VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Решения. Финал. Первый день. 8 класс

1. (А.Блинков) В трапеции с перпендикулярными диагоналями высота равна средней линии. Докажите, что трапеция равнобокая.

   Первое решение. Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD. Пусть E — точка пересечения этой прямой с продолжением основания AD. Тогда треугольник ACE — прямоугольный и, значит, его медиана из вершины C равна половине гипотенузы, т.е. средней линии трапеции. Из условия задачи, что высота этого треугольника совпадает с медианой, поэтому диагонали трапеции равны.

   Второе решение. Пусть AD, BC — основания трапеции, O — точка пересечения ее диагоналей. Тогда медианы прямоугольных треугольников OAD, OBC равны половинам их гипотенуз, т.е. сумма этих медиан равна средней линии трапеции. С другой стороны, высота трапеции равна сумме высот этих же треугольников. Поэтому из условия задачи следует, что медианы совпадают с высотами, т.е треугольники OAD, OBC — равнобедренные, откуда, очевидно, вытекает, что $AB = CD$.

2. (Т.Голенищева-Кутузова) Петя вырезал из бумаги прямоугольник, положил на него такой же прямоугольник и склеил их по периметру. В верхнем прямоугольнике он провёл диагональ, опустил на неё перпендикуляры из двух оставшихся вершин, разрезал верхний прямоугольник по этим линиям и отогнул полученные треугольники во внешнюю сторону, так что вместе с нижним прямоугольником они образовали прямоугольник.

   Как по полученному прямоугольнику восстановить исходный с помощью циркуля и линейки?

   Решение. Пусть $ABCD$ — полученный прямоугольник; O — его центр; K, M — середины его коротких сторон AB, CD; L, N — точки пересечения окружности с диаметром KM соответственно с BC и AD (рис.8.2). Тогда прямоугольник $KLMN$ — искомый. Действительно, пусть P — проекция M на LN. Так как $\angle CLM = \angle OML = \angle MLO$, то треугольники MCL и MPL равны и при перегибании по ML они совместятся. Аналогично при перегибании по MN совместятся треугольники MDN и MPN. Наконец, поскольку конструкция симметрична относительно точки O, то при перегибании по KL и KN треугольники BKL и AKN наложатся на треугольник NKL.

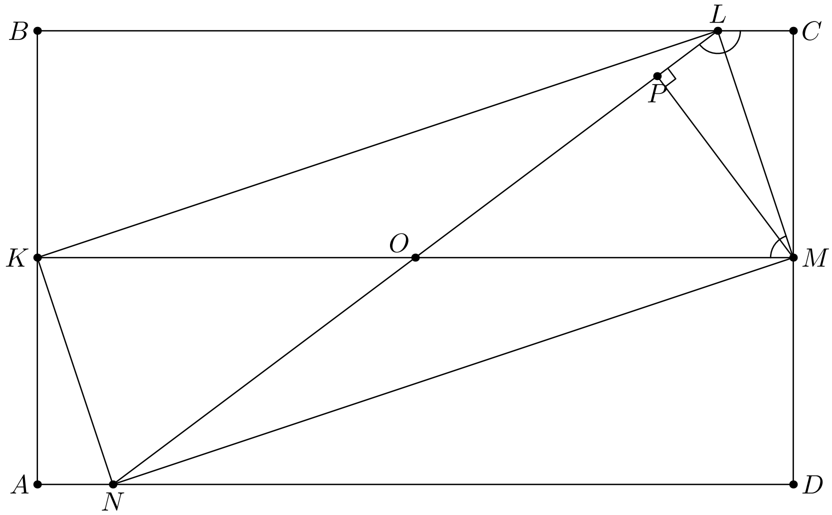

Рис.8.2

3. (А.Мякишев, Д.Мавло) Около треугольника ABC описали окружность. A_1 — точка пересечения с нею прямой, параллельной BC и проходящей через A. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1, C_1 опустили перпендикуляры на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

   Первое решение. Так как точка A_1 симметрична A относительно серединного перпендикуляра к BC, то перпендикуляр из A_1 симметричен высоте из A. По теореме Фалеса, он пересекает прямую OH, где O и H — центр описанной окружности и точка пересечения высот треугольника, в точке, симметричной H относительно O. Через эту же точку проходят два других перпендикуляра.

   Второе решение. Пусть K, L и M — точки попарного пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 (рис.8.3). Докажем, что KC_1 — высота треугольника KLM. Поскольку $KBCA$ — параллелограмм, а AC_1CB — равнобокая трапеция, то $KA = BC = AC_1$, $\angle KAB = \angle ABC = \angle BAC_1$. Таким образом, в равнобедренном треугольнике KAC_1 AB является биссектрисой, а, следовательно, и высотой. То есть, $AB \perp KC_1$, откуда $CC_1 \perp KC_1$. Аналогично доказывается, что LA_1 и MB_1 — также являются высотами треугольника KLM. Поскольку высоты пересекаются в одной точке, то утверждение задачи доказано.

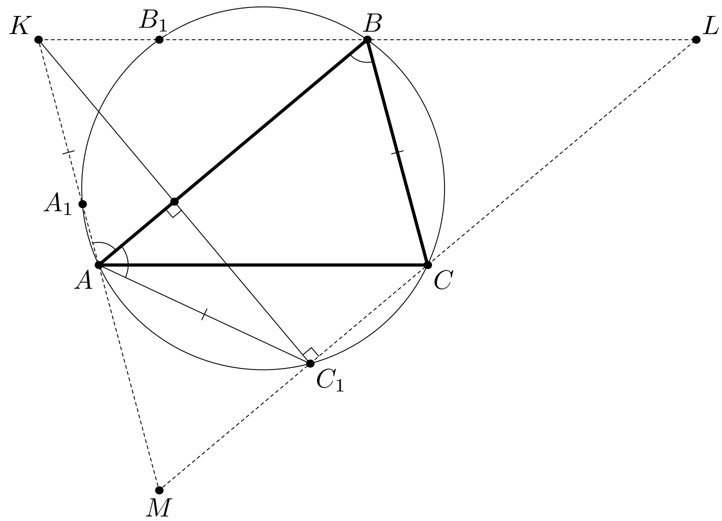

Рис.8.3.

