VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур. Решения

1. (Б.Френкин; 8) Существует ли треугольник, в котором одна сторона равна какой-то из его высот, другая — какой-то из биссектрис, а третья — какой-то из медиан?

   Решение. Нет, так как наибольшая сторона треугольника длиннее любой из его высот, медиан или биссектрис. Действительно, любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне, короче, по крайней мере, одной из двух других сторон. Поэтому любая медиана или биссектриса короче хотя бы одной из сторон и, тем самым, короче наибольшей стороны. Тем более, это верно для высот.

2. (Д.Швецов; 8) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Пусть O — центр описанной окружности треугольника CA_1B_1. Докажите, что $OI \perp AB$.

   Первое решение. Пусть A_2, B_2, C_2 — проекции точек A_1, B_1, I на AB (рис.2). Так как AA_1 — биссектриса, то $AA_2 = AC$. С другой стороны, AC_2 — касательная из A к вписанной окружности треугольника, и, значит, отрезок $A_2C_2 = AA_2 - AC_2$ равен касательной к этой окружности из точки C. Аналогично получаем, что отрезок B_2C_2 равен той же касательной, т.е. C_2 — середина A_2B_2. По теореме Фалеса C_2I пересекает отрезок A_1B_1 в его середине, а так как треугольник CA_1B_1 прямоугольный, эта середина совпадает с центром его описанной окружности.

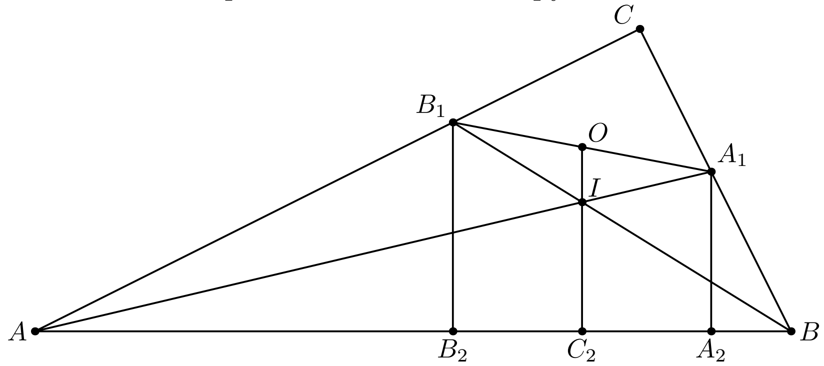

Рис. 2

   Второе решение. (Райко Арсений, школа №179, Москва)

   Обозначим через A_2, B_2 основания перпендикуляров, опущенных из точек A_1, B_1 на гипотенузу AB соответственно. Из равенства прямоугольных треугольников BCB_1 и BB_2B_1 следует, что $\angle BB_1C = \angle BB_1B_2$. Получаем, что для треугольника AB_1B_2 точка I является центром вневписанной окружности. Следовательно, B_2I – биссектриса прямого угла $B_1B_2A_2$. Такими же рассуждениями показываем, что A_2I является биссектрисой прямого угла $A_1A_2B_2$. Таким образом треугольник B_2IA_2 — равнобедренный прямоугольный, т.е. точка I лежит на серединном перпендикуляре к A_2B_2. Точка O будучи серединой боковой стороны B_1A_1 прямоугольной трапеции $B_2B_1A_1A_2$ также обладает этим свойством. Поэтому $OI \perp B_2A_2$.

3. (Ф.Нилов; 8) Точки A', B', C' лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Точка X такова, что $\angle AXB = \angle A'C'B' + \angle ACB$ и $\angle BXC = \angle B'A'C' + \angle BAC$. Докажите, что четырёхугольник $XA'BC'$ — вписанный.

Решение. Пусть Y — отличная от C' точка пересечения окружностей $AB'C'$ и $BC'A'$. Тогда, так как $\angle B'YC' = \pi - \angle BAC$ и $\angle C'YA' = \pi - \angle CBA$, то $\angle A'YB' = \pi - \angle ACB$, т.е Y лежит также на окружности $CA'B'$. Заметим теперь, что $\angle AYB = \angle AYC' + \angle C'YB = \angle AB'C' + \angle C'A'B = 2\pi - \angle C'B'C - \angle CA'C' = \angle ACB + \angle A'C'B' = \angle AXB$ (рис.3). Аналогично $\angle BYC = \angle BXC$, т.е точки X и Y совпадают.

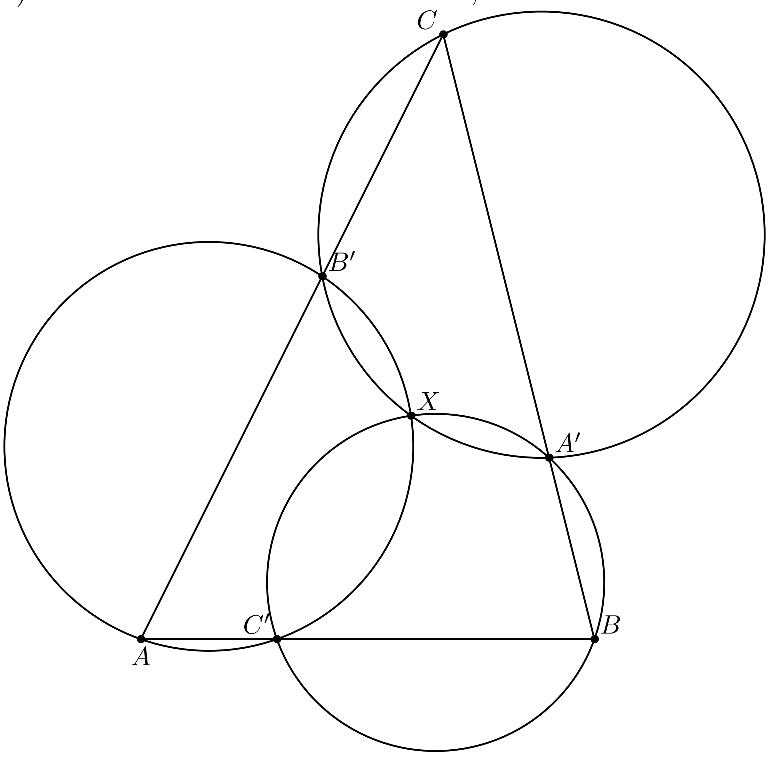

Рис. 3

4. (Д.Швецов; 8) Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке N. Окружности, описанные вокруг треугольников ANB и CND, повторно пересекают стороны BC и AD в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписан в окружность с центром N.

