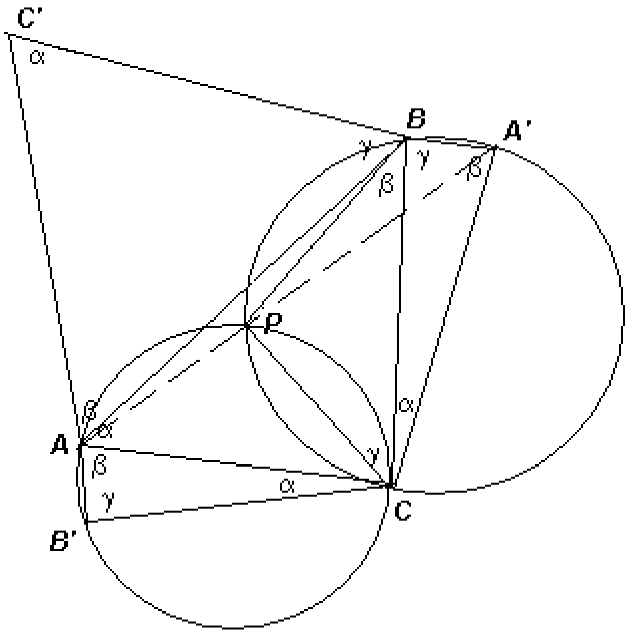
**11 класс**
**2011/12 уч. год**
**Точки Брокара**

**1.** Рассмотрим остроугольный треугольник *ABC*. На его сторонах вне треугольника построим треугольники с вершинами *A*', *B*' и *C*' так, что $\Delta CA'B \sim \Delta CAB' \sim \Delta C'AB \sim \Delta ABC$ (см. рис. 1а). Для удобства, обозначим соответственно равные углы этих треугольников буквами $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$.




1) Докажем, что окружности, описанные около трех построенных треугольников, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть окружности, описанные около треугольников *CA*'*B* и *CAB*' пересекаются в точке *P* (*изобразить*). Тогда $\angle APB = 360° – (\angle APC + \angle BPC) = \gamma + \beta = 180° – \alpha$. Это означает, что точка *P* лежит на окружности, описанной около треугольника *C'AB*.

Рис. 1а

2) Докажем, что в этой же точке пересекаются прямые *AA*', *BB*' и *CC*'.

Доказательство. $\angle APA' = \angle APC + \angle CPA' = (180° – \gamma) + \angle CBA' = 180°$, то есть точка *P* лежит на прямой *AA*'. Аналогично доказывается, что точка *P* лежит на прямых *AA*' и *BB*'.

3) Докажем, что $\angle ABP = \angle CAP = \angle BCP$.

Доказательство. $\angle ABP = \beta – \angle PBC = \beta – \angle PA'C = \beta – (180° – \angle CAP – \alpha – \gamma) = \angle CAP$, что и требовалось. Аналогично доказывается равенство другой пары углов.

Точку ***P***, удовлетворяющую доказанному равенству, ***называют точкой Брокара треугольника ABC***, а ***угол $\varphi = \angle ABP = \angle CAP = \angle BCP$ называют углом Брокара этого треугольника***.

Отметим, что доказанные соотношения верны не только для остроугольного треугольника. Чтобы убедится в этом, достаточно провести аналогичный счет углов, либо в наших доказательствах перейти от обычных углов к углам между прямыми.

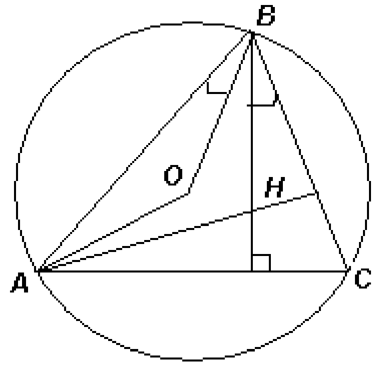
Верно ли, что точка *P* всегда лежит внутри треугольника *ABC*? Почему? [См. 1)]

Утверждения, доказанные в пунктах 1) и 2) дают ***два различных способа построения точки Брокара***. Кроме того, из равенства накрест лежащих углов следует, что: ***(A'B) || (AC), (C'A) || (BC) и (Â'Ñ) || (ÀÂ)***.

**2.** При решении задач вы вновь встретитесь с понятием ***изогонального сопряжения***. Напомню следующие факты (доказывались на кружке в 10 классе):

1) ***Если чевианы AA', BB' и CC' треугольника ABC пересекаются в одной точке, то чевианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$, симметричные им относительно биссектрис углов A, B и C соответственно, также пересекаются в одной точке***.

2) Пусть $P$ – точка пересечения первой тройки чевиан, а $Q$ – точка пересечения второй тройки, тогда ***точки P и Q называют изогонально сопряженными относительно треугольника ABC***.




3) Наиболее простой пример изогонального сопряжения: ортоцентр $H$ треугольника $ABC$ и центр $O$ его описанной окружности (см. рис. 1б).

Действительно, $\angle ABO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB = 90^\circ - \angle C = \angle CBH$. Следовательно, лучи $BO$ и $BH$ симметричны относительно биссектрисы угла $B$. Аналогично и для других вершин треугольника.

Рис. 1б

**Задачи для самостоятельного решения**

**1.** Касательная к описанной окружности треугольника $ABC$, проходящая через вершину $C$, пересекает прямую, проходящую через вершину $B$ параллельно прямой $AC$ в точке $A'$. Докажите, что $\angle A'AC = \varphi$ (углу Брокара треугольника $ABC$).

**2.** Через точку Брокара $P$ треугольника $ABC$ проведены прямые $AP$, $BP$ и $CP$, пересекающие окружность, описанную около $ABC$, в точках $A_1$, $B_1$ и $C_1$ соответственно. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta B_1C_1A_1$.

**3.** Докажите, что $ctg\varphi = ctg\alpha + ctg\beta + ctg\gamma$, где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ – углы данного треугольника.

**4.** а) Докажите, что в любом треугольнике $ABC$ существует ***вторая точка Брокара Q*** (такая, что $\angle CBQ = \angle BAQ = \angle ACQ$).

б) Докажите, что углы Брокара для точек $P$ и $Q$ треугольника $ABC$ равны.

в) Докажите, что точки $P$ и $Q$ изогонально сопряжены относительно треугольника $ABC$.

**5.** а) Докажите, что $\sin^3\varphi = \sin(\alpha - \varphi)\sin(\beta - \varphi)\sin(\gamma - \varphi)$.

б) Пусть $P$ – точка Брокара треугольника $ABC$; $R_1$, $R_2$ и $R_3$ – радиусы окружностей, описанных около треугольников $ABP$, $BCP$ и $CAP$. Докажите, что $R_1R_2R_3 = R^3$, где $R$ – радиус описанной окружности треугольника $ABC$.

**6.** Пусть $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ – углы треугольника; $a$, $b$ и $c$ – длины противолежащих сторон; $S$ – площадь этого треугольника.

а) Докажите, что $ctg\alpha + ctg\beta + ctg\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

б) Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$.

в) Докажите, что в любом треугольнике угол Брокара $\varphi \leq 30^\circ$.

г) Внутри треугольника $ABC$ взята произвольная точка $M$. Докажите, что хотя бы один из углов $ABM$, $BCM$ или $CAM$ не больше, чем 30°.