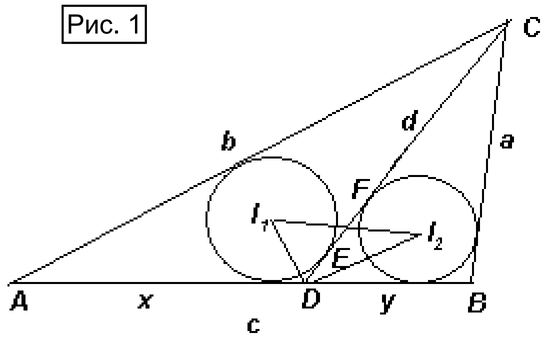
11 класс
2011/12 уч.год
Две вписанные окружности в треугольнике

Сегодня мы займемся изучением такой интересной конфигурации: отрезок CD разбивает треугольник ABC на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Точки I_1 и I_2 – центры этих окружностей (см. рис. 1).

Два свойства этой конфигурации – очевидны:

1. А) Треугольник I_1DI_2 – прямоугольный. Действительно, DI_1 и DI_2 – биссектрисы смежных углов, поэтому $\angle I_1DI_2 = 90°$.

Рис. 1



Б) $\angle I_1CI_2 = \dfrac{1}{2}\angle ACB$. Действительно, CI_1 и CI_2 – биссектрисы углов ACD и BCD соответственно (*провести*).

Для того, чтобы получить другие свойства, а также решить некоторые задачи, нам потребуется вспомнить ***несколько фактов школьного курса геометрии***:

1) Пусть окружность вписана в треугольник со сторонами a, b и c. Тогда расстояния от

Рис. 2а

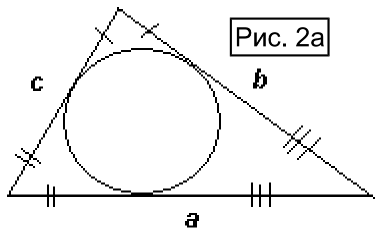
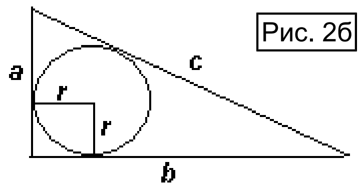


Рис. 2б



вершин треугольника до точек касания равны $p - a$, $p - b$ и $p - c$, где p – полупериметр треугольника (см. рис. 2а).

2) Если окружность вписана в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, то ее радиус вычисляется по формуле $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ (см. рис. 2б).

3) Точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно этой стороны.

4) Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = pr$, где r – радиус вписанной окружности.

2. Пусть окружности касаются прямой CD в точках E и F (см. рис. 1, *дополнить*). Выясним, от каких линейных величин зависит длина отрезка EF. Введем стандартные обозначения для сторон треугольника ABC, а также: $AD = x$, $BD = y$, $CD = d$. Периметры треугольников ACD и BCD обозначим p_1 и p_2 соответственно.

Тогда $EF = |DF - DE| = |(p_2 - a) - (p_1 - b)| = \left|\dfrac{d+y-a}{2} - \dfrac{d+x-b}{2}\right| = \dfrac{|(b+y)-(a+x)|}{2}$.

Таким образом, это расстояние зависит от длин четырех отрезков. Это позволяет рассмотреть ***важные частные случаи***, которые фигурируют в качестве отдельных задач во многих источниках.

А) Пусть $a = b$, то есть треугольник ABC – равнобедренный с основанием AB. Тогда $EF = \dfrac{|y-x|}{2}$, то есть в этом случае достаточно знать длины отрезков, на которые точка D разбивает AB.

Б) Пусть точка D – середина AB, то есть CD – медиана треугольника ABC. Тогда $x = y$, значит, $EF = \dfrac{|b-a|}{2}$, то есть в этом случае достаточно знать длины сторон AC и BC.

В) Пусть *CD* – биссектриса треугольника *ABC*. Тогда $\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$ и *x* + *y* = *c*. Решая эту систему уравнений, получим: $x=\frac{bc}{a+b}$, $y=\frac{ac}{a+b}$. Значит, *EF* = $\frac{(a+b-c)|b-a|}{2(b+a)}$, то есть в этом случае достаточно знать длины сторон треугольника.

Г) Пусть *D* – точка касания окружности, вписанной в треугольник *ABC*, со стороной *AB*. Тогда *x* = *p* – *a*, *y* = *p* – *b*, где *p* – полупериметр треугольника *ABC*. Следовательно, *a* + *x* = *b* + *y*, поэтому *EF* = 0. Геометрически это означает, что обе окружности касаются *CD* в одной и той же точке, то есть эти окружности – касаются друг друга.

3. Докажем, что в произвольном треугольнике при любом расположении точки *D* выполняется неравенство $r_1 + r_2 > r$, .

Действительно, так как $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD}$, то $pr = p_1r_1 + p_2r_2 \Leftrightarrow r=\frac{p_1}{p}r_1+\frac{p_2}{p}r_2$. Из неравенства треугольника следует, что $p_1 < p$ и $p_2 < p$ (см. рис. 1), то есть $r < r_1 + r_2$, что и требовалось.

Задачи для самостоятельного решения.

1. На стороне *AB* треугольника *ABC* отмечена точка *D*. Для треугольников *ADC* и *BDC* рассматриваются вневписанные окружности, касающиеся *AC* и *BC* соответственно. Пусть *P* и *Q* – точки касания этих окружностей с прямой *DC*. А) Найдите *PQ*, если *BC* = *a*, *AC* = *b*, *AD* = *x*, *BD* = *y*. Б) Рассмотрите возможные частные случаи, аналогичные разобранным.

2. В прямоугольном треугольнике *ABC* проведена высота *CD* к гипотенузе *AB*. Докажите, что $r_1 + r_2 + r = CD$, где r_1, r_2 è *r* – радиусы окружностей, вписанных в треугольники *ACD*, *BCD* и *ABC* соответственно.

3. *BM* – медиана треугольника *ABC.* В треугольники *ABM* и *CBM* вписаны окружности радиусов *r* и *R* (*r* < *R*). Докажите, что $\frac{R}{r}<2$.

4. Дан произвольный треугольник *ABC*. Постройте прямую, проходящую через точку *C* и разбивающую его на два треугольника с равными радиусами вписанных окружностей.

5. Точка *D* выбрана на гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* так, что окружности, вписанные в треугольники *ACD* и *BCD*, имеют равные радиусы. Докажите, что $S_{ABC}=|CD|^2$.

6. А) Пусть *I* и *Q* – центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника *ABC*, касающихся стороны *BC*. Докажите, что $AI \times AQ = AB \times AC$.

Б) В треугольнике *ABC* проведена медиана *CD*. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники *ACD* и *BCD*, а точки J_1 и J_2 – центры вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон *AC* и *BC* соответственно. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.