Решение. Рассматривая вписанный пятиугольник A_1NB_1CD, получаем, что $A_1N = B_1N$, так как равны опирающиеся на эти дуги углы BDA и BCA. Аналогично $NC_1 = ND_1$. Кроме того, $\angle NA_1A = \angle ACD = \angle ABD = \angle DD_1N$ (рис.4). Следовательно, $ND_1 = NA_1$, ч.т.д.

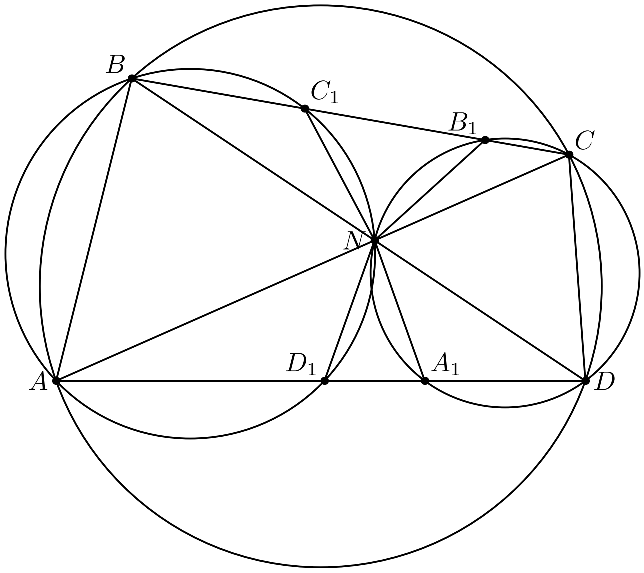

Рис. 4

5. (Д.Швецов; 8–9) На высоте BD треугольника ABC взята точка E такая, что $\angle AEC = 90°$. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников AEB и CEB; F, L — середины отрезков AC и O_1O_2. Докажите, что точки L, E, F лежат на одной прямой.

Решение. Прежде всего заметим, что серединные перпендикуляры к отрезкам AE и EC являются средними линиями треугольника AEC и, значит, проходят через F. Таким образом, надо доказать, что FE — медиана треугольника FO_1O_2. При этом $O_1O_2 \parallel AC$, так как оба эти отрезка перпендикулярны BD. Пусть прямая, проходящая через E и параллельная AC, пересекает FO_1 и FO_2 в точках X и Y (рис.5). Так как $FCEX$ и $FAEY$ — параллелограммы, то $XE = FC = FA = EY$. Следовательно, FE — медиана треугольника FXY, а значит и треугольника FO_1O_2.

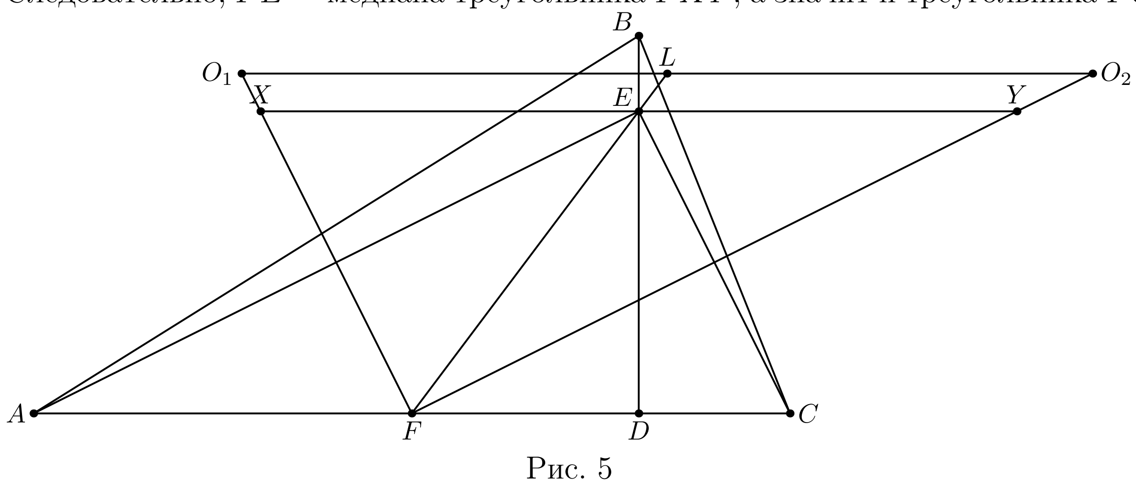

Рис. 5

6. (Д.Швецов; 8–9) На стороне BC равностороннего треугольника ABC взяты точки M и N(M лежит между B и N) такие, что $\angle MAN = 30°$. Описанные окружности треугольников AMC и ANB пересекаются в точке K. Докажите, что прямая AK содержит центр описанной окружности треугольника AMN.

Решение. Так как $\angle BAM + \angle NAC = \angle MAN$ и $AB = AC$, точка, симметричная B относительно AM, совпадает с точкой, симметричной C относительно AN.

Обозначим эту точку через L. Тогда $\angle ALM = \angle ABM = \angle ACM$, т.е. L лежит на окружности ACM. Аналогично L лежит на окружности ABN и, значит, совпадает с K (рис.6). Поэтому $\angle KAN = \angle NAC = 30^\circ - \angle BAM = 90^\circ - \angle NMA$. Но по теореме о вписанном угле прямая, соединяющая A с центром описанной около треугольника AMN окружности, образует с прямой AN такой же угол.

