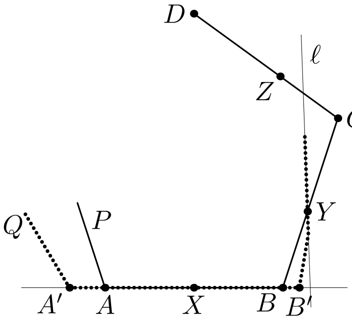

Рис. 9.8.1

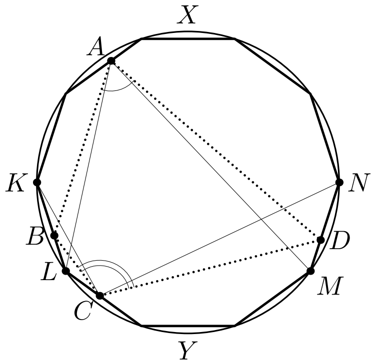

Рис. 9.8.2

2. Докажем теперь, что при достаточно большом числе сторон n правильного многоугольника P четырех точек не хватит для его задания. Предположим, что три из этих точек лежат на одной стороне AB многоугольника P. Правильный треугольник, построенный на AB, лежит целиком внутри P, т.е. четвертая из отмеченных точек лежит вне его. Поэтому, применив к нашему треугольнику гомотетию с центром в середине AB и подходящим коэффициентом, большим 1, можно добиться того, что и четвёртая отмеченная точка окажется на его контуре. Значит, в этом случае многоугольник однозначно не восстанавливается.

Если же наше предположение неверно, то отмеченные точки образуют выпуклый четырехугольник $ABCD$, «достаточно близкий» ко вписанному. Именно, покажем, что $\angle A + \angle C \geqslant 180^\circ - 360^\circ/n$. Пусть точки B и C лежат на сторонах KL и MN многоугольника P, причём точки A, K и N лежат по одну сторону от BD (рис. 9.8.2). Опишем вокруг P окружность ω с центром O. Тогда $\angle A + \angle C \geqslant \angle LAM + \angle KCN = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{LYM} + \overset{\frown}{KXN}) = 180^\circ - 360^\circ/n$. Аналогично, $\angle B + \angle D \geqslant 180^\circ - 360^\circ/n$, то есть $\angle A + \angle C \leqslant 180^\circ + 360^\circ/n$.

Мы покажем, что $ABCD$ можно вписать либо в квадрат, либо в правильный треугольник. Пусть $\angle A$ — наибольший угол 4-угольника $ABCD$, а $\angle B \geqslant \angle D$. Возможны несколько случаев.

Случай 1. Пусть $\angle B \geqslant 90^\circ$. Тогда ясно, что $ABCD$ можно вписать в квадрат так, чтобы точки A, B попали на одну из сторон (одним из способов на рис. 9.8.3, в

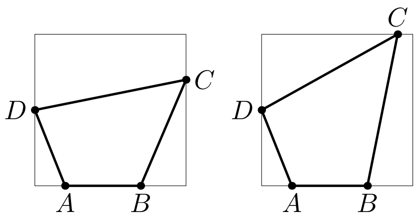

Рис. 9.8.3

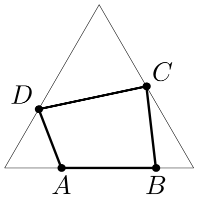

Рис. 9.8.4

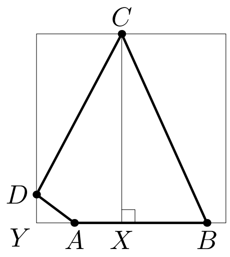

Рис. 9.8.5

зависимости от того, что больше: проекция CD на AB или проекция $ABCD$ на прямую, перпендикулярную AB).

Случай 2. Пусть теперь $\angle D \leqslant \angle B < 90°$, но при этом обе суммы $\angle A + \angle D$ и $\angle B + \angle C$ не превосходят $240°$. Проведём через C и D прямые, составляющие с AB углы $60°$ (рис. 9.8.4). Тогда из наших неравенств следует, что все точки A, B, C, D лежат на сторонах этого треугольника.