4. (А.Шаповалов) В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд, суммарная длина которых тоже равна 1. Докажите, что в окружность можно вписать правильный шестиугольник, стороны которого не пересекают этих хорд.

   Решение. Закрасим меньшие из дуг, стягиваемых проведенными хордами. Если сдвинуть закрашенные дуги так, чтобы соответствующие хорды образовали ломаную, то расстояние между концами этой ломаной будет меньше 1, а, поскольку хорда длины 1 стягивает дугу, равную $1/6$ круга, то сумма закрашенных дуг будет меньше, чем $1/6$ круга.

   Теперь впишем в окружность правильный шестиугольник и отметим одну из его вершин. Будем вращать этот шестиугольник и каждый раз, когда отмеченная вершина попадает в закрашенную точку, закрашивать точки, в которые попадут остальные вершины. Тогда общая длина закрашенных дуг увеличится не более, чем в 6 раз, следовательно, найдется положение шестиугольника, при котором все его вершины попадут в незакрашенные точки. Очевидно, что в этом положении стороны шестиугольника не будут пересекать проведенных хорд.

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Решения. Финал. Второй день. 8 класс

5. (С.Маркелов) Через вершину A равностороннего треугольника ABC проведена прямая, не пересекающая отрезок BC. По разные стороны от точки A на этой прямой взяты точки M и N так, что $AM = AN = AB$ (точка B внутри угла MAC). Докажите, что прямые AB, AC, BN, CM образуют вписанный четырехугольник.

   Решение. Так как треугольник BAN — равнобедренный, то $\angle ANB = \frac{\angle MAB}{2}$ (рис.8.5). Аналогично $\angle AMC = \frac{\angle NAC}{2}$. Значит, сумма этих углов равна $60°$, а угол между прямыми BN и CM равен $120°$, что равносильно утверждению задачи.

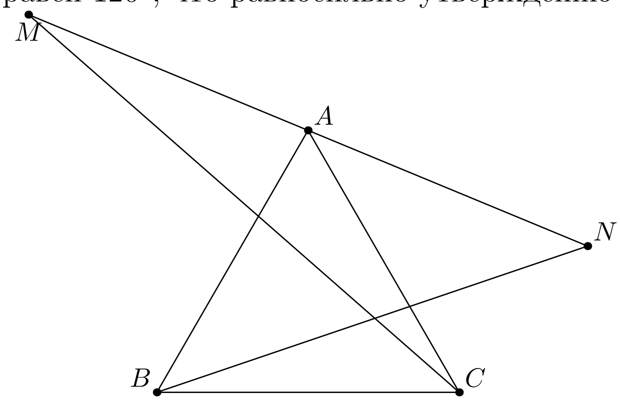

Рис.8.5

6. (Д.Прокопенко) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. A_0 - середина стороны BC. Прямые A_0B_1 и A_0C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно прямой BC, в точках P и Q. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника PA_0Q лежит на высоте треугольника ABC.

   Первое решение. Так как треугольники BCB_1 и BCC_1 — прямоугольные, то их медианы B_1A_0, C_1A_0 равны половине гипотенузы, т.е. $B_1A_0 = A_0C = A_0B = C_1A_0$. Далее, $\angle PB_1A = \angle CB_1A_0 = \angle B_1CA_0 = \angle PAC$, и, значит, $PA = PB_1$ (рис.8.6.1). Аналогично, $QA = QC_1$. Следовательно, вписанная окружность треугольника A_0PQ касается его сторон в точках A, B_1, C_1, откуда и следует утверждение задачи.

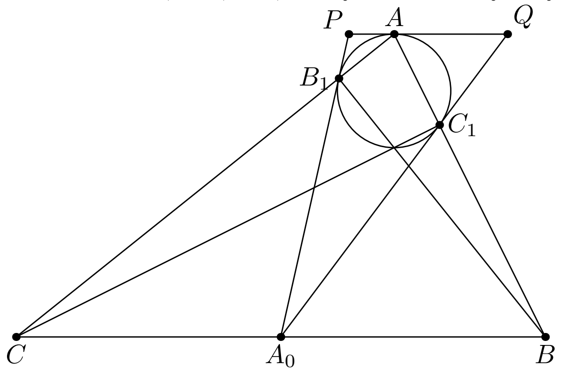

Рис.8.6.1

Второе решение. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, O — середина AH. Тогда точки A_0, B_1, C_1, O лежат на окружности девяти точек треугольника ABC, причем A_0O — диаметр этой окружности. С другой стороны, точки

B_1, C_1 лежат на окружности с диаметром AH, которая, следовательно, и является вписанной окружностью треугольника APQ (рис.8.6.2).

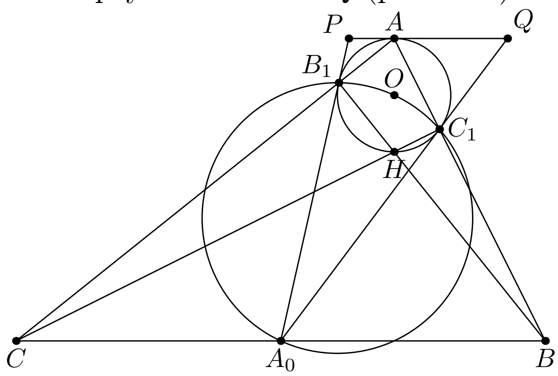

Рис.8.6.2

7. (А.Акопян) На плоскости отмечена точка M, не лежащая на осях координат. По оси ординат движется точка Q, а по оси абсцисс точка P так, что угол PMQ всегда остается прямым. Найдите геометрическое место точек, симметричных M относительно PQ.

