VIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Восьмой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники 8–11 классов. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов (на момент проведения олимпиады) она предназначена. Впрочем, можно решать также задачи и для более старших классов (решенные задачи для младших классов при подведении итогов не учитываются). Решение каждой задачи оценивается от 0 до 7 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решения задач на русском языке должны быть посланы не позднее 1 апреля 2012 года. Решения следует присылать по электронной почте в форматах pdf, doc или jpg на адрес geomolymp@mccme.ru. При этом во избежание потери работы нужно соблюдать следующие правила.

1. Каждую работу следует посылать отдельным письмом с уведомлением о получении. Объем письма не должен превышать 10 Мб.

2. Если работа содержится в нескольких файлах, желательно присылать их в виде архива.

3. Если объем работы превышает 10 Мб, разбейте ее на несколько писем.

4. В теме письма нужно написать "работа на олимпиаду им. Шарыгина" и указать фамилию участника, а в тексте привести следующие сведения об участнике:

- фамилию, имя, отчество;

- полный почтовый адрес с индексом, телефон, E-mail;

- класс, в котором сейчас учится школьник;

- номер и адрес школы;

- ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.

Если у Вас нет возможности прислать работу в электронном виде, пришлите ее простой бандеролью (или принесите сами) в обычной тетради, не сворачивая тетрадь в трубку, по адресу: *119002, Москва Г-002, Большой Власьевский пер., д. 11., МЦНМО. На олимпиаду им. Шарыгина.* На обложке тетради **обязательно** укажите все сведения, перечисленные выше в п.4.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая аккуратные чертежи. Если задача на вычисления, в конце ее решения должен быть отчетливо выделенный ответ. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении какой-то известной теоремой или фактом, приведенным в задаче из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему или факт Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Жюри будет интересно узнать Ваше мнение.

Победители заочного тура — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2012 года в г. Дубна под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат Грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте www.geometry.ru не позднее конца мая 2012 г. Свои результаты Вы сможете узнать по электронной почте.

1. (8) В треугольнике ABC точка M — середина AB, а точка D — основание высоты CD. Докажите, что $\angle A = 2\angle B$ тогда и только тогда, когда $AC = 2MD$.

2. (8) Вписанный n-угольник разбит непересекающимися (во внутренних точках) диагоналями на треугольники. Каждый из получившихся треугольников подобен хотя бы одному из остальных.

   При каких n возможна описанная ситуация?

3. (8) Окружность с центром I касается сторон AB, BC, CA треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1. Прямые AI, CI, B_1I пересекают A_1C_1 в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $\angle YB_1Z = \angle XB_1Z$

4. (8) Дан треугольник ABC. M — середина стороны BC, а P — проекция вершины B на серединный перпендикуляр к AC. Прямая PM пересекает сторону AB в точке Q. Докажите, что треугольник QPB равнобедренный

5. (8) На стороне AC треугольника ABC произвольно выбрана точка D. Касательная, проведённая в точке D к описанной окружности треугольника BDC, пересекает сторону AB в точке C_1; аналогично определяется точка A_1. Докажите, что $A_1C_1||AC$.

6. (8–9) На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC отметили точку C_1 такую, что $BC = CC_1$.Затем на катете AB отметили точку C_2 такую, что $AC_2 = AC_1$; аналогично определяется точка A_2. Найдите угол AMC, где M — середина отрезка A_2C_2.

7. (8–9) В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы углов A и B обратно пропорциональны противолежащим сторонам. Найдите угол C.

8. (8–9) Пусть BM – медиана прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$). Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается сторон AB, AM в точках A_1, A_2; аналогично определяются точки C_1, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на биссектрисе угла ABC.

9. (8–9) Восстановите треугольник ABC по прямым l_b и l_c , содержащим биссектрисы углов B и C, и основанию биссектрисы угла A — точке L_1.