Случай 3. Нам остался случай, когда $\angle D \leqslant \angle B < 90°$ (а значит, оба этих угла близки к $90°$), но одна из сумм $\angle A + \angle D$ и $\angle B + \angle C$ больше $240°$ (поскольку $\angle A$ — наибольший, это может быть лишь сумма $\angle A + \angle D$). Покажем, что в этом случае можно вписать $ABCD$ в квадрат так, как показано на рис. 9.8.5. Пусть X и Y — проекции точек C и D на AB; тогда нам достаточно проверить, что $YB \leqslant CX$. Но $\angle DCX = 270° - (\angle A + \angle D) \leqslant 30°$, поэтому $XY \leqslant CX \operatorname{tg} 30° \leqslant CX/\sqrt{3}$; с другой стороны, $\angle B \geqslant \frac{1}{2}(\angle B + \angle D) \geqslant 90° - 180°/n$, т.е. при большом n имеем $\operatorname{tg} \angle B \geqslant 10$; значит, $XB = CX \operatorname{ctg} \angle B \leqslant CX/10$, и $YB \leqslant CX/\sqrt{3} + CX/10 < CX$, что и требовалось.

Замечание. Пять точек требуются не для любого правильного многоугольника. Так, например, правильный треугольник можно восстановить и по четырём точкам: трём вершинам и внутренней точке одной из сторон.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс. Решения.

1. (А. Заславский) Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника; R, r — радиусы этих окружностей; J — точка, симметричная вершине прямого угла относительно I. Найдите OJ.

   Ответ. $R - 2r$.

   Решение. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник, $\angle C = 90°$. Очевидно, что окружность с центром J и радиусом $2r$ касается AC и BC. Докажем, что она касается также описанной около треугольника ABC окружности Ω; отсюда как раз будет следовать, что $OJ = R - 2r$.

   Рассмотрим окружность ω, касающуюся AC, BC в точках P, Q соответственно, и касающуюся Ω изнутри в точке T; нам надо доказать, что J — центр ω. Так как T — центр гомотетии ω и Ω, прямые TP, TQ вторично пересекают описанную окружность в точках, касательные в которых параллельны AC и BC, т.е. в серединах B', A' дуг AC, BC. Поэтому прямые AA' и BB' пересекаются в точке I. Применяя теорему Паскаля к ломаной $CAA'TB'B$, получаем, что точки P, I, Q лежат на одной прямой. Наконец, поскольку прямая PQ перпендикулярна биссектрисе угла C, получаем, что P, Q — проекции J на AC и BC (рис. 10.1), что и означает, что J — центр ω.

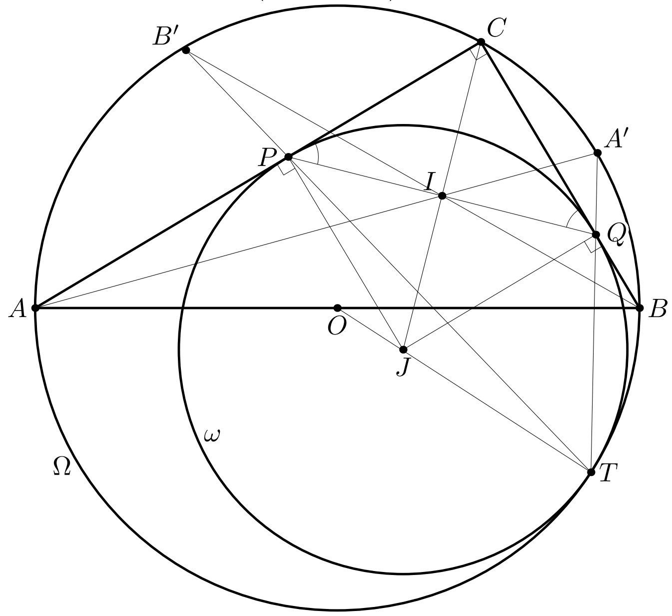

Рис. 10.1

   Второе решение. По формуле Эйлера, $OI = \sqrt{R(R-2r)}$. Поскольку OI — медиана в треугольнике OCJ, получаем $4OI^2 = 2(OC^2 + OJ^2) - CJ^2$, или $4R(R-2r) = 2R^2 + 2OJ^2 - 8r^2$, откуда и следует $OJ^2 = (R-2r)^2$.

2. (П. Кожевников) Каждая из двух равных окружностей ω_1 и ω_2 проходит через центр другой. Треугольник ABC вписан в ω_1, а прямые AC, BC касаются ω_2. Докажите, что $\cos\angle A + \cos\angle B = 1$.

   Решение. Пусть R — радиус окружностей, O — центр ω_2, P — точка на ω_1, диаметрально противоположная к O, а A' — точка касания AC и ω_2. Так как CO — биссектриса угла ACB, точки A и B симметричны относительно прямой OP.