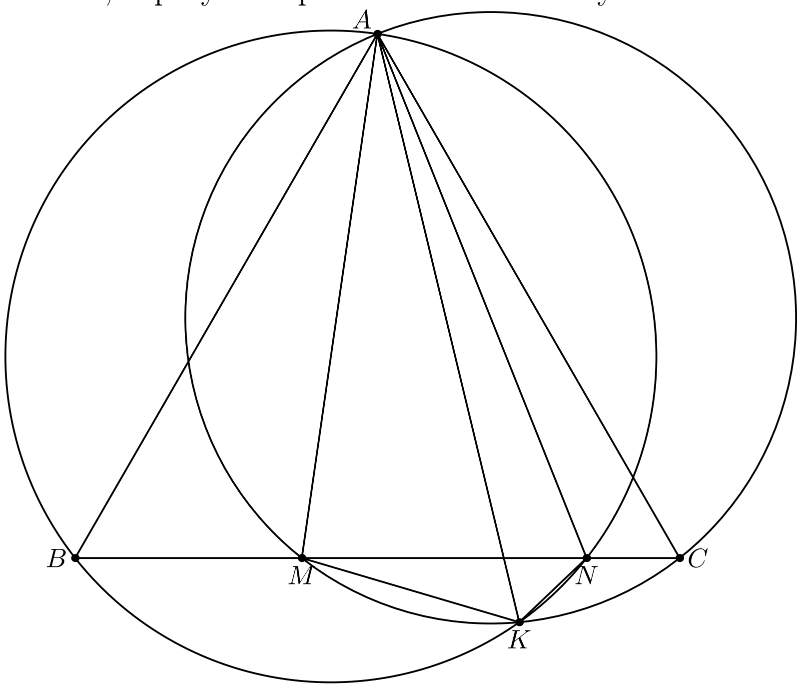

Рис. 6

7. (Д.Швецов; 8–9) Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная медиане BM. Эта прямая пересекает высоты, выходящие из A и C (или их продолжения), в точках K и N. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABK и CBN соответственно. Докажите, что $O_1M = O_2M$.

   Решение. Достроим данный треугольник до параллелограмма $ABCD$ (рис.7). Так как $\angle BKA = \angle DKC = \angle BDA$, точки A, B, K, D лежат на одной окружности и $O_1M \perp BD$. Аналогично $O_2M \perp BD$. Кроме того, так как треугольники ABD и BCD равны, то равны и расстояния от центров описанных около них окружностей до точки M.

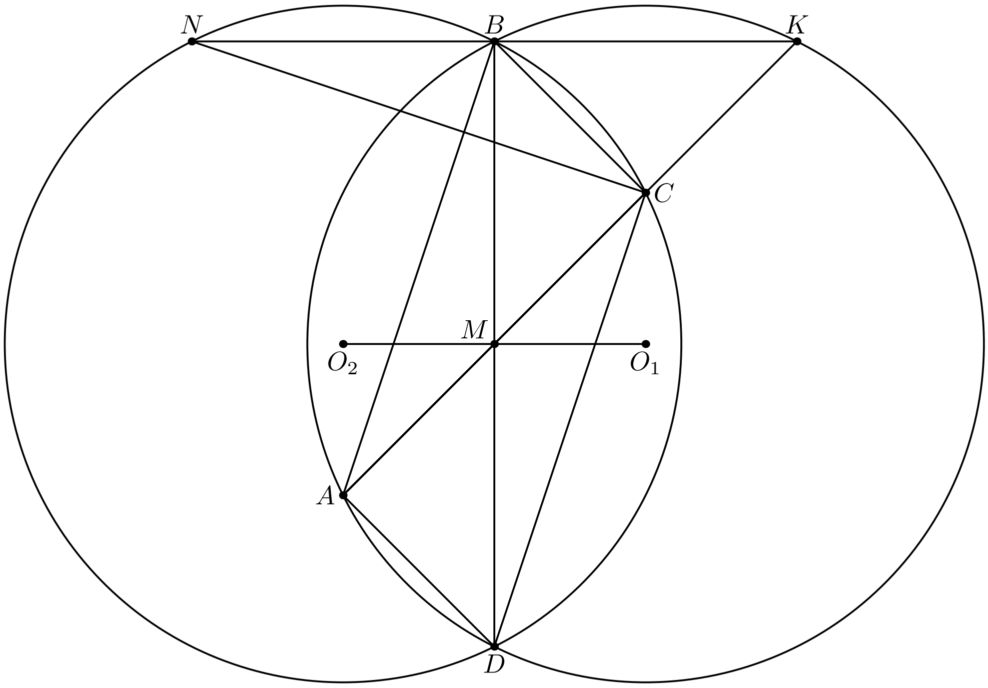

Рис. 7

8. (Д.Швецов; 8–10) В треугольнике ABC проведена высота AH. Точки I_b и I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABH и CAH; L — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Найдите угол LI_bI_c.

Решение. Докажем, что треугольник LI_bI_c — равнобедренный и прямоугольный. Пусть L_b, L_c — проекции точек I_b, I_c на BC, а r_b, r_c — радиусы окружностей, вписанных в треугольники AHB, AHC (рис.8). Так как эти треугольники прямоугольные, то $r_b = (AH + BH - AB)/2$, $r_c = (AH + CH - AC)/2$ и $r_b - r_c = (BH - CH)/2 - (AB - AC)/2 = (BH - CH)/2 - (BL - CL)/2 = LH$. Следовательно $I_bL_b = LI_c = r_b$, $I_cL_c = LI_b = r_c$, т.е треугольники LI_bL_b и I_cL_cL равны, $LI_b = LI_c$ и $\angle I_bLI_c = 90°$. Соответственно $\angle LI_bI_c = 45°$.

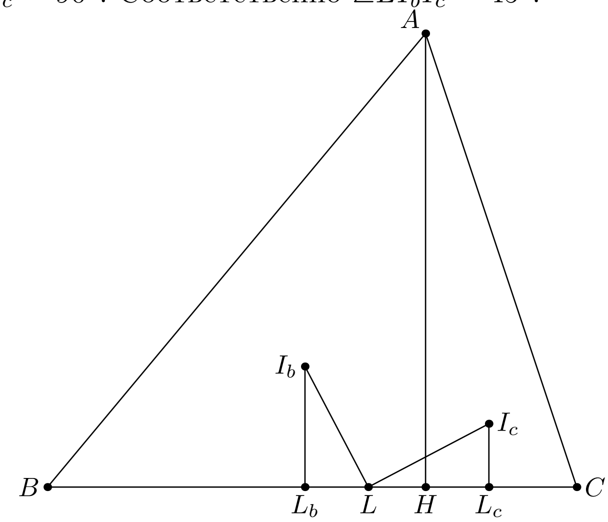

Рис. 8

Замечание. Пусть I_1, I_2 – центры вписанных окружностей треугольников ABD и CBD соответственно(D – произвольная точка на AC); L – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Тогда точки I_1, L, D и I_2 лежат на одной окружности.