   Решение. Из условия задачи следует, что точки P, Q, M и начало координат O лежат на окружности с диаметром PQ. Значит, точка N, симметричная M относительно PQ, тоже лежит на этой окружности и $\angle PON = \angle PMN = \angle PNM = \angle POM$ (рис.8.7). Таким образом, N лежит на прямой, симметричной OM относительно осей координат. С другой стороны, если N — произвольная точка этой прямой, а P, Q — точки пересечения осей координат с окружностью OMN, то $\angle PMN = \angle PON = \angle POM = \angle PNM$ и $\angle PMQ = \angle POQ = \angle PNQ = 90°$, поэтому точки M и N симметричны относительно PQ.

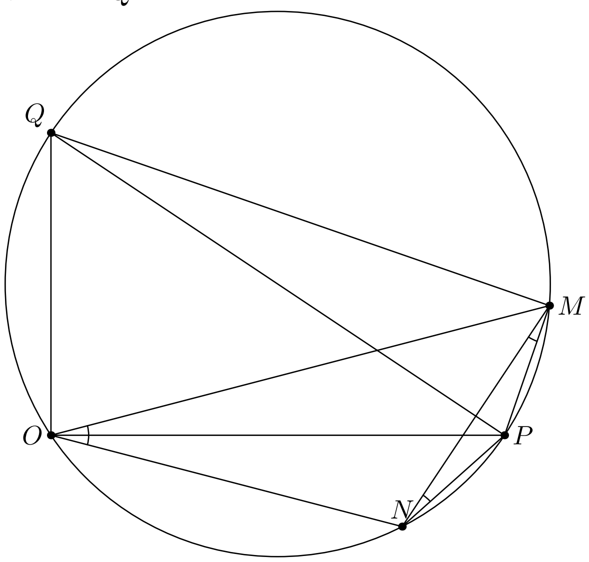

Рис.8.7

8. (А.Заславский) Пользуясь только линейкой, разделите сторону квадратного стола на n равных частей. Линии можно проводить только на поверхности стола.

   Решение. Сначала разделим сторону пополам. Проведя диагонали, найдем центр O квадрата $ABCD$. Теперь пусть X — точка на стороне BC, Y — точка пересечения XO и AD, U — точка пересечения AX и BY, V — точка пересечения прямых UC и XY

(рис.8.8.1). Тогда прямая BV делит основания трапеции $CYUX$ пополам. Соединив O с серединой CY, разделим пополам стороны AB и CD.

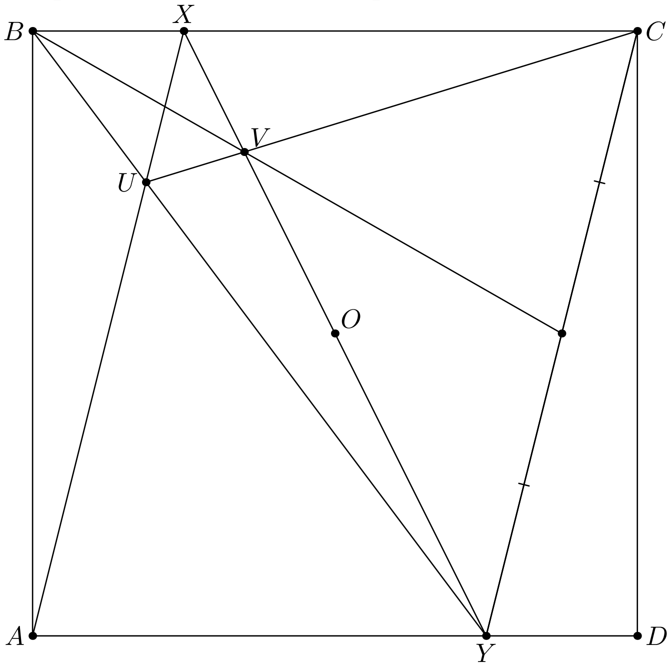

Рис.8.8.1

Покажем теперь, что, если две противоположные стороны разделены на k равных частей, то их можно разделить на $k+1$ равных частей. Пусть $AX_1 = X_1X_2 = \cdots = X_{k-1}B$, $DY_1 = Y_1Y_2 = \cdots Y_{k-1}C$. Тогда по теореме Фалеса прямые $AY_1, X_1Y_2, \ldots, X_{k-1}C$ делят диагональ BD на $k+1$ равных частей (рис.8.8.2). Аналогично разделив вторую диагональ и проведя через соответствующие точки прямые, параллельные BC, разделим на $k+1$ равных частей сторону AB.

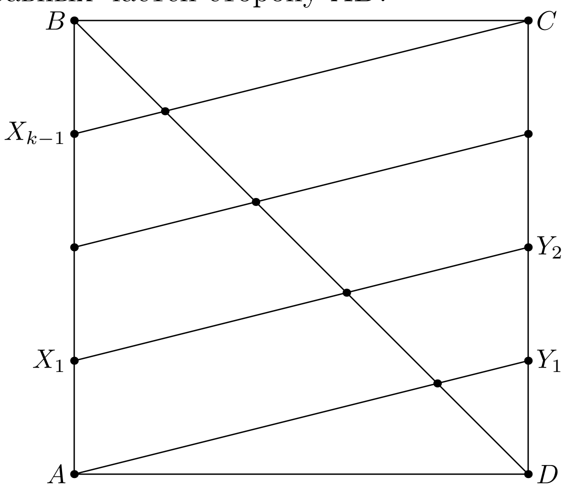

Рис.8.8.2

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

1. (М.Кунгожин, Казахстан) Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB, проходящую через A_1, B_1 в точке D. Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M, BD и AA_1 — в точке N. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.

   Решение. Угол между касательной к окружности B_1DM в точке D и прямой AD равен углу MB_1D, который, в свою очередь, равен углу BAD (рис.9.1). Аналогично угол между касательной к окружности A_1DN и BD равен углу ABD. Поскольку $\angle BAD + \angle ABD = 90° = \angle ADB$, касательные к обеим окружностям совпадают.

