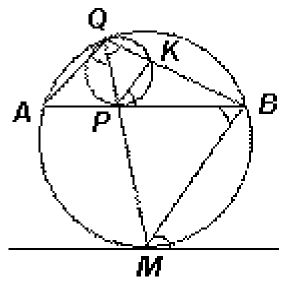
11 класс
2011/12 уч. год
Окружности, вписанные в сегмент. Полувписанная окружность

Сегодняшний кружок состоит из двух частей, которые, казалось бы, мало связаны. Это не так, но убедиться в этом мы сумеем не сразу, скорее всего, на следующем занятии.



1. Вспомним одну знакомую вам геометрическую конфигурацию. В окружности ω радиуса R проведена хорда AB и в сегмент, отсеченный этой хордой, вписана вторая окружность ω_1 радиуса r, касающаяся AB в точке P, а дуги окружности ω – в точке Q. Тогда луч QP является биссектрисой угла AQB (см. рис. 1).

Как это доказать?

<u>Доказательство</u>. Пусть луч QP пересекает ω в точке M. Рассмотрим гомотетию с центром Q и коэффициентом $k = \frac{R}{r}$. При этой гомотетии образом ω_1 является ω, образом точки P – точка M. Далее можно рассуждать по-разному.

Рис. 1

<u>Первый способ</u>. Образом касательной AB к окружности ω_1 является касательная к ω, проходящая через точку M. Угол между этой касательной и хордой BM равен вписанному углу BQM и равен углу ABM (из параллельности касательной и (AB)). Так как $\angle ABM = \angle AQM$, то $\angle BQM = \angle AQM$, что и требовалось.

<u>Второй способ</u>. Рассмотрим точку K – прообраз точки B при указанной гомотетии, тогда образом (PK) является (BM), значит, $(PK) \parallel (BM)$, следовательно, $\angle KPB = \angle PBM$. Кроме того, $\angle BQP = \angle KPB$ и $\angle ABM = \angle AQM$. Таким образом, $\angle BQP = \angle AQP$, что и требовалось.

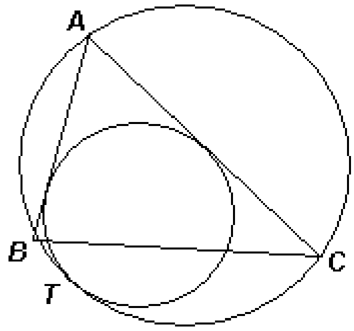
Доказанное утверждение называется леммой о сегменте (или ***леммой Архимеда***). Из доказанного сразу следует, что **M – середина дуги AB**.

2. На одном из кружков в 10 классе при выводе формулы Карно «тригонометрическим» способом мы получили формулу, связывающую радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника: $r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ (α, β и γ – углы этого треугольника).

Напомню, что при выводе этой формулы использовались формулы площади треугольника $S = pr = \frac{abc}{4R}$, стороны выражались через R по следствию из теоремы синусов, а также использовалось равенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, которое доказывается чистой тригонометрией при условии, что $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Сегодня мы используем эту формулу для знакомства с новой геометрической конфигурацией. Пусть в окружность ω вписан треугольник ABC. Рассмотрим окружность ω_1, касающуюся сторон AB и AC и окружности ω в точке T (см. рис. 2а). ***Такую окружность будем называть полувписанной для треугольника ABC***.

<u>Вопросы</u>. 1) Верно ли, что такая окружность существует для любого вписанного треугольника *ABC?* [**Да**. Пусть точка *Z* движется по биссектрисе угла *A*, тогда она равноудалена от *AB* и *AC* и найдется такое ее положение (из соображений непрерывности), при котором это расстояние будет равно расстоянию от *Z* до ω]



2) Сколько полувписанных окружностей у любого треугольника? [**Три**]

<u>Задача</u>. Вычислите радиус r_1 полувписанной окружности треугольника *ABC*, касающейся сторон *AB* и *AC*, если даны радиус *r* вписанной окружности и $\angle BAC = \alpha$.

Рис. 2а

<u>Решение</u>. Пусть *O* и I_1 – центры описанной и полувписанной окружностей соответственно (см. рис. 2б). Вычислим стороны треугольника AOI_1: $|OA| = R$, $|OI_1| = R - r_1$, $|AI_1| = \dfrac{r_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Кроме того, $\angle OAI_1 = \dfrac{|\beta-\gamma|}{2}$ (*прямой счет углов или изогональное сопряжение AO и AH*).

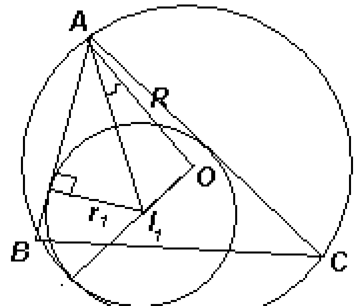


Рис. 2б

По теореме косинусов: $\left(R - r_1\right)^2 = R^2 + \dfrac{r_1^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{2Rr_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$ $\Leftrightarrow$

$r_1^2 - 2Rr_1 = \dfrac{r_1^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{2Rr_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$ $\Leftrightarrow$ $r_1\left(1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$ $\Leftrightarrow$

$r_1 = \dfrac{2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Так как $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}$ = $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} - \cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}$ = $2\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$,

то $r_1 = \dfrac{4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ = $\dfrac{r}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В окружности ω проведена хорда *AB*, *M* – середина одной из дуг *AB*.

а) Найдите радиус наибольшей окружности, вписанной в сегмент, отсекаемый хордой *AB* (не содержащий точки *M*), если радиус окружности ω равен *R*, |*MA*| = *a*.

б) Докажите, что длина касательной, проведенной из точки *M*, к любой окружности, вписанной в этот же сегмент, равна |*MA*|.

в) Докажите, что если в этот же сегмент вписать две окружности, пересекающиеся в точках *C* и *D*, то (*CD*) содержит точку *M*.

2. Из точки *D* окружности ω опущен перпендикуляр *DC* на диаметр *AB*. Окружность ω_1 касается отрезка *CA* в точке *E*, а также отрезка *CD* и окружности ω. Докажите, что [*DE*] – биссектриса треугольника *ADC*.

3. Треугольник *ABC* вписан в окружность ω. Окружность ω_1 касается сторон *AC* и *BC* в точках *M* и *N* и дуги *AB*, *I* – середина отрезка *MN*. Докажите, что:

а) $|AI| = \dfrac{r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, где $\angle BAC = \alpha$, r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC;

б) точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC;

в) (MN) – касательная к окружности, описанной около треугольника BIC.

4. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Окружность ω_1 касается сторон AC и BC в точках M и N соответственно и дуги AB в точке T. Лучи TM и TN пересекают окружность ω в точках C' и B' соответственно. Докажите, что:

а) $(B'C') \parallel (MN)$;

б) $(B'C')$ делит отрезки AM и AN пополам.