Заменим сумму косинусов произведением: $\cos\angle A + \cos\angle B = 2\sin\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle A-\angle B}{2}$. Из отмеченной выше симметрии следует, что $\frac{|\angle A-\angle B|}{2} = \angle COP$, т.е. $OP\cos\frac{\angle A-\angle B}{2} = CO$. Наконец, поскольку $\frac{\angle C}{2} = \angle OCA = \angle OCA'$, то $CO\sin\frac{\angle C}{2} = OA' = R = \frac{OP}{2}$ (рис. 10.2). Итого, $\cos\angle A + \cos\angle B = 2\cdot\dfrac{CO}{OP}\cdot\dfrac{OP}{2CO} = 1$, что и требовалось.

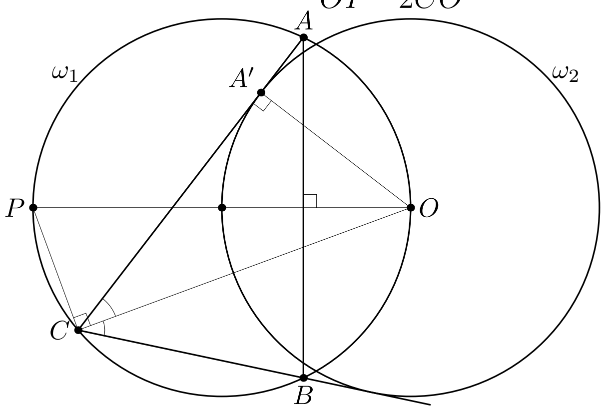

Рис. 10.2

3. (А. Акопян) Два выпуклых многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ ($n \geqslant 4$) таковы, что любая сторона первого больше соответствующей стороны второго. Может ли оказаться, что любая диагональ второго больше соответствующей диагонали первого?

Ответ. Нет.

Решение. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Пусть ABC, ABC' — два таких треугольника, что $AC > AC'$, $BC > BC'$. Тогда для любой точки K отрезка AB имеем $CK > C'K$.

Доказательство. Из условия следует, что точки A, B, C' лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к отрезку CC'. Значит, и точка K лежит по ту же сторону, что равносильно искомому неравенству. □

Докажем сначала утверждение задачи при $n = 4$. Предположим противное. Можно считать, что $\frac{A_1A_3}{B_1B_3} \geqslant \frac{A_2A_4}{B_2B_4}$. Применив гомотетию (с коэффициентом $\frac{A_1A_3}{B_1B_3}$) ко второму четырёхугольнику, можно считать, что $B_1B_3 = A_1A_3$, $B_2B_4 \geqslant A_2A_4$. Теперь, передвинув второй четырёхугольник, можно также считать, что $B_1 = A_1$, $B_3 = A_3$; при этом $A_1A_2 > A_1B_2$, $A_2A_3 > B_2A_3$, $A_3A_4 > A_3B_4$, $A_4A_1 > B_4A_1$. Пусть E — точка пересечения диагоналей A_1A_3 и A_2A_4; тогда по Лемме имеем $A_2E > B_2E$, $A_4E > B_4E$ и, следовательно, $A_2A_4 = A_2E + A_4E > B_2E + B_4E \geqslant B_2B_4$. Противоречие.

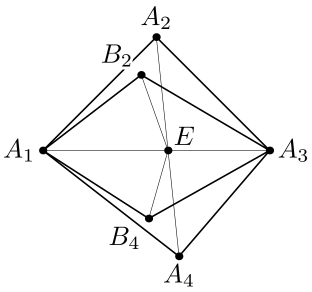

Рис. 10.3

Теперь докажем утверждение задачи индукцией по n. База при $n = 4$ уже доказана. Пусть $n \geqslant 5$. Немного подвигав вершины второго многоугольника, можно добиться того, что все неравенства из задачи сохранятся, но при этом все отношения длин соответствующих диагоналей станут различными. Пусть $\frac{A_1A_i}{B_1B_i}$ — максимальное такое отношение. Тогда, применив соответствующую гомотетию (с коэффициентом, меньшим 1) ко второму многоугольнику, мы получим, что $A_1A_i > B_1B_i$, но любая другая диагональ первого многоугольника меньше соответствующей диагонали второго. Теперь осталось применить предположение индукции к многоугольникам $A_1A_2 \dots A_i$ и $B_1B_2 \dots B_i$ (если $i > 3$) или $A_iA_{i+1} \dots A_n$ и $B_iB_{i+1} \dots B_n$ (если $i < n - 1$).