9. (Б.Френкин; 8–10) Назовём точку внутри треугольника хорошей, если три чевианы через неё равны. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, а количество хороших точек нечётно. Чему оно может быть равно?

   Решение. Так как хорошие точки симметричны относительно высоты треугольника из вершины B, а число их нечетно, то найдется хорошая точка, лежащая на этой высоте. Так как чевиана через эту точку из вершины A не короче высоты из той же вершины, высота треугольника из A не длиннее, чем из B, т.е.$AC \le AB$. Более того, AC не может быть длиннее высоты из B, так как иначе на этой высоте было бы две хороших точки. Предположим теперь, что некоторая хорошая точка не лежит на высоте. Пусть AA', BB', CC' — проходящие через нее чевианы, а AA_1, CC_1 — высоты треугольника. Тогда $A_1A' = C_1C'$, причем одна из точек A', C' лежит между основанием соответствующей высоты и точкой B, а другая — нет. Но отсюда следует, что соответствующие чевианы короче AC и тем более короче BB_1 — противоречие. Значит, хорошая точка только одна.

10. (И.Богданов; 8–11) Дан треугольник ABC. С помощью двусторонней линейки, проведя не более восьми линий, постройте на стороне AB такую точку D, что $AD/BD = BC/AC$.

    Решение. Проведем прямые a, b, c, параллельные BC, CA, AB и лежащие от них на расстоянии ширины линейки с внешней стороны треугольника. Прямые a, b, BC, AC образуют ромб, диагональ которого является биссектрисой угла C. Пусть E — точка пересечения этой биссектрисы с прямой c, а F — точка пересечения диагоналей трапеции, образованной прямыми c, AB, AC и BC (рис.10). Тогда прямая EF пересекает AB в искомой точке D.

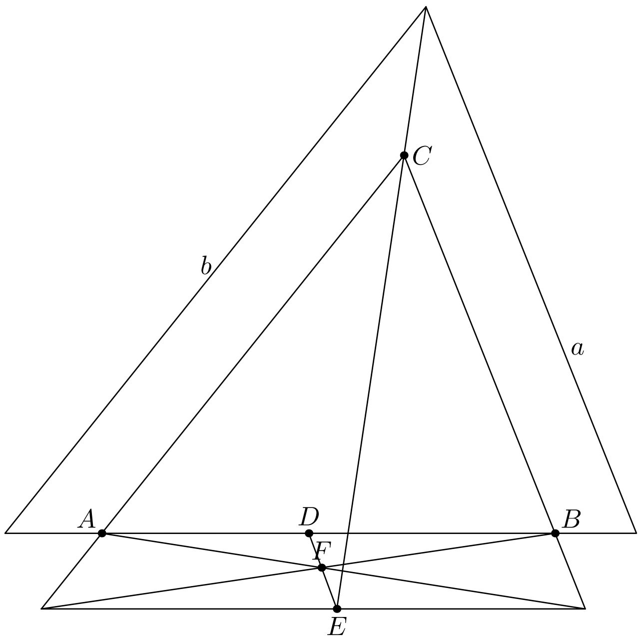

Рис. 10

11. (Б.Френкин; 8–11) Выпуклый n-угольник разрезан на 3 выпуклых многоугольника. У одного из них n сторон, у другого — больше, чем n, у третьего — меньше, чем n.

Каковы возможные значения n?

Ответ. $n = 4$ или $n = 5$.

Решение. Очевидно $n > 3$. Предположим, что $n > 5$. Тогда одна из частей n-угольника имеет не менее $n+1$ стороны, вторая — n, третья — не менее 3. При соединении этих частей либо три пары сторон соединяются внутри многоугольника и не более трех пар образуют его стороны, либо две пары соединяются внутри и не более четырех образуют стороны. В любом случае суммарное количество сторон частей превосходит n не более, чем на 9, что при $n > 5$ невозможно. Примеры для $n = 4, 5$ показаны на рис. 11.

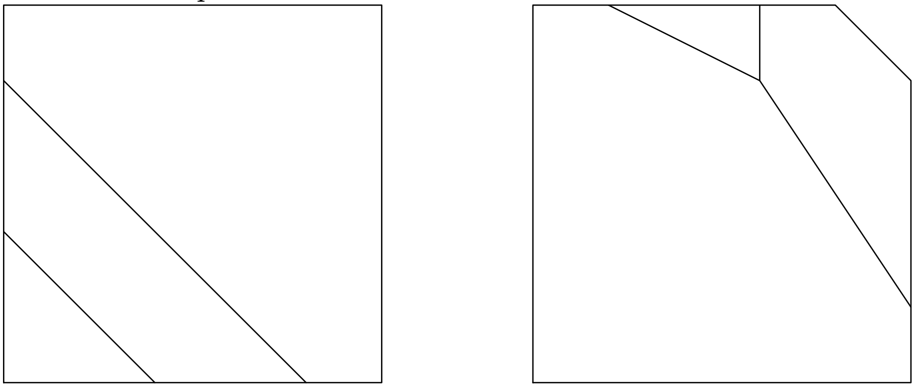

Рис. 11

12. (А. Блинков, Ю. Блинков, М. Сандрикова; 9) В прямоугольном треугольнике ABC AC — больший катет, CH — высота, проведенная к гипотенузе. Окружность с центром H и радиусом CH пересекает катет AC в точке M. Точка B' симметрична точке B относительно H. В точке B' восставлен перпендикуляр к гипотенузе, который пересекает окружность в точке K. Докажите, что:

а) $B'M \parallel BC$;

б) AK — касательная к окружности.

Решение. а) Проведем высоту N к основанию равнобедренного треугольника CHM, тогда $CN = NM$. Так как $BH = B'H$ и $NH \parallel BC$, то прямая, проходящая через точку B' параллельно HN, пересечет AC в точке M (по теореме Фалеса).

Другое решение. Имеем $\angle CMH = \angle MCH = \angle CBB' = \angle CB'B = a$, поэтому точки C, H, B' и M лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle CB'M = \angle CHM = 180^\circ - 2a$, тогда $\angle AB'M = a$, что и требовалось.

б) Из прямоугольного треугольника ABC: $CH^2 = AH \cdot BH$. Так как $B'H = BH$ и $KH = CH$, то $KH^2 = AH \cdot B'H$, то есть треугольники AKH и $AB'K$ подобны, откуда и вытекает утверждение задачи.