10. В выпуклом четырехугольнике все стороны и все углы попарно различны.

    а)(8–9) Может ли наибольший угол примыкать к наибольшей стороне, и при этом наименьший примыкать к наименьшей?

    б)(9–11) Может ли наибольший угол не примыкать к наименьшей стороне, и при этом наименьший не примыкать к наибольшей?

11. Дан треугольник ABC и точка P. Точки A', B', C' — проекции P на BC, CA, AB. Прямая, проходящая через P и параллельная AB, вторично пересекает описанную окружность треугольника $PA'B'$ в точке C_1. Точки A_1, B_1 определены аналогично. Докажите, что

    а) (8-10) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке;

    б) (9–11) треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

12. (9–10) Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, проходящая через O и параллельная BC, пересекает AB и AC в точках P и Q соответственно. Известно, что сумма расстояний от точки O до сторон AB и AC равна OA. Докажите, что сумма отрезков PB и QC равна PQ.

13. (9–10) Даны точки A, B. Найдите геометрическое место таких точек C, что C, середины отрезков AC, BC и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной окружности.

14. (9–10) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AC \cap BD = O$ и M — середина BC. Пусть $MO \cap AD = E$. Докажите, что $\frac{AE}{ED} = \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle CDO}}$.

15. (9–11) Дан треугольник ABC. Рассматриваются прямые l, обладающие следующим свойством: три прямые, симметричные l относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

16. (9–11) Дан прямоугольный треугольник ABC, где AB — гипотенуза. Пусть M — середина AB, O — центр описанной окружности ω треугольника CMB. Прямая AC вторично пересекает окружность ω в точке K. Отрезок KO пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке L. Докажите, что отрезки AL и KM пересекаются на описанной окружности треугольника ACM.

17. (9–11) Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Точка M лежит на дуге BC, прямая AM пересекает BD в точке P, прямая DM пересекает AC в точке Q. Докажите, что площадь четырёхугольника $APQD$ равна половине площади квадрата.

18. (9–11) На плоскости начерчен треугольник и в нём отмечены две точки. Известно, что какой-то из углов равен 58°, какой-то из остальных 59°, какая-то из отмеченных точек является центром вписанной окружности, а другая — центром описанной. Используя только линейку без делений, определите, где какой угол и где какая точка.

19. (10–11) Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y, расстояние между которыми тоже равно 1. Из точки C одной окружности проведены к другой касательные CA, CB, вторично пересекающие первую окружность в точках B', A'. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке Z. Найдите угол XZY.

20. (10–11) В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D. Пусть ω_1 и Ω_1, ω_2 и Ω_2 — соответственно вписанные и вневписанные (касающиеся AB во внутренней точке) окружности треугольников ACD и BCD. Докажите, что общие внешние касательные к ω_1 и ω_2, Ω_1 и Ω_2 пересекаются на прямой AB.

21. (10–11) Через ортоцентр остроугольного треугольника проведены две перпендикулярные прямые. Стороны треугольника высекают на каждой из этих прямых два отрезка: один, лежащий внутри треугольника, второй — вне его. Докажите, что произведение двух внутренних отрезков равно произведению двух внешних.

22. (10–11) В сегмент, ограниченный хордой и дугой AB окружности, вписана окружность ω с центром I. Обозначим середину указанной дуги AB через M, а середину дополнительной дуги через N. Из точки N проведены две прямые, касающиеся ω в точках C и D. Противоположные стороны AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке X, диагонали $ABCD$ пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, Y, I и M лежат на одной прямой.

23. (10–11) На каждой из двенадцати диагоналей граней куба выбирается произвольная точка. Определяется центр тяжести этих двенадцати точек. Найдите геометрическое место всех таких центров тяжести.

24. (10–11) На плоскости даны n ($n > 2$) точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколькими различными способами это множество точек можно разбить на два непустых подмножества так, чтобы выпуклые оболочки этих подмножеств не пересекались?