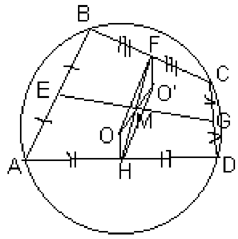
11 класс

2011/12 уч. год

Точка Монжа и сфера двенадцати точек

1. Сегодня речь пойдет о стереометрии, но вначале я напомню одну планиметрическую задачу.

1) Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противолежащим сторонам, пересекаются в одной точке.



<u>Решение</u>. Пусть *ABCD* – четырехугольник, вписанный в окружность с центром *O*; *E*, *F*, *G* и *H* – середины его сторон (см. рис. 1), тогда $(OH)\perp(AD)$. Так как *EFGH* – параллелограмм, то $M = (EG)$ I (FH) является серединой каждой из его диагоналей.

Пусть $O' = S_M(O)$, тогда $F = S_M(H)$, то есть, *O'FOH* – параллелограмм, значит $(O'F)\perp(AD)$. Рассмотрев аналогично перпендикуляры *OG*, *OF* и *OE* к остальным сторонам *ABCD* и их образы при симметрии относительно точки *M*, получим, что они также проходят через точку *O*', что и требовалось доказать.

Рис. 1

Отметим, что точка M – центроид четырехугольника ABCD.

2) Рассмотрим стереометрический аналог этой задачи.

Докажите, что шесть плоскостей, проведенных через середины ребер тетраэдра перпендикулярно противолежащим ребрам пересекаются в одной точке.

<u>Решение</u>. Рассмотрим центр *O* сферы, описанной около тетраэдра *DABC*, и его центроид *M*. Плоскости, проходящие через середину ребра и перпендикулярные этому ребру, пересекаются в точке *O*. Так как *M* – делит каждую бимедиану тетраэдра пополам, то плоскости, о которых говорится в условии задачи, им симметричны относительно точки *M*, поэтому они пересекаются в точке $N = S_M(O)$, что и требовалось.

Полученную точку N называют точкой Монжа данного тетраэдра.

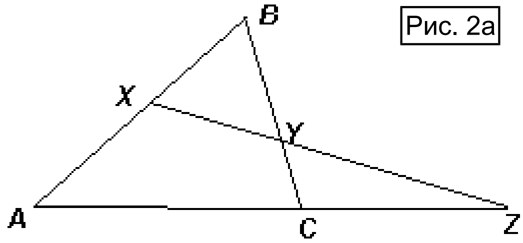
Что является точкой Монжа в ортоцентрическом тетраэдре? [Ортоцентр *H*, так как точка *H* симметрична точке *O* относительно точки *M*]

2. Вспомним некоторые факты, которые вам могут понадобиться при решении задач.

1) Что такое сфера двенадцати точек произвольного тетраэдра и как она получена?

[Сфера, проходящая через центроиды граней. Получена из описанной сферы гомотетией с центром *M* и $k = -\frac{1}{3}$]

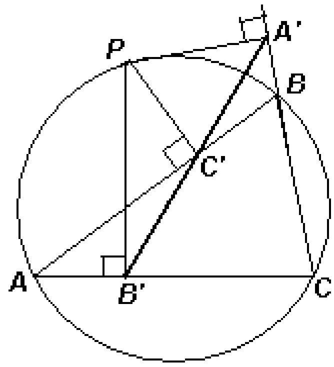
Рис. 2а



2) Как формулируется теорема Менелая?

[***Точки X, Y и Z, лежащие на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC соответственно или на их продолжениях, принадлежат одной прямой т. и т. т., когда выполняется равенство:*** $\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}\cdot\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}}\cdot\frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}}=-1$ (см. рис. 2а)]. В тех случаях, когда мы используем эту теорему для вычисления отношений, достаточно выполнения скалярного равенства $\frac{|AX|}{|XB|}\cdot\frac{|BY|}{|YC|}\cdot\frac{|CZ|}{|YA|}=1$.

Рис. 2б



3) Как формулируется теорема о прямой Симсона?

[***Основания перпендикуляров, опущенных из одной точки на прямые, содержащие стороны треугольника, лежат на одной прямой т. и т. т., когда эта точка принадлежит окружности, описанной около треугольника*** (см. рис. 2б)]

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что: а) сфера двенадцати точек тетраэдра является образом описанной около него сферы при гомотетии с центром *N* и $k = \frac{1}{3}$; б) центр сферы двенадцати точек лежит на [*ON*] и делит его в отношении 2 : 1, считая от очки *O*.

2. В тетраэдре *DABC* точка D_1 лежит на отрезке *ND* и $\frac{|ND_1|}{|D_1D|}=\frac{1}{2}$; *M*' – центроид грани *ABC*. Докажите, что: а) [D_1M'] – диаметр сферы двенадцати точек этого тетраэдра; б) ортогональная проекция точки D_1 на (*ABC*) лежит на этой сфере.

3. А) Пусть сфера, описанная около тетраэдра *DABC*, вторично пересекает (*DH*), содержащую высоту тетраэдра в точке *P*. Докажите, что расстояние от центра O_1 сферы двенадцати точек до (*ABC*) в шесть раз меньше, чем |*DP*|. Б) Докажите, что высота тетраэдра *DABC*, проведенная из вершины *D*, касается сферы двенадцати точек тогда и только тогда, когда центр этой сферы лежит в (*ABC*).

4. Докажите, что в тетраэдре *DABC* точка $N\in$(*ABC*) тогда и только тогда, когда основание *Q* высоты *DQ* лежит на окружности, описанной около треугольника *ABC*.

5. В тетраэдре *DABC* точка $N\in$(*ABC*). Докажите, что высоты граней *DAB*, *DBC* и *DCA*, проведенные из точки *D*, лежат в одной плоскости.