11 класс
2011/12 уч. год
Принцип и теорема Карно

На одном из кружков в 10 классе вы познакомились с формулой Карно. Кто ее помнит? [$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$, где M_i – середины сторон треугольника]

Сегодня мы познакомимся с другими утверждениями, которые также носят его имя и бывают полезны при решении ряда задач. Кроме того, это позволит нам повторить несколько важных фактов курса геометрии.

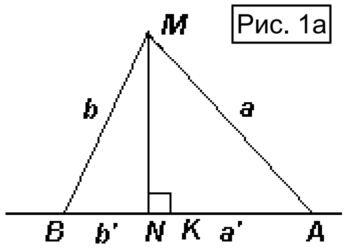


Рис. 1а

Рассмотрим прямую, к которой проведены две наклонных MA и MB из одной точки (см. рис. 1а, б). Пусть длины этих наклонных равны a и b, а длины их проекций равна a' и b'. Докажите, что $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$. Верно ли обратное утверждение?

[Рассмотрим точку N – ортогональную проекцию точки M на (AB). Применим теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам AMN и BMN. Обратное утверждение: пусть $K \in (AB)$ и для этой точки выполняется равенство: $a^2 - b^2 = |KA|^2 - |KB|^2$.

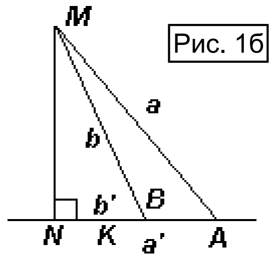
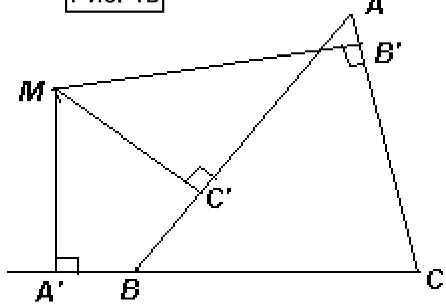


Рис. 1б

Тогда $|NA|^2 - |NB|^2 = |KA|^2 - |KB|^2 \quad \Leftrightarrow \quad (|NA| - |NB|)(|NA| + |NB|) = (|KA| - |KB|)(|KA| + |KB|)$. Тогда, если $N \in [AB]$, то $|NA| - |NB| = |KA| - |KB|$, а если $N \notin [AB]$, то $|NA| + |NB| = |KA| + |KB|$. В обоих случаях $N \equiv K$]

Принцип замены разности квадратов наклонных на разность квадратов их проекций называется принципом Карно.

Сформулируйте полученный результат точки зрения ГМТ. [***Геометрическим местом точек M плоскости, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек A и B – постоянная величина, является прямая, перпендикулярная отрезку AB***] Этот результат мы ранее получали с помощью введения декартовых координат. Его несложно обобщить для пространства, так как в каждой плоскости, содержащей (AB), получена прямая, проходящая через одну и ту же точку $N \in (AB)$. Объединением этих прямых является ***плоскость перпендикуляров к (AB), проходящая через точку N***.

Рис. 1в


Рассмотрим теперь произвольный треугольник ABC. Выберем на прямых, содержащих его стороны по одной точке: $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ и восставим перпендикуляры в этих точках к прямым, на которых они лежат (см. рис. 1в). Пусть эти перпендикуляры пересеклись в одной точке M. Выведем равенство, связывающее между собой расстояния от точек A', B' и C' до вершин треугольника.

По принципу Карно запишем три равенства: $|MC|^2 - |MB|^2 = |A'C|^2 - |A'B|^2$; $|MB|^2 - |MA|^2 = |C'B|^2 - |C'A|^2$; $|MA|^2 - |MC|^2 = |B'A|^2 - |B'C|^2$. Сложив их почленно, получим: $|A'C|^2 + |C'B|^2 + |B'A|^2 = |A'B|^2 + |C'A|^2 + |B'C|^2$ (*показать на чертеже*). Это есть необходимое условие пересечения трех таких перпендикуляров в одной точке. Является ли оно достаточным? Да, конечно.

Как это доказать? [Пусть *M* – точка пересечения двух перпендикуляров. Тогда для отрезка, соединяющего точку *M* с третьей точкой на стороне треугольника выполняется соотношение Карно, поэтому он также является перпендикуляром к этой стороне]

Таким образом, ***если точки A', B' и C' лежат на прямых BC, CA и AB соответственно, то перпендикуляры, восставленные из этих точек к прямым пересекаются в одной точке т. и т. т., когда выполняется равенство*** $|A'C|^2 + |C'B|^2 + |B'A|^2 = |A'B|^2 + |C'A|^2 + |B'C|^2$**.**

Это утверждение называется ***теоремой Карно***, а записанное равенство называется ***соотношением Карно***, которое иногда записывают по-другому, перенеся все слагаемые в одну часть.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Карно для пространства.

2. А) Докажите обобщение теоремы Карно: перпендикуляры, опущенные из произвольных точек плоскости *A*', *B*' и *C*' на прямые *BC, CA* и *AB* соответственно, лежащие в этой же плоскости, пересекаются в одной точке т. и т. т., когда выполняется равенство $|A'C|^2 + |C'B|^2 + |B'A|^2 = |A'B|^2 + |C'A|^2 + |B'C|^2$.

Б) Объясните, каким образом, используя обобщение теоремы Карно, доказать, что высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.

3. А) Дан треугольник *ABC*. Точки A_1, B_1 и C_1 таковы, что $|AB_1| = |AC_1|$, $|BC_1| = |BA_1|$, $|CA_1| = |CB_1|$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые *BC*, *CA* и *AB* соответственно, пересекаются в одной точке.

Б) Даны три попарно пересекающиеся окружности. Используя теорему Карно, докажите, что три их общие хорды пересекаются в одной точке. Какие еще способы доказательства этого факта Вы знаете?

В) Объясните, как использовать утверждение 3Б для еще одного доказательства пересечения трех высот треугольника в одной точке.

4. Около треугольника *ABC* описали окружность. A_1 — точка пересечения ее с прямой, параллельной *BC* и проходящей через вершину *A*. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1 и C_1 опустили перпендикуляры на (*BC*), (*CA*) и (*AB*) соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

5. А) Докажите, что перпендикуляры, проведенные из центров вневписанных окружностей к тем сторонам треугольника *ABC*, которых эти окружности касаются, пересекаются в одной точке.

Б) Переформулируйте доказанное утверждение для треугольника с вершинами в центрах вневписанных окружностей и объясните другой способ доказательства этого факта.

6. Пусть *ABC* – равносторонний треугольник, *P* – произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников *PAB*, *PBC* и *PCA* на прямые *AB*, *BC* и *CA* соответственно, пересекаются в одной точке.

7. Докажите, что перпендикуляры, восставленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке т. и т. т., когда треугольник равнобедренный.