13. (С.Берлов; 9) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$. На диагонали BD выбрана точка K такая, что $\angle AKB + \angle BKC = \angle A + \angle C$. Докажите, что $AK \cdot CD = KC \cdot AD$.

Решение. Возьмем на BD такую точку L, что $\angle ALB = \angle A$. Так как треугольники ABL и DBA подобны, $BL \cdot BD = AB^2 = BC^2$. Значит, треугольники CBL и DBC тоже подобны, т.е. $\angle BLC = \angle C$ и L совпадает с K. Требуемое равенство, очевидно, следует из указанных подобий.

14. (С.Берлов; 9–10) На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка M, что CM и BM параллельны AB и CD соответственно. Докажите, что $S_{ABCD} \geq 3S_{BCM}$.

    Решение. Так как $\angle ABM = \angle BMC = \angle MCD$, то $S_{ABM}/S_{BMC} = AB/MC$ и $S_{BMC}/S_{CMD} = BM/CD$. Но треугольники ABM и MCD подобны, так что эти отношения равны и $S^2_{BMC} = S_{ABM} \cdot S_{MCD}$. По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом $S_{BMC} \leq (S_{ABM} + S_{MCD})/2$, что равносильно утверждению задачи.

15. (Д.Прокопенко, А.Блинков; 9–11) В остроугольном треугольнике ABC AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке K. Окружности, описанные вокруг треугольников A_1KC_1 и A_1KB_1, вторично пересекают прямые AB и AC в точках N и L соответственно. Докажите, что

    а) сумма диаметров этих окружностей равна стороне BC.

    б) $A_1N/BB_1 + A_1L/CC_1 = 1$.

    Решение. а) Треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C подобны треугольнику ABC с коэффициентами $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ соответственно. Поэтому $\angle KA_1C_1 = \angle KA_1B_1 = 90^\circ - \angle A$, и по теореме синусов диаметры описанных окружностей треугольников AKB_1 и A_1KC_1 равны соответственно $B_1K/\cos A$ и $C_1K/\cos A$. Следовательно, их сумма равна $B_1C_1/\cos A = BC$.

    б) Доказанное в предыдущем пункте равенство можно переписать в виде

    $$\frac{A_1N}{\sin B} + \frac{A_1L}{\sin C} = BC.$$

    Разделив его на BC, получим искомое соотношение.

16. (Ф.Нилов; 9–11) В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках D и E. Хорда BX параллельна прямой DE. Докажите, что отрезок XC проходит через середину отрезка DE.

    Первое решение. Прежде всего заметим, что $\angle BCD = \angle ECX$, так как соответствующие дуги заключены между параллельными хордами. Кроме того, из равенства углов ABD и AEB следует подобие треугольников ABD и AEB и, значит, равенство $BD/BE = AD/AB$. Аналогично получаем, что $CD/CE = AD/AB$, т.е. $BD \cdot CE = CD \cdot BE = BC \cdot DE/2$ (последнее равенство следует из теоремы Птолемея).

    Пусть теперь CX пересекает DE в точке M (рис. 16). Тогда треугольники CBD и CME подобны, следовательно, $BD \cdot CE = CB \cdot EM$. Отсюда и из предыдущего равенства получаем, что $EM = ED/2$.

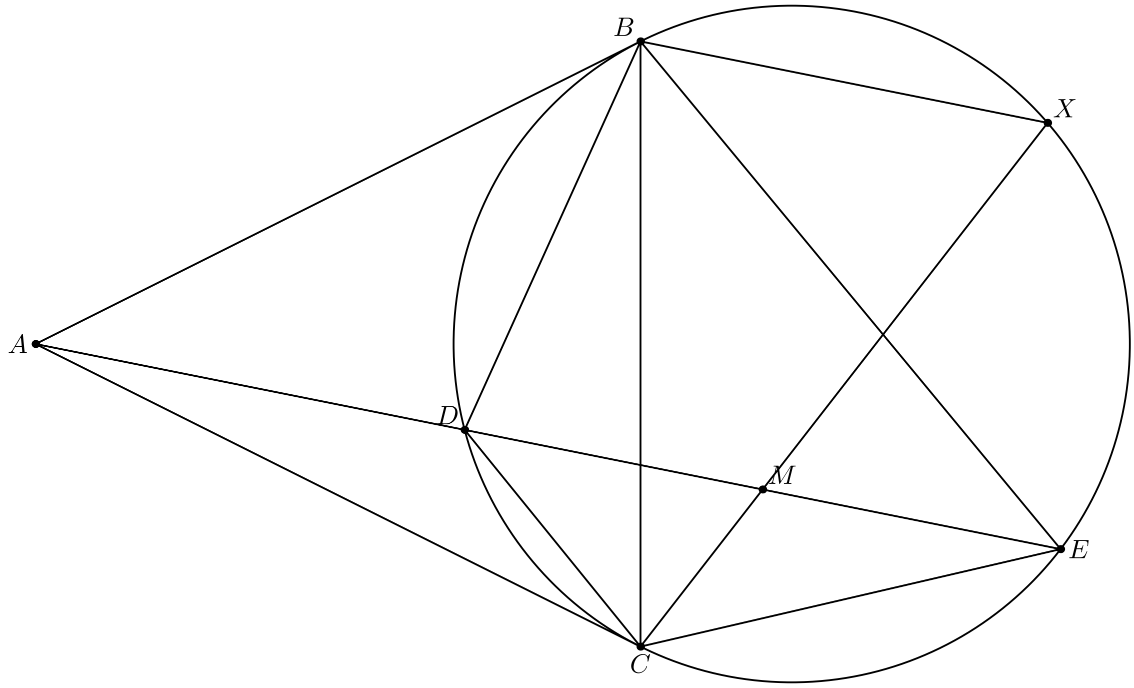

Рис. 16

Второе решение. (Руденко Александр, лицей №171 «Лидер», Киев)

Заметим, что $\angle DMC = \frac{1}{2}(\smile DC + \smile XE)$. По условию $DE||BX \Rightarrow \cup BD = \smile EX$. С другой стороны,

$$\angle COB = \smile CB = \smile CD + \smile DB = \smile CD + \smile EX = 2\angle CMD.$$

Откуда следует, что $\angle COA = \frac{1}{2}\angle COB = \angle CMD$, поэтому точки A, C, M, O лежат на одной окружности. Следовательно,
$\angle AMO = \angle ACO = 90°$, т.е. $MO \perp DE \Rightarrow DM = ME$.