4. (Ф. Нилов) Проекции двух точек на стороны четырёхугольника лежат на двух различных концентрических окружностях (проекции каждой точки образуют вписанный четырехугольник, а радиусы соответствующих окружностей различны). Докажите, что четырёхугольник — параллелограмм.

   Решение. Пусть проекции точки P на стороны лежат на окружности с центром O, а P' — точка, симметричная P относительно O. Тогда проекции P' на стороны лежат на той же окружности. При этом P и P' являются фокусами некоторой коники, касающейся прямых, содержащих стороны четырехугольника. Поэтому, если выполнены условия задачи, то стороны четырехугольника являются общими касательными к двум коникам с общим центром. Таких касательных может быть не больше четырёх, и они разбиваются на две пары симметричных (а, значит, параллельных). Значит, стороны четырёхугольника и являются этими четырьмя касательными, а следовательно, образуют параллелограмм.

VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс. Решения.

5. (Д. Швецов) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90^\circ$) проведена высота BH. Окружность, вписанная в треугольник ABH, касается сторон AB, AH в точках H_1, B_1 соответственно; окружность, вписанная в треугольник CBH, касается сторон CB, CH в точках H_2, B_2 соответственно. Пусть O — центр описанной окружности треугольника H_1BH_2. Докажите, что $OB_1 = OB_2$.

Решение. Обозначим $\alpha = \angle ACB$. Пусть I_1, I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ABH, CBH. Из подобия этих треугольников следует, что $I_1H_1 : I_2H_2 = AB : BC = \operatorname{tg}\alpha$. Так как отрезки I_1H_1, I_2H_2 перпендикулярны соответственно AB и BC, то проекции этих отрезков на AC равны $I_1H_1\cos\alpha$ и $I_2H_2\sin\alpha$, то есть равны друг другу. Тогда, поскольку O — середина H_1H_2, то проекция O на AC совпадает с серединой B_1B_2, что равносильно утверждению задачи (рис. 10.5).

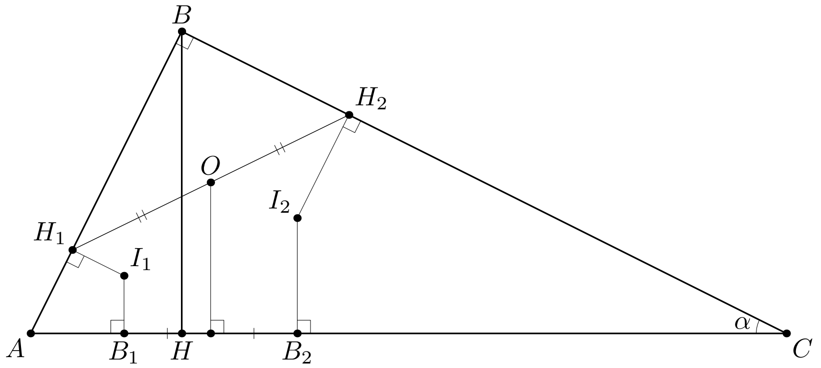

Рис. 10.5

6. (Ф. Нилов) Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A', B' и C'. Известно, что ортоцентры треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают. Верно ли, что ABC — правильный?

Ответ. Да.

Первое решение. Предположим противное. Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, H — совпадающий ортоцентр треугольников ABC и $A'B'C'$, A'', B'', C'' — вторые точки пересечения прямых $A'H'$, $B'H'$, $C'H'$ со вписанной окружностью ω. Тогда $\angle A''C''C' = \angle A''A'C' = 90^\circ - \angle A'C'B' = \angle B''B'C' = \angle B''C''C'$; это значит, что $A''B''$ параллельна касательной к ω в точке C', то есть $A''B'' \parallel AB$. Значит, стороны треугольников ABC и $A''B''C''$ параллельны друг другу, а H — центр вписанной окружности треугольника $A''B''C''$. Следовательно, существует гомотетия, переводящая треугольник ABC в $A''B''C''$. При этой гомотетии центр описанной окружности O переходит в I, а точка пересечения биссектрис I — в H. Таким образом, точка H лежит на прямой OI, причем $OI : IH = R : r$ (рис. 10.6).