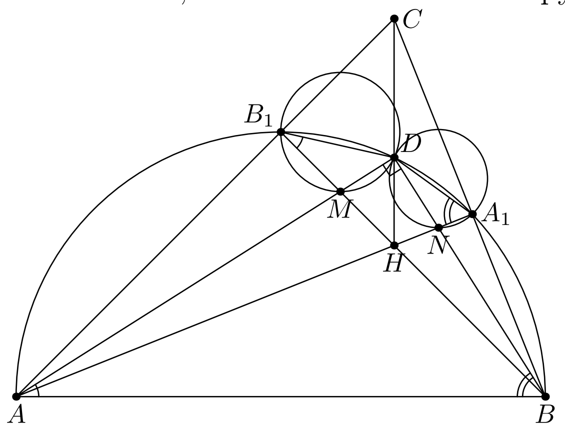

Рис.9.1

2. (Д.Кеян, Молдова) В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle C$. Точки P и Q на серединном перпендикуляре к CB таковы, что $\angle CAP = \angle PAQ = \angle QAB = \frac{\angle A}{3}$. Докажите, что Q — центр описанной окружности треугольника CPB.

   Решение. Пусть точка D симметрична A относительно серединного перпендикуляра к BC. Тогда $ABCD$ — равнобокая трапеция, а диагональ BD — биссектриса угла B. Следовательно, $CD = DA = AB$. Далее $\angle DAP = \angle C + \angle A/3 = (\angle A + \angle B + \angle C)/3 = 60°$. Поэтому треугольник ADP — равносторонний и $AP = AB$. Поскольку AQ — биссектриса угла PAB, то $QP = QB = QC$ (рис.9.2).

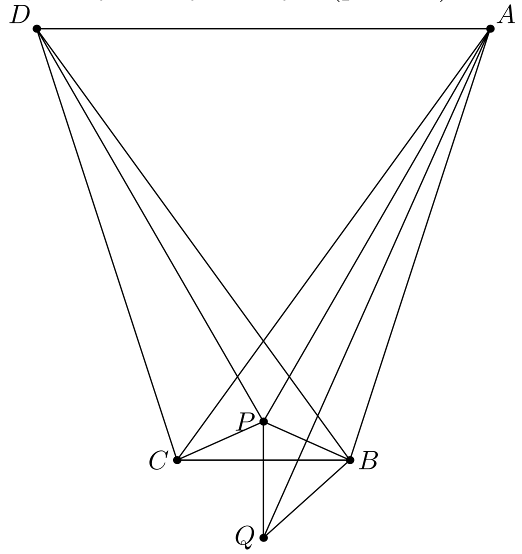

Рис.9.2

3. (А.Карлюченко, Украина) Восстановите равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) по точкам I, M, H пересечения биссектрис, медиан и высот соответственно.

   Решение. Центр O описанной окружности треугольника лежит на продолжении HM за точку M, и $MO = HM/2$. Кроме того, прямые BI, CI являются биссектрисами углов OBH, OCH ($\angle CBH = \angle ABO = \pi/2 - \angle C$). Следовательно, $BO/BH = CO/CH = IO/IH$, т.е. точки B, C лежат на окружности Аполлония точек O и H, проходящей через I. Но центр окружности BIC лежит на описанной окружности треугольника ABC. Таким образом, получаем следующее построение.

   Построим точку O и окружность Аполлония. Затем построим окружность с центром O, проходящую через центр этой окружности. Две окружности пересекутся в точках B, C, а прямая OH вторично пересечет описанную окружность в точке A.

4. (А.Заславский) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Биссектрисы его углов образуют четырехугольник, вписанный в окружность с центром I, а биссектрисы внешних углов — четырехугольник, вписанный в окружность с центром J. Докажите, что O — середина IJ.

   Решение. Пусть биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, B и C — в точке L, C и D — в точке M, D и A — в точке N (рис.9.4). Тогда прямая KM — биссектриса угла между AD и BC. Обозначив этот угол через ϕ, по теореме о внешнем угле получаем, что $\angle LKM = \angle B/2 - \phi/2 = (\pi - \angle A)/2 = \angle C/2$ и, значит, $\angle LIM = \angle C$. С другой стороны, перпендикуляры из L на BC и из M на CD образуют с ML углы, равные $(\pi - \angle C)/2$, т.е. треугольник, образованный этими перпендикулярами и ML, — равнобедренный с углом при вершине, равным углу C. Поэтому вершина этого треугольника совпадает с I. Таким образом, перпендикуляры, опущенные из вершин четырехугольника $KLMN$ на соответствующие стороны $ABCD$, проходят через I. Аналогично получаем, что перпендикуляры из вершин четырехугольника, образованного внешними биссектрисами, проходят через J.

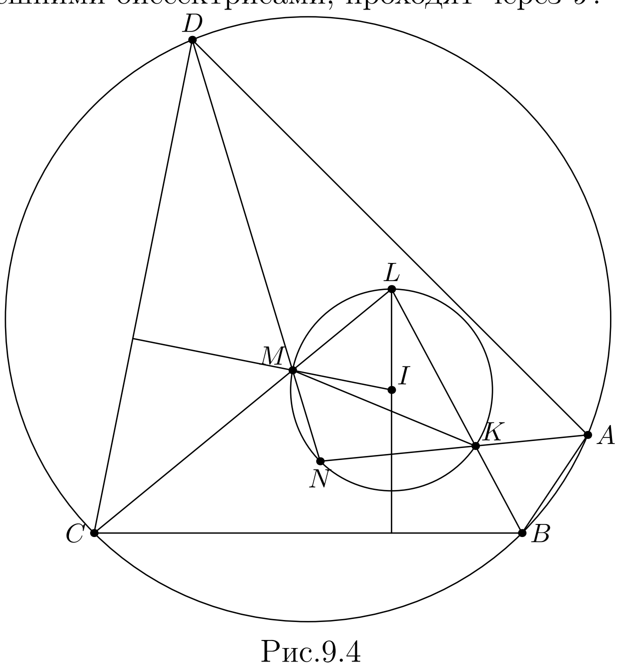

Рис.9.4

Пусть теперь K' — точка пересечения биссектрис внешних углов A и B. Так как четырехугольник $AKBK'$ вписан в окружность с диаметром KK', то проекции K и K' на AB симметричны относительно середины AB. Отсюда и из утверждения, доказанного выше, следует, что проекции I и J на каждую из сторон $ABCD$ симметричны относительно середины этой стороны, что равносильно утверждению задачи.