17. (Предложил С.Токарев; 9–11) Постройте треугольник по высоте и биссектрисе, проведенным из одной вершины, и медиане, проведенной из другой вершины.

Первое решение. Пусть $l = CL$, $h = CH$ — биссектриса и высота из вершины C, $m = BM$ — медиана из вершины B, ϕ — угол, который в прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины l противолежит катету длины h. Через p обозначим прямую, содержащую точку C и параллельную прямой AB, а через B' — точку, симметричную точке B относительно прямой p.

Предположим, что треугольник ABC построен. Тогда выполнено хотя бы одно из равенств $\angle CLB = \phi$ или $\angle CLB = 180° - \phi$, и в любом случае имеем $\angle B'CM = 2\phi$. В самом деле, если, например, $\angle CLB = \phi$, то $\angle B'CM = 360° - 2\angle CBA - \angle BCA = 2(180° - \angle CBA - \angle BCL) = 2\phi$ (Рис.17.1). Второй случай разбирается аналогично.

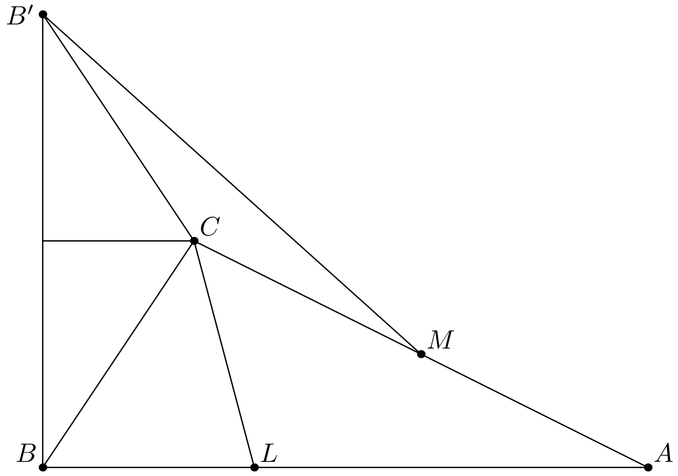

Рис. 17.1

Итак, отрезок $B'M$ виден из точки C под углом 2ϕ. Отсюда получаем следующее построение.

Проведем две параллельные прямые на расстоянии h друг от друга и отметим на одной из них точку B; другая прямая будет прямой p. Далее отмечаем точку B', а затем — точку M, удаленную на расстояние m от B и равноудаленную от параллельных прямых. Построив угол ϕ, строим две дуги окружностей с концами в точках B' и M и угловой величиной $360° - 4\phi$.

Если C_1 и C_2 — точки пересечения дуг с прямой p, а A_i $(i = 1, 2)$ — точка, симметричная C_i относительно M, то каждый из треугольников A_1BC_1 и A_2BC_2 является искомым.

Действительно, высоты этих треугольников, проведенные из вершин C_1, C_2, равны h, а отрезок $BM = m$ является в каждом из них медианой. Кроме того, если L_1, L_2 — основания соответствующих биссектрис, то из построения следует, что один из углов C_1L_1B и C_2L_2B равен ϕ, а другой $180° - \phi$, откуда, в силу определения угла ϕ, получаем $C_1L_1 = C_2L_2 = l$.

Примечание 1. Ясно, что если $l < h$ или $m < h/2$, то решений нет. Если $l = h$ и $m \geq h/2$, решением является единственный равнобедренный треугольник (при $m = h/2$ вырождающийся в отрезок). В случае, когда $l > h$ и $m = h/2$, получаем два равных треугольника, симметричных относительно прямой BB'.

При $l > h$ и $m = l/2$ один из построенных треугольников оказывается вырожденным, так что решение единственно. Во всех остальных случаях задача имеет два решения.

Второе решение. Зная высоту и биссектрису из вершины C, можно построить эту вершину и прямую AB. Рассмотрим теперь следующее отображение этой прямой в себя. Для произвольной точки X найдем точку Y, удаленную от X и AB на расстояния, равные данной медиане из вершины B и половине данной высоты (рис. 17.2). Затем отразим прямую CY относительно биссектрисы и найдем точку X' пересечения полученной прямой с AB. Очевидно, что это отображение сохраняет двойные отношения точек и переводит точку B в себя. Таким образом, задача сводится к известной задаче построения неподвижной точки проективного преобразования прямой.

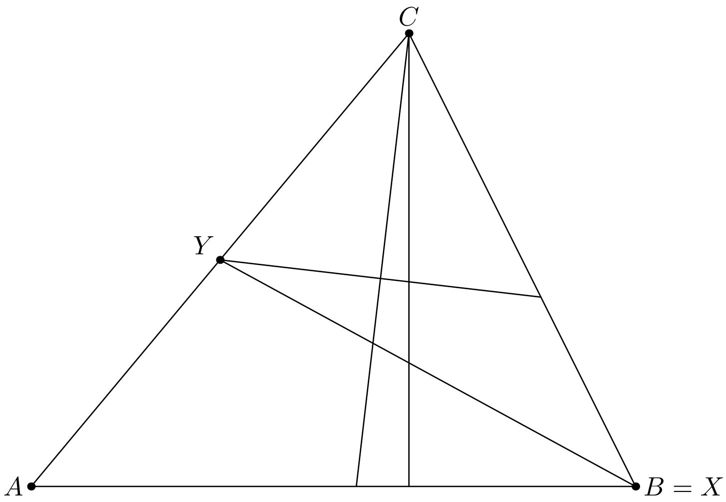

Рис. 17.2

Примечание 2. В 1938 г. в журнале "Математика в школе"была напечатана статья В.Фурсенко, в которой разбирались все задачи на построение треугольника по трем элементам. Эта задача там была ошибочно названа неразрешимой.

18. (Д.Прокопенко; 9–11) На хорде AC окружности ω выбрали точку B. На отрезках AB и BC как на диаметрах построили окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, которые пересекают ω второй раз в точках D и E соответственно. Лучи O_1D и O_2E пересекаются в точке F. Лучи AD и CE пересекаются в точке G. Докажите, что прямая FG проходит через середину AC.