Какие-то две вершины треугольника ABC (например, A и B) не лежат на прямой OI. Так как AI, BI — биссектрисы углов OAH, OBH соответственно, то $OI : IH = AO : AH = BO : BH$. Следовательно, $AH = BH = r$, что невозможно, ибо $AH + BH \geqslant AB > 2r$. Полученное противоречие показывает, что треугольник ABC — правильный.

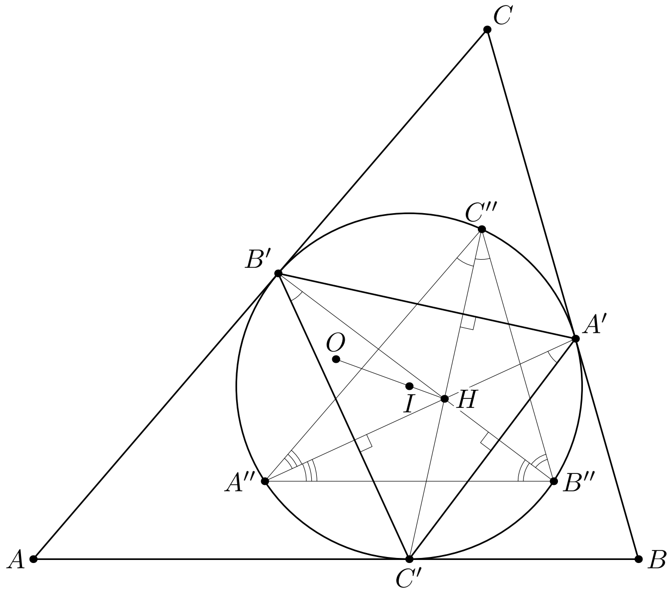

Рис. 10.6

Второе решение. Опять же предположим противное и обозначим через H совпадающий ортоцентр. Имеем $IC' \parallel HC \perp AB$ и $CI \parallel C'H \perp A'B'$. Значит, либо точки C, I, C', H лежат на одной прямой (и тогда $AC = BC$), либо четырёхугольник $CIC'H$ — параллелограмм; аналогичное утверждение верно про остальные вершины. У треугольника ABC найдётся сторона (скажем, AB), не равная ни одной другой его стороне. Тогда четырёхугольники $AIA'H$ и $BIB'H$ — параллелограммы, и $AH = A'I = r = B'I = BH = r$, что опять же невозможно, ибо $AH + BH \geqslant AB > 2r$.

7. (Б. Френкин) Каждый из двух правильных многогранников P и Q разрезали плоскостью на две части. Одну из частей P и одну из частей Q приложили друг к другу по плоскости разреза. Может ли получиться правильный многогранник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть граней?

   Ответ. Да, может; 4 или 8 граней.

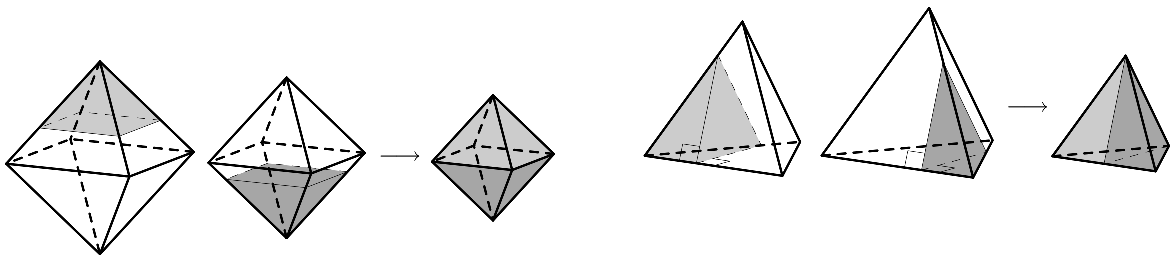

Рис. 10.7

Решение. Пусть R — полученный многогранник. Ясно, что часть многогранника P содержит хотя бы одну его вершину A, не лежащую в плоскости разреза. Многогранный угол многогранника P при ней будет также многогранным углом при вершине многогранника R; это означает, что все многогранники P и Q подобны. Аналогично, Q также подобен им. Более того, если хотя бы одно ребро многогранника P, выходящее из A, не имеет общих точек (даже другой вершины!) с плоскостью разреза, то оно также будет являться ребром в R. Тогда в подобных многогранниках P и R рёбра равны, а следовательно, равны и многогранники, что невозможно.