Примечание. Известно аналогичное утверждение для треугольника: центр описанной окружности является серединой отрезка между центром вписанной окружности и центром описанной окружности треугольника, образованного биссектрисами внешних углов.

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

5. (Б.Френкин) Из высот треугольника можно составить треугольник. Верно ли, что из его биссектрис также можно составить треугольник?

Решение. Нет. Возьмем треугольник, две стороны которого равны 2 и 3, и будем увеличивать угол между этими сторонами. При стремлении угла к 180° отношение высот треугольника будет стремиться к $1/2 : 1/3 : 1/5$, так что из них при любом значении угла можно будет составить треугольник. С другой стороны, наименьшая из биссектрис стремится к нулю, а две другие — к неравным величинам. Значит, при больших значениях угла треугольник из биссектрис составить нельзя.

Приведем точные оценки. Прежде всего отметим, что, если две стороны треугольника равны a и b, угол между ними — C, а биссектриса этого угла — l_c, то площадь треугольника равна $S = ab\sin C/2 = (a+b)l_c \sin\frac{C}{2}/2$, откуда $l_c = 2ab\cos\frac{C}{2}/(a+b)$. Аналогично находятся длины биссектрис l_a, l_b.

Пусть теперь $a = 2$, $b = 3$. Тогда $\cos\frac{A}{2} > \cos\frac{B}{2}$. Поэтому

$$l_a - l_b > 2c\cos\frac{A}{2}\left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c}\right) = \frac{2c^2\cos\frac{A}{2}}{(c+2)(c+3)}.$$

Возьмем угол C достаточно большим, чтобы выполнялись неравенства $c > 4$, $\cos\frac{A}{2} > 0,9$, $\cos\frac{C}{2} < 0,1$. Тогда $l_a - l_b > l_c$ и треугольник из биссектрис составить нельзя. С другой стороны, для отношений высот имеем $h_b/h_a = 2/3$, $2/5 < h_c/h_a < 1/2$. Следовательно, $h_b + h_c > h_a > h_b > h_c$ и из высот можно составить треугольник.

6. (П.Долгирев) В треугольнике ABC AA_0 и BB_0 — медианы, AA_1 и BB_1 — высоты. Описанные окружности треугольников CA_0B_0 и CA_1B_1 вторично пересекаются в точке M_c. Аналогично определяются точки M_a, M_b. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой, а прямые AM_a, BM_b, CM_c параллельны.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а H — точка пересечения его высот. Так как $\angle CA_0O = \angle CB_0O = \angle CA_1H = \angle CB_1H = 90°$, то CO и CH — диаметры окружностей CA_0B_0 и CA_1B_1 соответственно. Поэтому проекция C на прямую OH лежит на обеих окружностях, т.е. совпадает с M_c (рис.9.6). Отсюда, очевидно, следует утверждение задачи.

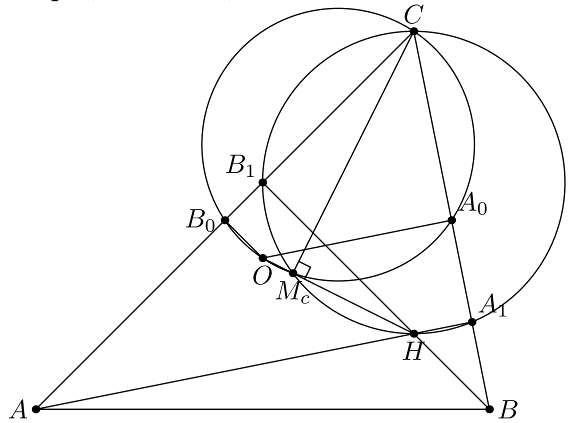

Рис.9.6

7. (И.Богданов) В угол вписаны две окружности ω и Ω. Прямая ℓ пересекает стороны угла в точках A и F, окружность ω в точках B и C, окружность Ω в точках D и E (порядок точек на прямой — A, B, C, D, E, F). Пусть $BC = DE$. Докажите, что $AB = EF$.

Первое решение. Пусть одна сторона угла касается ω и Ω в точках X_1, Y_1, а другая — в точках X_2, Y_2; U, V — точки пересечения X_1X_2 и Y_1Y_2 с AF. Середина отрезка CD лежит на радикальной оси окружностей, т.е. средней линии трапеции $X_1Y_1Y_2X_2$, поэтому $BU = EV$ и $CU = DV$ (рис.9.7). Следовательно, $X_1U \cdot X_2U = Y_1V \cdot Y_2V$. Отсюда получаем, что $FY_2/FX_2 = Y_2V/X_2U = X_1U/Y_1V = AX_1/AY_1$, т.е. $AX_1 = FY_2$. Теперь утверждение задачи вытекает из равенств $AB \cdot AC = AX_1^2 = FY_2^2 = FE \cdot FD$.