    Решение. Так как углы ADB и BEC прямые, точки D и E лежат на окружности с диаметром BG. При этом $\angle FDG = \angle ADO_1 = \angle DAC = \angle GED$. Следовательно, FD (и аналогично FE) — касательная к этой окружности (рис. 18). Значит эта прямая симметрична медиане треугольника GED из вершины G относительно биссектрисы из этой же вершины. Поскольку треугольник GDE подобен треугольнику GCA, в этом последнем треугольнике данная прямая будет медианой.

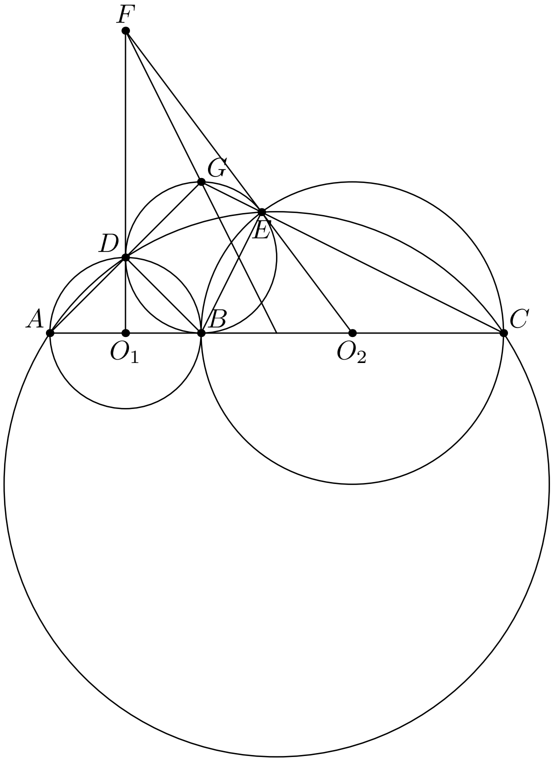

Рис. 18

19. (В.Ясинский, Украина; 9–11) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точки P и Q диаметрально противоположны C и D соответственно. Касательные к окружности в этих точках пересекают прямую AB в точках E и F (A лежит между E и B, B — между A и F). Прямая EO пересекает AC и BC в точках X и Y, а прямая FO пересекает AD и BD в точках U и V. Докажите, что $XV = YU$.

Решение. Достаточно доказать, что $XO = OY$. Действительно, тогда аналогично получим, что $UO = OV$ и, значит, $XUYV$ — параллелограмм.

Пусть прямая EO пересекает окружность в точках P и Q (рис. 19). Искомое равенство равносильно равенству двойных отношений $(PX;OY) = (QY;OX)$. Спроецировав прямую EO на окружность из точки C, получим эквивалентное равенство $(PA;C'B) = (QB;C'A)$, которое верно, так как прямые PQ, AB и касательная к окружности в точке C' пересекаются в одной точке.

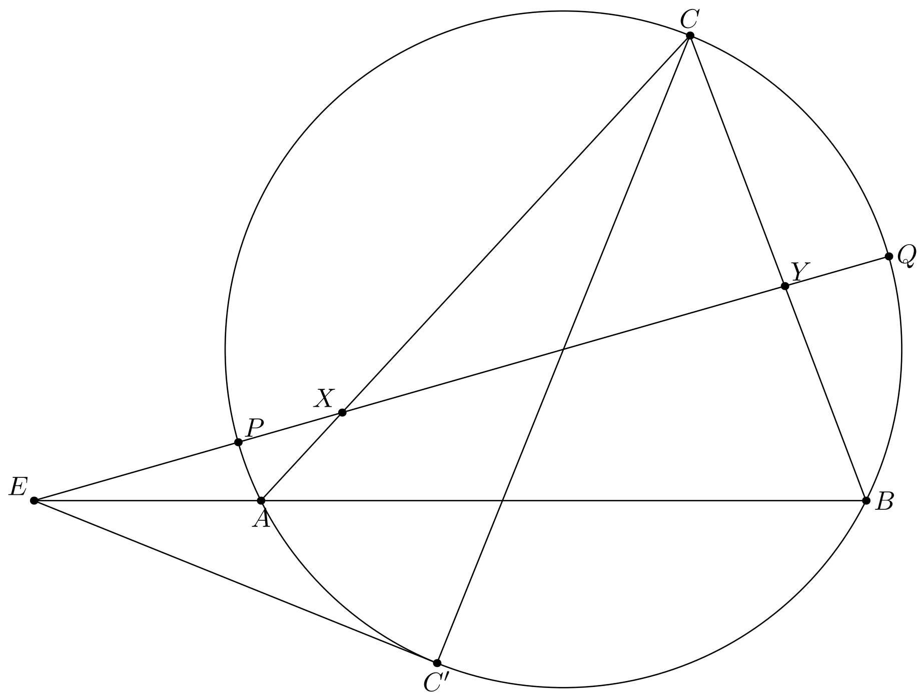

Рис. 19

20. (Ф.Ивлев; 10) Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается его сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Пусть A_2, B_2 — середины отрезков B_1C_1, A_1C_1 соответственно, O — центр описанной окружности треугольника, P — одна из точек пересечения прямой CO с вписанной окружностью. Прямые PA_2 и PB_2 вторично пересекают вписанную окружность в точках A' и B'. Докажите, что прямые AA' и BB' пересекаются на высоте треугольника, опущенной на AB.

Решение. Достаточно доказать, что $\angle CAP = \angle A'AB$. Действительно, это означает, что прямая AA' симметрична AP относительно биссектрисы угла A. Тогда аналогично BB' симметрична BP относительно биссектрисы угла B, а значит, точка пересечения этих прямых лежит на прямой, симметричной CP относительно биссектрисы угла C, т.е. на высоте треугольника.

Пусть Q — точка пересечения прямой AP с окружностью, S — середина дуги B_1C_1 (рис. 20). Композиция проекций окружности на себя из точек A и A_2 меняет местами точки B_1 и C_1, переводит Q в A' и оставляет S на месте. Значит $(B_1Q; SC_1) = (C_1A'; SB_1)$, т.е. точки A' и Q симметричны относительно прямой AA_2, что равносильно искомому равенству.

