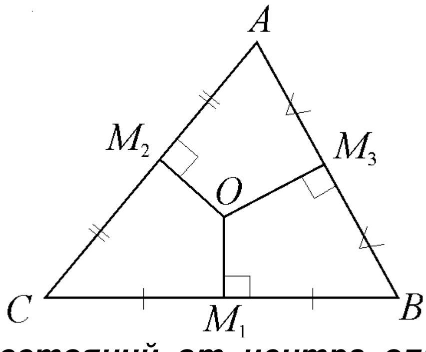
10 класс
2010/11 уч. год
Формула Карно.

Французский математик, механик, военный инженер, государственный деятель Лазарь Карно (1753 – 1823), ученик Гаспара Монжа (создателя начертательной геометрии), – оставил нам в наследство замечательную теорему школьной геометрии. Формулируется она так:

Рис. 1а



В остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон треугольника равняется сумме радиусов описанной и вписанной окружностей.

В виде формулы: $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$ (см. рис. 1а). Это равенство и называют ***формулой Карно*** (чтобы не путать с еще одной теоремой, которая носит имя Карно). Рассмотрим два способа ее доказательства: «геометрический» и «тригонометрический».

<u>Первый способ</u>. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Пусть биссектриса угла A пересекает ее в точке W, а точка D диаметрально противоположна точке W. Докажем сначала два вспомогательных факта: 1) $M_1W = \frac{r_a - r}{2}$; 2) $M_1D = \frac{r_b + r_c}{2}$, где r, r_a, r_b и r_c – радиусы вписанной и вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC и AB соответственно.

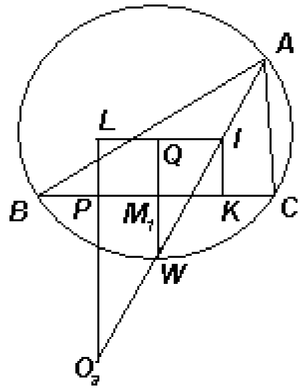
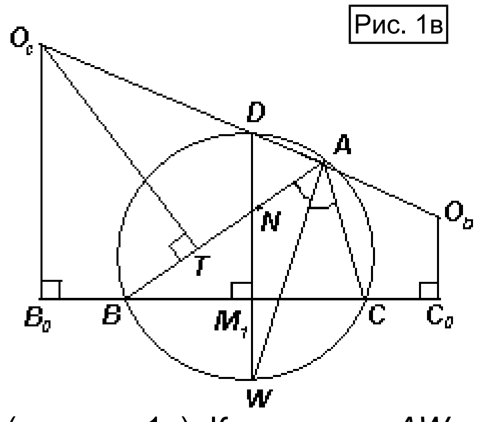


Рис. 1б

1) Пусть точки I и O_a соответственно – центры вписанной окружности и вневписанной окружности, касающейся стороны BC, K и P – точки касания этих окружностей с BC (см. рис. 1б), Так как W – середина отрезка IO_a (следствие из теоремы «трилистника») и $WM_1 \parallel IK \parallel LO_a$, то WQ – средняя линия треугольника ILO_a (L и Q – проекции точек O_a и W на прямую, параллельную BC и проходящую через точку I). Следовательно, $WQ = \frac{1}{2}O_aL = \frac{r_a + r}{2}$, тогда $M_1W = WQ - M_1Q = \frac{r_a - r}{2}$.

Рис. 1в



2) Так как DW – диаметр окружности, то $\angle DAW = 90°$ (см. рис. 1в). Кроме того, AW – биссектриса угла BAC, поэтому, биссектрисы внешних углов треугольника при вершине A лежат на прямой AD, следовательно на этой прямой лежат и центры O_b и O_c вневписанных окружностей. Опустим перпендикуляры O_cB_0 и O_bC_0 на прямую BC, тогда $O_cB_0 = r_c$, $O_bC_0 = r_b$. Таким образом, $O_bO_cB_0C_0$ – трапеция и утверждение задачи равносильно тому, что отрезок M_1D является ее средней линией.

Пусть O_cT – радиус вневписанной окружности, проведенный к стороне AB, N – точка касания этой стороны и окружности, вписанной в треугольник ABC, тогда $BB_0 = BT = AN = p - a$ ($BC = a$, p – полупериметр треугольника ABC). Аналогично получим, что $CC_0 = p - a = BB_0$. Кроме того, $BK = CK$, поэтому, K – середина отрезка B_0C_0. Учитывая, что $KD \parallel O_cB_0 \parallel O_bC_0$, получим требуемое утверждение.

