10 класс
2011/12 уч. год
Теорема и неравенство Птолемея

Сегодняшнее занятие будет посвящено теореме Птолемея и неравенству Птолемея.
1) Вспомним теорему, которая доказывалась на уроке в 9 классе, и план ее доказательства. ***Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений его противолежащих сторон равна произведению его диагоналей***.
То есть, если *ABCD* – вписанный четырехугольник, то $|AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD| = |AC|\cdot|BD|$. Для доказательства мы рассматривали такую точку *M* на диагонали *BD*, что $\angle DCM = \angle ACB$ (см. рис. 1а). Затем, учитывая равенство вписанных углов, использовали две пары подобных треугольников: $\Delta ABC \sim \Delta DMC$ и $\Delta ACD \sim \Delta BCM$.

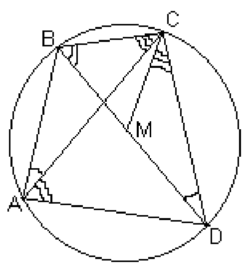
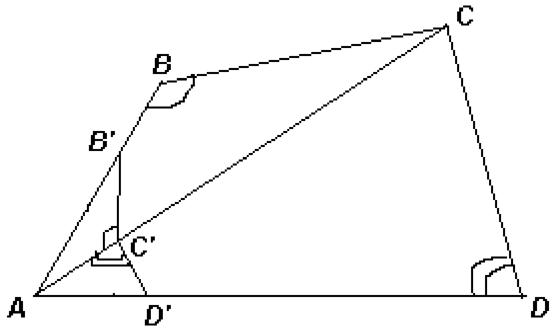


Рис. 1а

Существуют и другие способы доказательства этой теоремы, например, использующие прямую Симсона или теорему косинусов, либо теорему синусов.



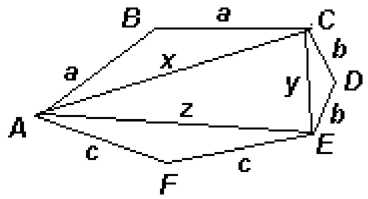
2) Обобщением теоремы Птолемея является неравенство Птолемея, которое формулируется следующим образом: ***в любом четырехугольнике ABCD*** (в том числе, и в невыпуклом или «вырожденном») $\mathbf{|AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD| \geq |AC|\cdot|BD|}$**.** Докажем его.

Пусть точки *B*', *C*' и *D*' лежат на лучах *AB*, *AC* и *AD*, причем $|AB'| = \frac{1}{|AB|}$, $|AC'| = \frac{1}{|AC|}$ и $|AD'| = \frac{1}{|AD|}$ (см. рис. 1б). Тогда $\frac{|AB'|}{|AC|} = \frac{1}{|AB|\cdot|AC|} = \frac{|AC'|}{|AB|}$, значит, $\Delta AB'C' \sim$ Рис. 1б ΔACB (по II пр.). Следовательно, $|B'C'| = \frac{|BC|}{|AB|\cdot|AC|}$. Аналогично, из подобия треугольников *AC*'*D*' и *ADC* получим, что $|C'D'| = \frac{|CD|}{|AC|\cdot|AD|}$, а из подобия треугольников . *AB*'*D*' и *ABD* получим, что $|B'D'| = \frac{|BD|}{|AB|\cdot|AD|}$.

По неравенству треугольника $|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|$. Подставив полученные выражения в это неравенство и освободившись от знаменателя, получим требуемое.

Выясним, когда достигается равенство. Равенство достигается тогда и только тогда, когда точки *B*', *C*' и *D*' лежат на одной прямой, то есть $\angle B'C'A + \angle D'C'A = 180°$. Это равносильно тому, что сумма углов *B* и *D* данного четырехугольника равна 180°, то есть *ABCD* – вписанный.
3) Рассмотри пример сложной задачи, решаемой с помощью доказанного неравенства.

Задача. В выпуклом шестиугольнике *ABCDEF*: $|AB| = |BC| = a$, $|CD| = |DE| = b$, $|EF| = |FA| = c$. Докажите, что $\frac{a}{|BE|}+\frac{b}{|AD|}+\frac{c}{|CF|}\geq\frac{3}{2}$.



Решение. Рассмотрим четырехугольник *ABCE*: пусть $|AC| = x$, $|CE| = y$, $|AE| = z$ (см. рис. 2), тогда $ay + az \geq x|BE| \Leftrightarrow \frac{a}{|BE|}\geq\frac{x}{y+z}$. Аналогично, из четырехугольника *ACDE*: $bx + bz \geq y|AD| \Leftrightarrow \frac{b}{|AD|}\geq\frac{y}{x+z}$, а из четырехугольника *ACEF*: $cx + cy \geq z|CF| \Leftrightarrow \frac{c}{|CF|}\geq\frac{z}{x+y}$.

Рис. 2

Сложим почленно полученные неравенства: $\frac{a}{|BE|}+\frac{b}{|AD|}+\frac{c}{|CF|}\geq\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}$.

Докажем, что $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$.

Действительно, введем обозначения: $x + y = m$, $y + z = n$, $x + z = k$, тогда: $\frac{m+n+k}{2}=x+y+z$, значит, $x=\frac{m-n+k}{2}$, $y=\frac{m+n-k}{2}$, $z=\frac{n+k-m}{2}$. Таким образом, $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=\frac{m-n+k}{2n}+\frac{m+n-k}{2k}+\frac{n+k-m}{2m}$ = $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+\frac{m}{k}+\frac{k}{m}+\frac{n}{k}+\frac{k}{n}-3\right)$ $\geq$ $\frac{3}{2}$, так как сумма взаимно обратных положительных чисел больше или равна двум.

Задачи для самостоятельного решения

1. (*Задача Птолемея*) В треугольнике *ABC*: $|BC| = a$. $|AC| = b$. Найдите $|AB|$, если радиус окружности, описанной около *ABC*, равен *R*.

2. Биссектриса угла *A* треугольника *ABC* пересекает описанную около него окружность в точке *W*. А) Выразите отношение $\frac{|AW|}{|IW|}$ через длины сторон треугольника (*I* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*). Б) Докажите, что $|AW|>\frac{|AB|+|AC|}{2}$.

3. На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* во внешнюю сторону построен квадрат, *O* – его центр. Найдите $|OC|$, если *a* и *b* – катеты треугольника.

4. (*Теорема Помпею*) Точка *M* лежит на окружности, описанной около равностороннего треугольника *ABC*. А) Докажите, что сумма расстояний от *M* до двух вершин треугольника равна расстоянию от *M* до третьей вершины. Б) Укажите все такие точки *X* плоскости, что из отрезков *XA*, *XB* и *XC* можно составить треугольник.

5. Сумма расстояний от точки *X*, выбранной вне квадрата, до двух его ближайших соседних вершин равна *m*. Найдите наименьшее значение суммы расстояний от *X* до двух других вершин квадрата.

6. А) Точки *A*, *B*, *C* и *D* – четыре последовательные вершины правильного семиугольника. Докажите, что $\frac{1}{|AB|}=\frac{1}{|AC|}+\frac{1}{|AD|}$. Б) Докажите, что $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$.