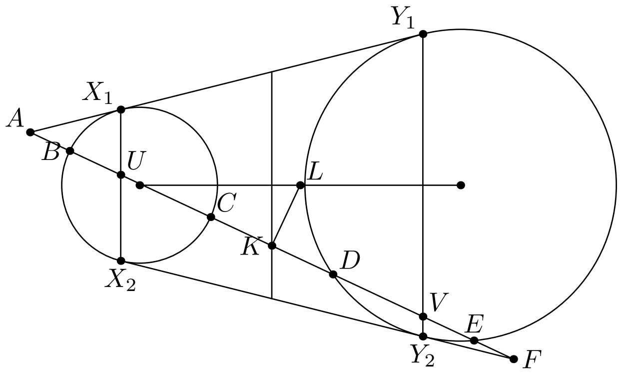

Рис.9.7

Второе решение. Зафиксируем точку A на стороне угла и покажем, что через нее проходит ровно одна прямая, удовлетворяющая условиям задачи. Действительно, середина K отрезка CD равноудалена от проекций центров окружностей на искомую прямую и, значит, совпадает с проекцией середины L отрезка между центрами. Следовательно, K — точка пересечения окружности с диаметром AL и радикальной оси окружностей, отличная от середины отрезка X_1Y_1. С другой стороны, если взять точку F так, что $AX_1 = Y_2F$, то $AB \cdot AC = FE \cdot FD$ и $AD \cdot AE = FC \cdot FB$, откуда следует, что прямая AF — искомая.

8. (Б.Френкин) Выпуклый n-угольник P, где $n > 3$, разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Каковы возможные значения n, если n-угольник описанный?

Решение. Докажем, что $n = 4$.

Лемма. Пусть выпуклый n-угольник разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Тогда у каждого из треугольников разбиения хотя бы одна сторона является стороной (а не диагональю) n-угольника.

Доказательство леммы. Пусть треугольник разбиения имеет углы $\alpha \le \beta \le \gamma$ с вершинами A, B, C соответственно, причём AC и BC — диагонали n-угольника. К C примыкают ещё хотя бы два угла треугольников разбиения. Если хотя бы один из них больше α, то сумма углов при C не меньше $\gamma + \beta + \alpha = \pi$, но она не больше угла выпуклого многоугольника — противоречие. Значит, все углы при C, кроме $\angle ACB$, равны α, причём α строго меньше β.

Рассмотрим второй треугольник разбиения, примыкающий к BC. Так как он равен $\triangle ABC$, то против стороны BC в нём лежит угол, равный α. Но угол при C в этом треугольнике также равен α, тогда как он должен равняться β или γ — противоречие. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи.

Так как сумма углов многоугольника P равна $\pi(n-2)$ и они складываются из всех углов треугольников разбиения, то количество этих треугольников равно $n-2$. По лемме, в каждом из этих треугольников хотя бы одна сторона является стороной P. Отсюда вытекает, что у двух треугольников разбиения по две стороны являются сторонами P.

Пусть KLM — один из этих треугольников, причём KL и LM — стороны P. К стороне KM примыкает другой треугольник разбиения KMN. Одна из его сторон (для определённости KN) является стороной P. Так как треугольники разбиения равны, то $\angle NKM$ равен либо $\angle LKM$, либо $\angle KML$. В первом случае KM — биссектриса угла описанного многоугольника P и потому содержит центр I вписанной окружности. Во втором случае $KN \parallel LM$. Тогда I лежит на общем перпендикуляре к этим отрезкам и потому содержится (по выпуклости) в параллелограмме $KLMN$, а значит — хотя бы в одном из треугольников $KLM,\ KMN$.

Пусть $K'L'M'$ — другой треугольник разбиения, две стороны которого являются сторонами P. Аналогично предыдущему, I содержится либо в этом, либо в смежном с ним треугольнике разбиения. Если I содержится хотя бы одном из треугольников $KLM,\ K'L'M'$, то они имеют общую сторону, и тогда $n = 4$. В противном случае треугольник KMN — смежный с обоими этими треугольниками и содержит I. При этом сторона MN — общая с $\triangle K'L'M'$; можно положить $M = M',\ N = K'$. Рассуждая как выше, получаем, что $LM \parallel KN \parallel L'M$. Но тогда LM и $L'M$ лежат на одной прямой, тогда как это две стороны выпуклого n-угольника — противоречие.

Из приведенного рассуждения видно, что выпуклый четырехугольник удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда он симметричен относительно одной из своих диагоналей.

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

1. (М.Рожкова, Украина) В треугольнике ABC середины сторон AC, BC, вершина C и точка пересечения медиан лежат на одной окружности. Докажите, что она касается окружности, проходящей через вершины A, B и ортоцентр треугольника ABC.

   Решение. Пусть C' — точка, симметричная C относительно середины AB. Тогда точки A, B, C' и ортоцентр треугольника ABC лежат на одной окружности. С другой стороны, если A_0, B_0 — середины сторон BC, AC, то треугольник A_0B_0C гомотетичен треугольнику ABC' относительно центра тяжести M треугольника ABC с коэффициентом $-1/2$. Следовательно, описанные окружности этих треугольников касаются в точке M (рис.10.1).

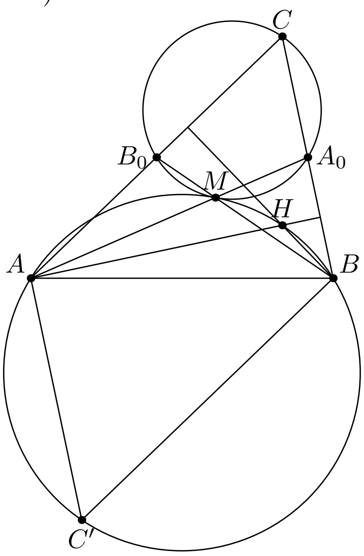

Рис.10.1

2. (Л.Емельянов) Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности, касающейся сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Точки A', B', C', D' — середины отрезков LM, MN, NK, KL. Докажите, что четырехугольник, образованный прямыми AA', BB', CC', DD', — вписанный.

   Решение. Прежде всего сформулируем следующее утверждение, вытекающее из непосредственного вычисления углов.

   Лемма. Точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда биссектрисы углов, образованных прямыми AB и CD, параллельны биссектрисам углов, образованных прямыми AD и BC.