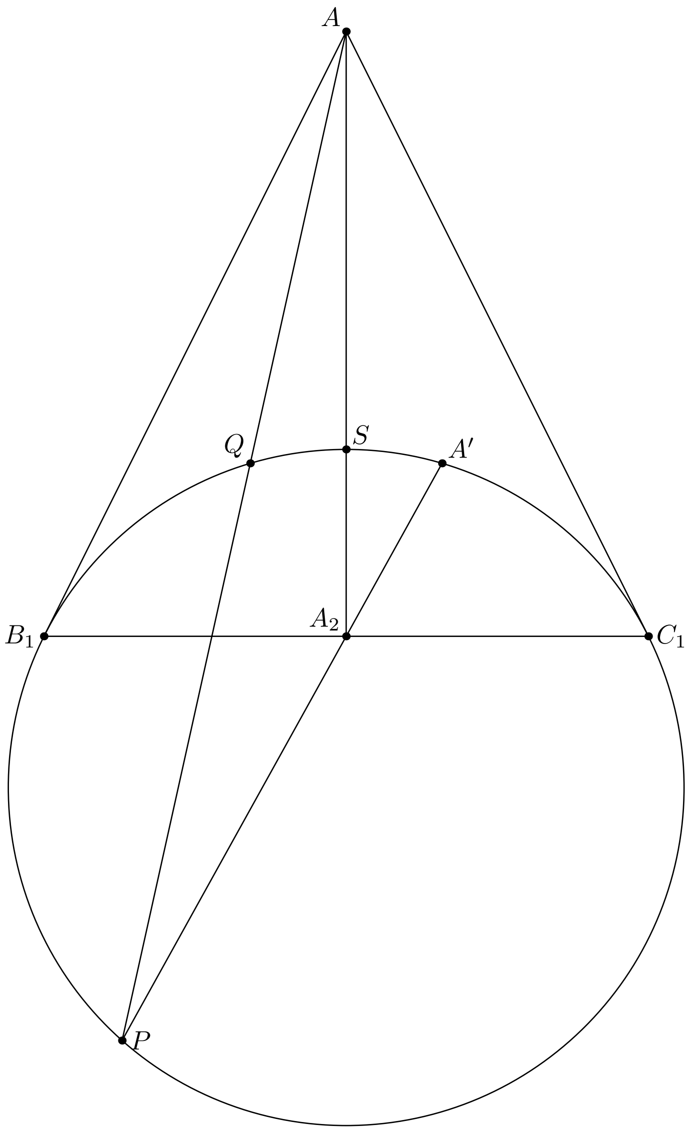

Рис. 20

21. (А.Акопян; 10–11) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle ABD + \angle ACD > \angle BAC + \angle BDC$. Докажите, что $S_{ABD} + S_{ACD} > S_{BAC} + S_{BDC}$.

    Решение. Если бы стороны AB и CD были параллельны, то выполнялись бы равенства $\angle ABD = \angle BDC$ и $\angle ACD = \angle BAC$. Поэтому условие задачи равносильно тому, что лучи AB и DC пересекаются, т.е. расстояние от C до прямой AB меньше, чем от D, а расстояние от B до прямой CD меньше, чем от A. Поэтому $S_{ABD} > S_{ABC}$ и $S_{ACD} > S_{BCD}$.

22. (А.Заславский; 10–11) Окружность с центром F и парабола с фокусом F пересекаются в двух точках. Докажите, что на окружности найдутся такие четыре точки A, B, C, D, что прямые AB, BC, CD и DA касаются параболы.

    Решение. Возьмем произвольную точку окружности A, лежащую вне параболы. Так как прямая AF и прямая, проходящая через A и параллельная оси параболы, вторично пересекают окружность в точках, симметричных относительно оси, касательные из A к параболе также пересекают окружность в точках B и D, симметричных относительно оси. Аналогично получаем, что вторые касательные из B и D

вторично пересекают окружность в точке C, симметричной A. Следовательно, A, B, C, D — искомые точки.

23. (Н.Белухов, Болгария; 10–11) Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Известно, что $AB \cdot CF = 2BC \cdot FA$, $CD \cdot EB = 2DE \cdot BC$, $EF \cdot AD = 2FA \cdot DE$. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

    Решение. Пусть P — точка пересечения FC и AD; G — вторая точка пересечения описанной окружности шестиугольника с прямой BP. Тогда $2 = (AC; BF) = (DF; GB) = (DF; EB)$, и, следовательно, точки G и F совпадают.

24. (А.Акопян; 10–11) Дана прямая l в пространстве и точка A, не лежащая на ней. Для каждой прямой l', проходящей через A, построим общий перпендикуляр XY (Y лежит на l') к прямым l и l'. Найдите ГМТ точек Y.

    Решение. Пусть плоскость, проходящая через A и перпендикулярная l, пересекает l в точке B, а C — проекция Y на эту плоскость. Так как $BC \parallel XY$, то $BC \perp AY$ и по теореме о трех перпендикулярах $BC \perp AC$. Следовательно, C лежит на окружности с диаметром AB, а Y — на цилиндре, образующие которого проходят через точки этой окружности. Очевидно, что любая точка цилиндра принадлежит искомому ГМТ.

25. (Н.Белухов, Болгария; 11) Среди вершин двух неравных икосаэдров можно выбрать шесть, являющихся вершинами правильного октаэдра. Найдите отношение ребер икосаэдров.

    Решение. Заметим, что ни один из икосаэдров не может содержать четырех вершин октаэдра. Действительно, среди четырех вершин октаэдра обязательно найдутся две противоположные, а любая из остальных вершин образует с ними равнобедренный прямоугольный треугольник. Но среди вершин икосаэдра нельзя выбрать три вершины такого треугольника.

    Таким образом, одному из данных икосаэдров принадлежат три вершины одной грани октаэдра, а другому — три вершины противоположной грани. Заметим теперь, что между вершинами икосаэдра существуют только три различных расстояния: одно равно ребру икосаэдра, другое — диагонали правильного пятиугольника со стороной, равной ребру, третье — расстоянию между противоположными вершинами. При этом правильный треугольник могут образовывать только вершины с расстояниями первых двух видов. Так как икосаэдры неравны, то для одного из них грань октаэдра совпадает с гранью, а для другого с треугольником, образованным диагоналями. Следовательно, отношение ребер равно отношению диагонали правильного пятиугольника к его стороне, т.е $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.