Теперь докажем формулу: Из 1) и 2) следует, что $\frac{r_a - r}{2} + \frac{r_b + r_c}{2} = 2R \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r_a + r_b + r_c = r + 4R}$. $OM_1 + OM_2 + OM_3 = 3R - (W_1M_1 + W_2M_2 + W_3M_3) = 3R - \frac{r_a + r_b + r_c - 3r}{2} = 3R - \frac{r + 4R - 3r}{2} = R + r$.

<u>Второй способ</u>. Докажем сначала три вспомогательных факта: 1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$; 2) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$; 3) $r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ (α, β и γ – углы произвольного треугольника).

Действительно, так как $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то: 1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$. 2) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - (1 + \cos(\alpha + \beta)) = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}) = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin(-\frac{\beta}{2})\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

3) $r = \frac{S}{p} = \frac{abc}{4R} : \frac{a+b+c}{2} = \frac{8R^3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{2R(2R\sin\alpha + 2R\sin\beta + 2R\sin\gamma)} = \frac{2R\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Теперь доказать формулу Карно совсем несложно (*дополнить рис. 1а*): $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = R(1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}) = R + r$.

Как изменится формула, если треугольник – не остроугольный?

[В прямоугольном треугольнике формула верна, но одно из расстояний равно 0, а в тупоугольном – расстояние до большей стороны берется со знаком «минус», так как соответствующий угол равен $180° - \alpha$ (*см. второй способ доказательства, изобразить*)]

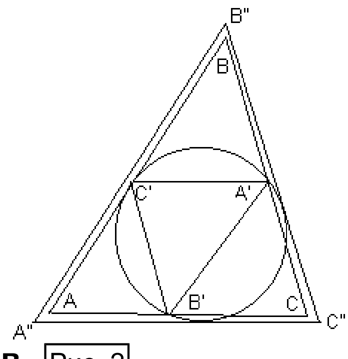


Рис. 2

В заключение вспомним одно полезное неравенство: **в любом треугольнике $\boldsymbol{R \geq 2r}$**. Как это доказать? [Либо с помощью формулы Эйлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (*доказывали в Акичкине*), либо с помощью гомотетии: рассмотрим какой-нибудь треугольник ABC и окружность радиуса R', описанную около его срединного треугольника (см. рис. 2), тогда $R' = 0{,}5R$. Так как существует треугольник $A''B''C''$, в который эта окружность вписана, стороны которого соответственно параллельны сторонам треугольника ABC, то найдется гомотетия с коэффициентом $k > 1$, при которой $\Delta ABC \to \Delta A''B''C''$, поэтому, $R'' \geq R = 2R' = 2r''$]

Задачи для самостоятельного решения

Если это не оговорено отдельно, то треугольник, заданный в условии, – остроугольный.

1. А) Докажите, что сумма расстояний от вершин треугольника до ортоцентра равна сумме диаметров его вписанной и описанной окружностей.

Б) Верно ли это утверждение, если треугольник – не остроугольный?

2. Докажите, что в треугольнике ABC выполняются неравенства:

а) $\frac{AH+BH+CH}{3} \le R$; б) $OH \ge \frac{R-2r}{3}$ (H – ортоцентр).

3. Докажите, что $m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R$, где m_a, m_b и m_c – длины медиан треугольника.

4. А) Докажите, что для углов треугольника выполняется неравенство: $\frac{3r}{R} \le \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$.

Б) Пусть AH_1, BH_2 и CH_3 – высоты треугольника ABC, H – его ортоцентр. Найдите сумму диаметров окружностей, описанных около треугольников AH_2H_3, BH_1H_3 и CH_1H_2, если даны R и r.

5. В окружность радиуса R вписан треугольник, а в каждый сегмент, ограниченный стороной треугольника и меньшей из дуг окружности, вписана окружность наибольшего радиуса. Найдите сумму диаметров трех получившихся окружностей и радиуса окружности, вписанной в треугольник.

6. А) Докажите, что в треугольнике ABC выполняется равенство: $a(OM_2 + OM_3) + b(OM_1 + OM_3) + c(OM_1 + OM_2) = 2pR$.

Б) Пусть h_a – наибольшая высота треугольника ABC. Докажите, что $h_a \ge R + r$. (*Неравенство Эрдеша*)

7. Четырехугольник $ABCD$ – вписанный. Пусть r_1 и r_2 – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC, а r_3 и r_4 – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и CBD. Докажите, что $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$.