   Действительно, рассмотрим для определенности случай, когда $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, лучи BA и DC пересекаются в точке E, DA и BC — в точке F. Тогда углы между биссектрисами углов BED и BFD равны полусуммам противоположных углов четырехугольника, откуда, очевидно, следует утверждение леммы. Другие случаи рассматриваются аналогично.

   Перейдем к решению задачи. Пусть I центр вписанной окружности, r — ее радиус. Тогда $IC' \cdot IA = r^2 = IA' \cdot IC$, т.е. точки A, C, A', C' лежат на одной окружности. Применяя лемму, получаем, что биссектрисы углов между AA' и CC' параллельны биссектрисам углов между IA и IC, а значит и углов между перпендикулярными им прямыми KN и LM. Аналогично биссектрисы углов между BB' и DD' параллельны биссектрисам углов между KL и MN. Еще раз применив лемму, получим утверждение задачи.

3. (А.Акопян) Дано два тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Рассмотрим шесть пар ребер A_iA_j и B_kB_l, где (i, j, k, l) — перестановка чисел $(1, 2, 3, 4)$ (например, A_1A_2 и B_3B_4). Известно, что во всех парах, кроме одной, ребра перпендикулярны. Докажите, что в оставшейся паре ребра тоже перпендикулярны.

   Решение. Сначала докажем следующую лемму.

   Лемма. Ребра A_1A_2 и B_3B_4 перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикуляры из точек A_1, A_2 на плоскости $B_2B_3B_4$ и $B_1B_3B_4$ соответственно пересекаются.

   Доказательство леммы. Пусть $A_1A_2 \perp B_3B_4$. Тогда существует плоскость, проходящая через A_1A_2 и перпендикулярная B_3B_4. Перпендикуляры из условия леммы лежат в этой плоскости и, значит, пересекаются. Обратно, если перпендикуляры пересекаются, то проходящая через них плоскость перпендикулярна B_3B_4 и содержит A_1A_2.

   Пусть теперь $A_1A_2 \perp B_3B_4$, $A_1A_3 \perp B_2B_4$, $A_2A_3 \perp B_1B_4$. Тогда любые два из трех перпендикуляров, опущенных из A_1, A_2, A_3 на соответствующие грани $B_1B_2B_3B_4$, пересекаются. Так как эти перпендикуляры не лежат в одной плоскости, отсюда следует, что они проходят через одну точку. Следовательно, если выполнены условия задачи, то все четыре перпендикуляра из вершин одного тетраэдра на соответствующие грани другого проходят через одну точку, что влечет перпендикулярность шестой пары ребер.

4. (В.Мокин) На стороне AB треугольника ABC взята точка D. В угол ADC вписана окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника ACD, а в угол BDC — окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника BCD. Оказалось, что эти окружности касаются отрезка CD в одной и той же точке X. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из X на AB, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

   Решение. Сначала докажем следующую лемму.

   Лемма. Пусть окружность касается сторон AC, BC треугольника ABC в точках U, V, а описанной около него окружности изнутри в точке T. Тогда прямая UV проходит через центр I окружности, вписанной в треугольник ABC.

   Доказательство леммы. Пусть прямые TU, TV вторично пересекают описанную окружность в точках X, Y. Так как окружности ABC и TUV гомотетичны с центром T, то X, Y — середины дуг AC, BC, т.е. прямые AY и BX пересекаются в точке I (рис.10.4.1). Поэтому утверждение леммы следует из теоремы Паскаля, примененной к шестиугольнику $AYTXBC$.

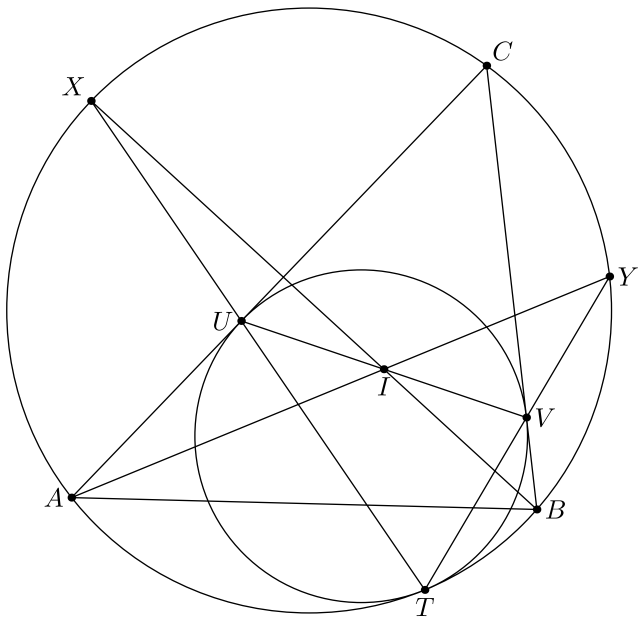

Рис.10.4.1

Из леммы следует, что в условиях задачи DI_1XI_2, где I_1, I_2 — центры вписанных окружностей треугольников ACD, BCD, — прямоугольник (рис.10.4.2.). Пусть Y, C_1, C_2 — проекции точек X, I_1, I_2 на AB. Тогда $BY-AY=BC_2+C_2Y-AC_1-C_1Y=(BC_2-DC_2)-(AC_1-DC_1)=(BC-CD)-(AC-CD)=BC-AC$. Следовательно, Y — точка касания стороны AB с вписанной окружностью.

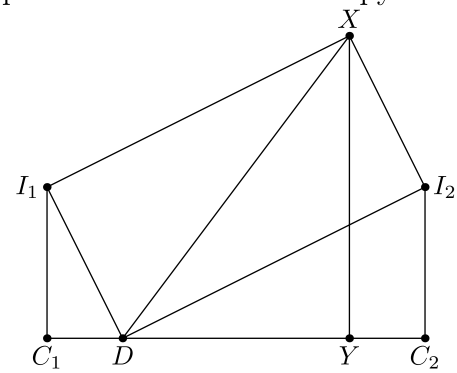

Рис.10.4.2

VII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

5. (А.Блинков) Точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведенной к этой же стороне. Докажите, что эта сторона составляет треть периметра треугольника.