Итак, часть P, вошедшая в R — это пирамида с вершиной A. Аналогично, часть Q, вошедшая в R — это пирамида с вершиной B. Следовательно, не менее половины граней в R примыкает к одной и той же вершине. Это исключает додекаэдр и икосаэдр. Если наши многогранники — кубы, то от P и Q отрезаются треугольные пирамиды, и в итоговом многограннике не больше 5 вершин, что неверно.

Оставшиеся случаи октаэдра и тетраэдра возможны, как показано на рис. 10.7.

8. (Н. Белухов, Болгария) Вокруг треугольника ABC описали окружность k. На сторонах треугольника отметили три точки A_1, B_1 и C_1, после чего сам треугольник стерли. Докажите, что его можно однозначно восстановить тогда и только тогда, когда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Решение. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Рассмотрим треугольники ABC и $A'B'C'$, вписанные в окружность k; пусть их соответствующие стороны пересекаются в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 10.8.1). Тогда

$$\left(\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\right)\cdot\left(\frac{A'C_1}{C_1B'}\cdot\frac{B'A_1}{A_1C'}\cdot\frac{C'B_1}{B_1A'}\right)=1.$$

Доказательство. Из подобных треугольников AC_1A' и $B'C_1B$ имеем $\dfrac{AC_1}{B'C_1}=\dfrac{AA'}{BB'}$ и $\dfrac{A'C_1}{BC_1}=\dfrac{AA'}{BB'}$. Перемножая эти равенства с четырьмя аналогичными, получаем требуемое. □

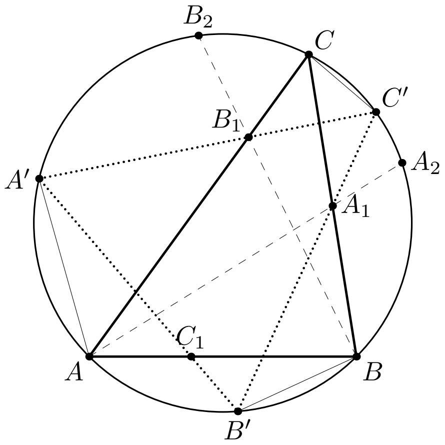

Рис. 10.8.1

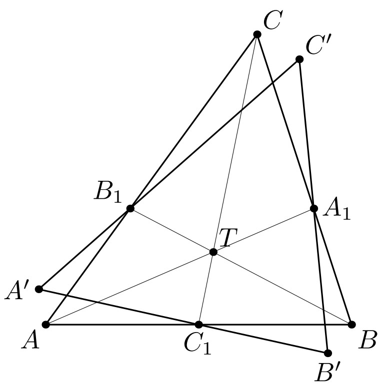

Рис. 10.8.2

Перейдём к решению задачи. Докажем сначала, что для любых точек A_1, B_1 на сторонах BC и AC найдётся не более одной точки C_1 на стороне AB такой, что треугольник ABC восстанавливается однозначно. Зафиксируем треугольник ABC и точки A_1, B_1. Пусть A_2, B_2 — вторые точки пересечения прямых AA_1, BB_1 с окружностью k; C' — произвольная точка дуги A_2CB_2; A', B' — вторые точки пересечения прямых $C'A_1$, $C'B_1$ с k; C_1 — точка пересечения AB и $A'B'$. Когда точка C' близка к A_2 или к B_2, точка C_1 близка к A или B, соответственно. Далее, при движении точки C' от A_2 до B_2 точка C_1 непрерывно движется от A до B (в случае, когда

$C = C'$, рассматривается предельное положение точки C_2; то, что оно существует, гарантируется Леммой). Значит, для любой точки C_1, кроме, возможно, вышеупомянутого предельного положения, треугольник ABC однозначно не восстанавливается, ибо существует второй треугольник $A'B'C'$.

Осталось доказать, что, если AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке T, то треугольник восстанавливается однозначно (тогда из вышедоказанного следует, что других случаев нет). Пусть это не так; тогда из Леммы мы получаем

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{A'C_1}{C_1B'} \cdot \frac{B'A_1}{A_1C'} \cdot \frac{C'B_1}{B_1A'} = 1,$$

то есть отрезки $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ также пересекаются в одной точке T'. Но это невозможно. Действительно, пусть, например, точка A' лежит на дуге AC (рис. 10.8.2); тогда T' не может лежать в угле ATB, так как его не пересекает отрезок $A'A_1$. Остальные случаи разбираются аналогично.