   Решение. Из условия следует, что радиус r_c вневписанной окружности, касающейся стороны AB треугольника ABC, равен высоте h_c, проведенной к этой стороне. Поскольку площадь треугольника $S = (p-c)r_c = ch_c/2$, то $c = 2(p-c) = 2p/3$.

6. (М.Рожкова, Украина) Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника $l_1^2 > \sqrt{3}S > l_2^2$, где l_1, l_2 — наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, S — его площадь.

   Решение. Пусть $a > b > c$ — стороны треугольника. Тогда l_2 — биссектриса угла A и $S = bc\sin A/2 = (b+c)l_2 \sin\frac{A}{2}/2$. Поэтому правое неравенство можно переписать в виде $\sqrt{3}(b+c)\sin\frac{A}{2}/2 > 2bc\cos\frac{A}{2}/(b+c)$ или $\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{A}{2} > 4bc/(b+c)^2$. Но $\pi/6 < A/2 < \pi/2$, следовательно, левая часть больше 1, а правая меньше 1 по неравенству о средних.

   Так как $C < \pi/3$, то $\sqrt{3}S < 3ab/4$. С другой стороны, $l_1^2 = 4a^2b^2\cos^2\frac{C}{2}/(a+b)^2 = 2a^2b^2(1+\cos C)/(a+b)^2$. Поскольку $b > c$, $\cos C > a/2b$, т.е. $l_1^2 > a^2b(a+2b)/(a+b)^2$. Поэтому левое неравенство следует из того, что $a(a+2b)/(a+b)^2 = 1-b^2/(a+b)^2 > 3/4$.

7. (Г.Фельдман) В остроугольном треугольнике ABC O — центр описанной окружности, A_1, B_1, C_1 — основания высот. На прямых OA_1, OB_1, OC_1 нашли такие точки A', B', C' соответственно, что четырёхугольники $AOBC'$, $BOCA'$, $COAB'$ вписанные. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AA_1A', BB_1B', CC_1C', имеют общую точку.

   Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot CH_1$, т.е степени H относительно окружностей AA_1A', BB_1B', CC_1C' равны, причем H лежит внутри этих окружностей. С другой стороны, $\angle BC'O = \angle BAO = \angle OBC_1$, т.е. треугольники $OC'B$ и OBC_1 подобны и $OC_1 \cdot OC' = OB_0^2$ (рис.10.7). Следовательно, степени O относительно всех трех окружностей также равны и, значит, эти окружности пересекаются в двух точках, лежащих на прямой OH.

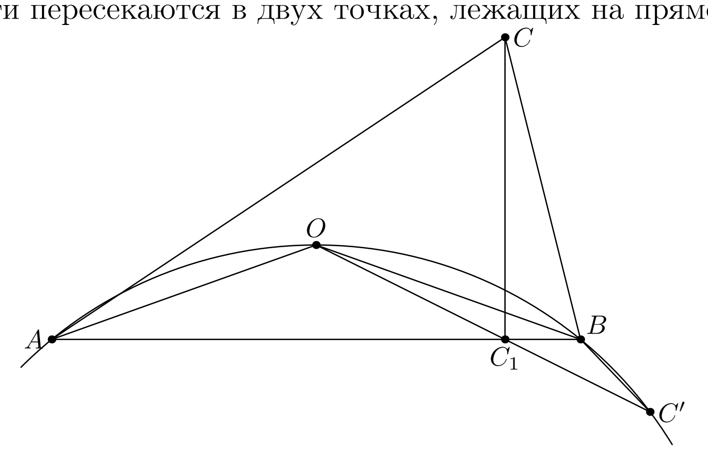

Рис.10.7

8. (С.Токарев) Есть лист жести размером 6×6. Разрешается надрезать его, но так, чтобы он не распадался на части, и сгибать. Как сделать куб с ребром 2, разделенный перегородками на единичные кубики?

Решение. Искомая развертка изображена на рис.10.8. Жирные линии обозначают разрезы, тонкие и пунктирные — сгибы вверх и вниз. Центральный квадрат 2×2 соответствует горизонтальной перегородке куба.

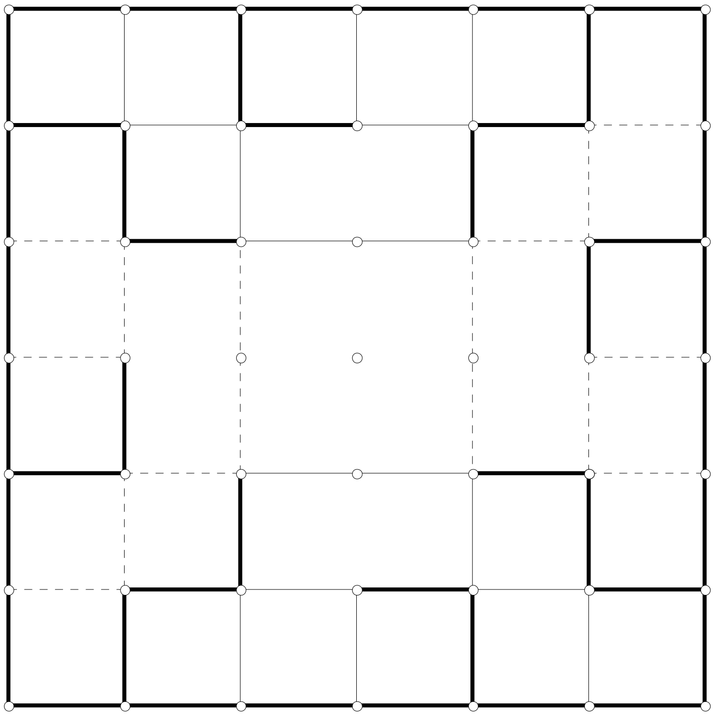

Рис.10.8.